Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Равномерная сходимость гиперболических
частичных сумм кратных рядов Фурье, *Матем. заметки*,
2004, том 76, выпуск 5, 723–731

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:42:48

УДК 517.51.475

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

М. И. Дьяченко

Из результатов А. Юдина, В. Юдина, Белинского и Лифлянда вытекает, что если $m \geq 2$ и 2π -периодическая по каждой переменной функция $f(x) \in C(T^m)$ принадлежит классу Никольского $h_{\infty}^{(m-1)/2}(T^m)$, то ее кратный ряд Фурье равномерно сходится по гиперболическим крестам. В статье устанавливается окончательность этого результата. Точнее, в классе $H_{\infty}^{(m-1)/2}(T^m)$ найдется функция, ряд Фурье которой расходится по гиперболическим крестам в некоторой точке.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $m \geq 2$, $\mathbb{Z}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $T = [-\pi, \pi]$ и $f(x) \in L(T^m)$. Пусть также

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n(f) e^{i n x} \quad (1)$$

– это m -кратный тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, где

$$a_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(t) e^{-i n t} dt.$$

Хорошо известно, что в многомерном случае можно рассматривать различные частичные суммы ряда (1). Наиболее популярными являются прямоугольные и сферические суммы, но иногда требуется изучение и других частичных сумм. Проблемы равномерной сходимости так называемых гиперболических частичных сумм (т.е. сумм, взятых по гиперболическим крестам) непрерывных функций будут рассматриваться в данной работе.

Пусть число $r \geq 1$ и

$$\Gamma_r = \left\{ n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m : |n_1 \cdot n_2 \cdots n_m| \leq r^m \text{ и } \max_{1 \leq j \leq m} |n_j| \leq r^m \right\}.$$

Определим

$$Y_r(f; x) = \sum_{n \in \Gamma_r} a_n(f) e^{i n x} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00080, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1657.2003.1.

— гиперболическую частичную сумму ряда (1) (или частичную сумму (1) по гиперболическому кресту Γ_r). Всюду ниже мы будем обозначать через C положительные абсолютные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях), через $C(m)$ — положительные постоянные, зависящие лишь от m и т.д.

Равномерная сходимость сумм (2) тесно связана с поведением так называемых констант Лебега $L_r = \|G_r\|_1$, где $G_r(x)$ — соответствующее ядро Дирихле:

$$G_r(x) = \sum_{n \in \Gamma_r} e^{inx}.$$

Отметим, что величина L_r является нормой оператора Y_r из пространства $C(T^m)$ в $C(T^m)$. В 1977 г. А. А. Юдин и В. А. Юдин [1] и, независимо, Е. С. Белинский [2] установили следующий результат для $m = 2$, а в 1980 г. И. Р. Лифлянд [3] доказал его в общем случае.

ТЕОРЕМА А. Для любого $m \geq 2$ выполнены следующие неравенства:

$$C_1(m)r^{(m-1)/2} \leq L_r \leq C_2(m)r^{(m-1)/2} \quad (3)$$

при любом $r \geq 1$.

Нам также понадобится определение классов Никольского. Пусть $p \in [1, \infty]$, функция $f(x) \in L_P(T^m)$, где $L_\infty(T^m) \equiv C(T^m)$ и

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &= \max_{x \in T^m} |f(x)|. \end{aligned}$$

Затем, если k — натуральное число, то определим k -ю разность функции f в точке x с шагом t как

$$\Delta_k(f, x, t) = \sum_{r=0}^k (-1)^r C_k^r f(x + rt)$$

и модуль гладкости порядка k как

$$\omega_k(f; \delta)_p = \sup_{t \in \mathbb{R}^m: |t| \leq \delta} \|\Delta_k(f, x, t)\|_p.$$

Если $k = 1$, мы будем называть его *модулем непрерывности*. Теперь мы можем определить классы Никольского $H_p^\alpha(T^m)$ и $h_p^\alpha(T^m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $p \in [1, \infty]$ и $\alpha > 0$. Тогда положим $H_p^\alpha(T^m) = \{f(x) \in L_p(T^m) : \text{при всех } k > \alpha \text{ имеем } \omega_k(f; \delta)_p = O(\delta^\alpha) \text{ при } \delta \rightarrow +0\}$. Если в этом определении O заменить на o , будем обозначать соответствующий класс через $h_p^\alpha(T^m)$.

Мы будем также использовать так называемые средние Валле-Пуссена рядов Фурье. Пусть

$$S_{(N_1, \dots, N_m)}(f; x) = \sum_{n_1 = -N_1}^{N_1} \cdots \sum_{n_m = -N_m}^{N_m} a_{(n_1, \dots, n_m)}(f) e^{inx}$$

—прямоугольные частичные суммы ряда (1). Тогда при любом натуральном k определим *кубические средние Валле-Пуссена порядка k* формулой

$$W_k(f; x) = \frac{1}{(k+1)^m} \sum_{N_1=k}^{2k} \cdots \sum_{N_m=k}^{2k} S_{(N_1, \dots, N_m)}(f; x).$$

Ниже мы будем пользоваться хорошо известным фактом: если функция $f(x) \in C(T^m)$, то

$$\|W_k(f; \cdot)\|_\infty \leq 2^{2m} \|f\|_\infty. \quad (4)$$

Положительный результат о сходимости гиперболических частичных сумм рядов Фурье непрерывных функций может быть легко выведен из теоремы А, но он также является частным случаем теоремы, установленной в [4]. Для формулировки нам понадобятся еще два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^m$. Тогда скажем, что $U \in A(m)$, если из того, что $k \in U$, вытекает

$$\prod_{j=1}^m [-|k_j|, |k_j|] \cap \mathbb{Z}^m \subseteq U.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что числовой ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} c_n$$

и-сходится к числу α , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число M такое, что для каждого $U \in A(m)$, удовлетворяющего условию $\{n \in \mathbb{Z}^m : |n| \leq M\} \subseteq U$, имеем

$$\left| \sum_{n \in U} c_n - \alpha \right| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА Б [4]. Если $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ и функция $f(x) \in h_p^{(m-1)|1/2-1/p|}(T^m)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ и-сходится к ней в метрике $L_p(T^m)$.

Полагая здесь $p = \infty$, получаем такой результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. Если $m \geq 2$ и $f(x) \in h_\infty^{(m-1)/2}(T^m)$, то суммы $Y_r(f; x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $r \rightarrow \infty$.

В той же работе [4] автором была доказана невозможность усиления теоремы Б в своих терминах. Верна

ТЕОРЕМА В [4]. Если $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, то существует функция $f(x) \in H_p^{(m-1)|1/2-1/p|}(T^m)$ такая, что ее ряд Фурье и-расходится в метрике $L_p(T^m)$.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что и предложение А нельзя усилить (т.е. гиперболические частичные суммы являются, в определенном смысле, наилучшими в равномерной метрике). Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \geq 2$. Тогда существует функция $f(x) \in H_\infty^{(m-1)/2}(T^m)$ такая, что гиперболические частичные суммы $Y_r(f; x)$ расходятся в некоторой точке.

Эта теорема будет установлена в п. 3. В п. 2 мы докажем важный вспомогательный результат.

Идея использовать средние Валле-Пуссена в данных вопросах была предложена профессором С. В. Конягиным, которому автор приносит свою благодарность. Статья была написана во время пребывания автора в Институте математики Академии наук Республики Китай (г. Тайбей). Автор выражает глубокую признательность китайским коллегам за отличные условия для работы.

2. Вспомогательный результат. Пусть ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^m$ и $t \in \mathbb{Z}_+^m$. Обозначим

$$U_t = \{\nu \in \mathbb{Z}^m : \nu - t \in U\}$$

и

$$\omega(t; U) = 2|U| - |U \cap U_t| - |U \cap U_{-t}|,$$

где $|U|$ — число точек U . Затем, если h — некоторое натуральное число, то для любого $j \in [1, m]$ положим

$$t_j(h) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, h, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-j}).$$

В работе [1] был доказан такой результат.

ЛЕММА А (А. А. Юдин, В. А. Юдин). Пусть $m \geq 2$, ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^m$ и для некоторых $j, r \in [1, m]$, $j \neq r$ и $L_1 \leq L_2$ имеем $\omega(t_j(h); U) \leq L_1 h$ и $\omega(t_r(h); U) \leq L_2 h$ для любого натурального h . Пусть также

$$D_U(x) = \sum_{n \in U} e^{in \cdot x}.$$

Тогда

$$\|D_U\|_1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{2} \right)^{1/2} \log_2 \frac{L_1}{L_2} + \frac{3}{2 - \sqrt{2}} L_1^{1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [5] было доказано, что если ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^m$ таково, что его пересечение с любой прямой линией, параллельной оси координат, есть целочисленный отрезок (возможно пустой), то $\omega(t_j(h); U) \leq 2|S_j(U)|h$ при всех $j \in [1, m]$ и при любом натуральном h , где $S_j(U)$ — это проекция U на гиперплоскость, ортогональную оси Ox_j .

Пусть $m \geq 2$. Нам понадобятся некоторые обозначения. Если натуральное $M > 1$, то обозначим $B_{r,M} = \{n = (n_1, \dots, n_m) : |n_j| \leq Mr \text{ при } j = 1, 2, \dots, m\}$ и

$$G_{r,M} = \sum_{n \in \Gamma_r \setminus B_{r,M}} e^{in \cdot x}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $m \geq 2$. Тогда существует натуральное M такое, что

$$\|G_{r,M}\|_1 \leq \frac{C_1}{2^{2m+1} + 2} r^{(m-1)/2} \quad \text{при всех } r \geq 1,$$

где $C_1 = C_1(m)$ – постоянная из теоремы А при данном m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже будем рассматривать $M = 2^\nu$, где ν – натуральное число и $\nu \geq 3$. Фиксируем некоторые r и M . Пусть $l = [\log_2 r] + 1$ (здесь и далее мы обозначаем через $[a]$ целую часть числа a). Если

$$\Gamma' = \{\mathbf{n} \in \Gamma_r \setminus B_{r,M} : n_j = 0 \text{ для некоторого } j\}$$

и

$$G'_{r,M} = \sum_{\mathbf{n} \in \Gamma'} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}},$$

то, очевидно,

$$\|G'_{r,M}\|_1 \leq C(m)(\ln r)^{m-1}. \quad (5)$$

Используя (5) и соображения симметрии, мы видим, что достаточно установить, что если

$$G_{r,M}^+ = \sum_{\mathbf{n} \in (\Gamma_r \setminus B_{r,M}) \cap (0, \infty)^m} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}},$$

то

$$\|G_{r,M}^+\|_1 \leq C(m)r^{(m-1)/2}\varphi(M),$$

где $\varphi(M) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Введем еще такое обозначение. Если $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, где все k_j – натуральные числа, то положим

$$V_{\mathbf{k}} = ((\Gamma_r \setminus B_{r,M}) \cap (0, \infty)^m) \cap \left(\prod_{j=1}^m [2^{k_j-1}, 2^{k_j}] \right).$$

Пусть, также $K = \{\mathbf{k} : V_{\mathbf{k}} \neq \emptyset\}$. Если $\sigma = (s_1, \dots, s_m)$ – некоторая перестановка набора $(1, \dots, m)$, то обозначим $K(\sigma) = \{\mathbf{k} : k_{s_1} \leq k_{s_2} \leq \dots \leq k_{s_m}\}$. Пусть Q – множество всех перестановок $(1, \dots, m)$. Заметим, что

$$\|G_{r,M}^+\|_1 \leq \sum_{\mathbf{k} \in K} \left\| \sum_{\mathbf{n} \in V_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}} \right\|_1 \equiv \sum_{\mathbf{k} \in K} J_{\mathbf{k}} \leq \sum_{\sigma \in Q} \sum_{\mathbf{k} \in K(\sigma)} J_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\sigma \in Q} I_{\sigma}. \quad (6)$$

Поскольку все I_{σ} оцениваются одинаково, будем рассматривать $I = I_{\sigma(1)}$, где $\sigma(1) = (1, 2, \dots, m)$. Для некоторого фиксированного k_m обозначим

$$K_1(k_m) = \{(k_1, \dots, k_{m-1}) : (k_1, \dots, k_{m-1}, k_m) \in K(\sigma(1))\},$$

$$K'_1(k_m) = \left\{ (k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1(k_m) : k_{m-1} \leq \left\lfloor \frac{ml - k_m}{m-1} \right\rfloor \right\}$$

и $K_1''(k_m) = K_1(k_m) \setminus K_1'(k_m)$. Отметим, что $S_m(V_{\mathbf{k}}) \leq 2^{k_1 + \dots + k_{m-1}}$ и $S_{m-1}(V_{\mathbf{k}}) \leq 2^{k_1 + \dots + k_{m-2} + k_m}$. Поэтому имеем (см. лемму А и замечание 1)

$$\begin{aligned} I &\leq C \sum_{k_m=l+\nu}^{ml} \left(\sum_{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1'(k_m)} 2^{(k_1 + \dots + k_{m-1})/2} (k_m - k_{m-1} + 1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1''(k_m)} 2^{(k_1 + \dots + k_{m-1})/2} (k_m - k_{m-1} + 1) \right) \\ &\equiv C \sum_{k_m=l+\nu}^{ml} (I'(k_m) + I''(k_m)). \end{aligned} \quad (7)$$

Фиксируем $k_m = q$. Для краткости обозначим $\mu = [(ml - q)/(m - 1)]$. Отметим, что

$$q - \mu \leq 1 + \frac{m}{m-1}(q - l) \leq 2(q - l) + 1 \leq 3(q - l).$$

Предположим, что $K_1'(q) \neq 0$. Тогда $\mu \geq 1$. Кроме того, если $d_r = 2^{(m-1)/2r}(q-r+1)$ при $1 \leq r \leq \mu$, то в случае, когда $\mu \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d_r}{d_{r-1}} &= 2^{(m-1)/2} \frac{q-r+1}{q-r+2} \geq 2^{(m-1)/2} \frac{q-\mu+1}{q-\mu+2} \\ &\geq \sqrt{2} \frac{q - (ml - q)/(m-1) + 1}{q - (ml - q)/(m-1) + 2} = \sqrt{2} \frac{m(q-l) + m-1}{m(q-l) + 2m-2} \\ &\geq \sqrt{2} \frac{m\nu + m-1}{m\nu + 2m-2} \geq \sqrt{2} \frac{4m-1}{5m-2} \geq \frac{4\sqrt{2}}{5} = \alpha > 1 \end{aligned}$$

при $2 \leq r \leq \mu$. Поэтому если $K_1'(q) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} I'(q) &= \sum_{k_{m-1}=1}^{\mu} (q - k_{m-1} + 1) \sum_{k_{m-2}=1}^{k_{m-1}} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} 2^{(k_1 + \dots + k_{m-1})/2} \\ &\leq C(m) \sum_{k_{m-1}=1}^{\mu} 2^{(m-1)k_{m-1}/2} (q - k_{m-1} + 1) \\ &= C(m)(q - \mu + 1) 2^{(m-1)\mu/2} \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{\alpha^{\mu-r}} \leq C(m)(q - l + 1) 2^{(m-1)\mu/2} \\ &\leq C(m)(q - l) 2^{ml/2} 2^{-q/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим еще, что для любого $(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1''(q)$ выполнено

$$q - k_{m-1} \leq q - \mu - 1 \leq 2(q - l). \quad (9)$$

Кроме того, для любого $(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1''(q)$ имеем $k_1 + \dots + k_{m-1} \leq ml - q + m$. Для каждого $p \in [m-1, ml - q + m]$ обозначим

$$\Theta_p = \{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1''(q) : k_1 + \dots + k_{m-1} = p\}.$$

Предположим, что $q - m(q - l) - (ml - q + m - p) > 0$ и некоторая точка $(k_1, \dots, k_{m-1}) \in K_1''(q)$ такова, что для какого-то $j \in [1, m-1]$ имеем $k_j \leq q - m(q - l) - (ml - q + m - p)$. Тогда, поскольку $k_r \leq q$ при всех $r \in [1, m-1] \setminus \{j\}$, получаем, что

$$k_1 + \dots + k_{m-1} \leq (m-2)q + q - m(q - l) - (ml - q + m - p) = p - m < p,$$

откуда $(k_1, \dots, k_{m-1}) \notin \Theta_p$ и, таким образом, получаем противоречие. Следовательно, число точек в Θ_p

$$|\Theta_p| \leq (m(q-l) + (ml - q + m - p))^{m-1} \leq C(m)((q-l)^{m-1} + (ml - q + m - p)^{m-1}). \quad (10)$$

Если же $q \leq m(q-l) + (ml - q + m - p)$, то, поскольку $|\Theta_p| \leq q^{m-1}$, оценка (10) также выполняется. Поэтому (см. (9) и (10))

$$\begin{aligned} I''(q) &= \sum_{p=m-1}^{ml-q+m} \sum_{(k_1, \dots, k_{m-1}) \in \Theta_p} 2^{p/2} (q - k_{m-1} + 1) \\ &\leq C(m)(q-l) \sum_{p=m-1}^{ml-q+m} 2^{p/2} ((q-l)^{m-1} + (ml - q + m - p)^{m-1}) \\ &\leq C(m) \left((q-l)^m 2^{ml/2} 2^{-q/2} \right. \\ &\quad \left. + 2^{ml/2} 2^{-q/2} \sum_{p=m-1}^{ml-q+m} 2^{-(ml-q+m-p)/2} (ml - q + m - p)^{m-1} \right) \\ &\leq C(m)(q-l)^m 2^{ml/2} 2^{-q/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Окончательно, получаем (см. (7), (8) и (11)), что

$$\begin{aligned} I &\leq C(m) 2^{ml/2} \sum_{q=l+\nu}^{ml} 2^{-q/2} (q-l)^m \\ &\leq C(m) 2^{(m-1)l/2} \sum_{q_1=\nu}^{\infty} 2^{-q_1/2} q_1^m \leq C(m) r^{(m-1)/2} \varphi(M), \end{aligned}$$

где $\varphi(M) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (6), получаем требуемый результат.

3. Доказательство теоремы. Фиксируем некоторое $M = 2^\nu$, где натуральное $\nu \geq 3$, удовлетворяющее условиям леммы 1. Возьмем, вначале, $r_1 = 10$. Используя тот факт, что L_r являются нормами соответствующих операторов частичных сумм на $C(T^m)$, и делая, в случае необходимости, сдвиг, найдем функцию $g_1(x) \in C(T^m)$ такую, что $\|g_1\|_\infty = 1$ и

$$Y_{r_1}(g_1; \mathbf{0}) \geq \frac{3}{4} C_1 r_1^{(m-1)/2},$$

где C_1 — положительная постоянная из теоремы А для данного m . Затем положим $h_1(x) = r_1^{-(m-1)/2} W_{r_1 M}(g_1; x)$. Предположим, что мы уже выбрали числа $r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1}$ и соответствующие функции $g_1(x) \in C(T^m)$, ..., $g_{k-1}(x) \in C(T^m)$ и $h_1(x)$, ..., $h_{k-1}(x)$ так, что $\|g_l\|_\infty = 1$, $Y_{r_l}(g_l; \mathbf{0}) \geq (3/4) C_1 \times$

$r_l^{(m-1)/2}$ и $h_l(x) = r_l^{-(m-1)/2} W_{r_l M}(g_l; x)$ при $l = 1, 2, \dots, k-1$. После этого, возьмем $r_k > 4r_{k-1}^2$, найдем функцию $g_k(x) \in C(T^m)$ такую, что $\|g_k\|_\infty = 1$ и $Y_{r_k}(g_k; \mathbf{0}) \geq (3/4)C_1 r_k^{(m-1)/2}$, и определим $h_k(x) = r_k^{-(m-1)/2} W_{r_k M}(g_k; x)$.

Пусть теперь

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x). \quad (12)$$

Мы докажем, что эта функция – требуемая. Прежде всего (см. (4)),

$$\|h_k\|_\infty \leq \frac{4^m}{r_k^{(m-1)/2}} \quad \text{и} \quad r_k \geq 4^k$$

для всех k , откуда ряд (12) сходится равномерно и $f(x) \in C(T^m)$. Затем возьмем некоторое натуральное $q > (m-1)/2$ и оценим модуль гладкости порядка q функции $f(x)$. Достаточно рассмотреть разность $\Delta_q(f; x; \tau)$ для произвольного $x \in T^m$ и для $\tau = (t, 0, \dots, 0)$, где $t \in (0, 1/10)$. Подберем k такое, что $1/r_k \leq t < 1/r_{k-1}$ и $k \geq 2$. Ясно, что

$$|\Delta_q(f; x; \tau)| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |\Delta_q(h_l; x; \tau)|.$$

Имеем

$$|\Delta_q(h_l; x; \tau)| \leq \frac{2^{2m+q}}{r_l^{(m-1)/2}}$$

при $l \geq k$, поэтому

$$\sum_{l=k}^{\infty} |\Delta_q(h_l; x; \tau)| \leq 2^{2m+q} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{r_l^{(m-1)/2}} \leq \frac{C(m, q)}{r_k^{(m-1)/2}} \leq C(m, q) t^{(m-1)/2}.$$

Используя неравенство Бернштейна и то, что $h_l(x)$ является полиномом по x_1 степени не выше $r_l M$, будем иметь

$$|\Delta_q(h_l; x; \tau)| \leq t^q (M r_l)^q \frac{2^{2m}}{r_l^{(m-1)/2}} \leq C(m) t^q M^q r_l^{q-(m-1)/2}$$

при $l < k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k-1} |\Delta_q(h_l; x; \tau)| &\leq C(m) t^q M^q \sum_{l=1}^{k-1} r_l^{q-(m-1)/2} \\ &\leq C(m, q) t^q M^q r_{k-1}^{q-(m-1)/2} \leq C(m, q) M^q t^{(m-1)/2}. \end{aligned}$$

Итак, $\omega_q(f; \delta)_\infty \leq C(m, M, q) \delta^{(m-1)/2}$ при $\delta > 0$.

Пусть k_0 таково, что $r_k \geq 2M r_{k-1}$ для $k \geq k_0$. Тогда для любого $k \geq k_0$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned} Y_{r_k}(f; \mathbf{0}) - Y_{2M r_{k-1}}(f; \mathbf{0}) \\ = Y_{r_k}(h_k; \mathbf{0}) - Y_{2M r_{k-1}}(h_k; \mathbf{0}) + \sum_{l=k+1}^{\infty} (Y_{r_k}(h_l; \mathbf{0}) - Y_{2M r_{k-1}}(h_l; \mathbf{0})) \\ \equiv \sigma_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} \sigma_l. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя теорему А, получим

$$|\sigma_l| \leq 2C_2(m)r_k^{(m-1)/2} \|h_l\|_\infty \leq 2^{2m+1} C_2(m) \frac{r_k^{(m-1)/2}}{r_l^{(m-1)/2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} |\sigma_l| \leq C(m)r_k^{(m-1)/2} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{r_l^{(m-1)/2}} \leq \frac{C(m)r_k^{(m-1)/2}}{r_{k+1}^{(m-1)/2}} \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $k \rightarrow \infty$. Аналогично,

$$|Y_{2Mr_{k-1}}(h_k; \mathbf{0})| \leq C_2(m)(2Mr_{k-1})^{(m-1)/2} \cdot \|h_l\|_\infty \leq \frac{C(m)(Mr_{k-1})^{(m-1)/2}}{r_k^{(m-1)/2}} \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $k \rightarrow \infty$. Наконец,

$$\begin{aligned} Y_{r_k}(h_k; \mathbf{0}) &= \frac{1}{r_k^{(m-1)/2}} Y_{r_k}(g_k; \mathbf{0}) - \frac{1}{r_k^{(m-1)/2}} Y_{r_k}(g_k - W_{r_k M}(g_k); \mathbf{0}) \\ &\geq \frac{3}{4} C_1 - \frac{1}{r_k^{(m-1)/2}} Y_{r_k}(g_k - W_{r_k M}(g_k); \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что (по поводу обозначений см. п. 2)

$$Y_{r_k}(g_k - W_{r_k M}(g_k); \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} (g_k(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - W_{r_k M}(g_k; \mathbf{x} + \mathbf{t})) G_{r_k, M}(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Поэтому из леммы 1 вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_k^{(m-1)/2}} |Y_{r_k}(g_k - W_{r_k M}(g_k); \mathbf{0})| &\leq \frac{1}{r_k^{(m-1)/2}} \frac{C_1}{2^{2m+1} + 2} r_k^{(m-1)/2} \|g_k - W_{r_k M}(g_k)\|_\infty \\ &\leq \frac{C_1}{2^{2m+1} + 2} \cdot (2^{2m} + 1) \|g_k\|_\infty = \frac{C_1}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$Y_{r_k}(h_k; \mathbf{0}) \geq \frac{C_1}{4} \quad (18)$$

для любого k . Из формул (13)–(15) и (18) получаем, что гиперболические частичные суммы кратного ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ расходятся в точке $\mathbf{0}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юдин А. А., Юдин В. А. Дискретные теоремы вложения и константы Лебега // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 3. С. 220–226.
- [2] Белинский Е. С. Поведение констант Лебега для некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1977. С. 19–39.
- [3] Лифлянд И. Р. Точный порядок констант Лебега гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Деп. в ВИНТИ 12.07.1980 № 2349-80. М.: ВИНТИ, 1980.
- [4] Дьяченко М. И. U -сходимость кратных рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 128–142.
- [5] Дьяченко М. И. Порядок роста констант Лебега ядер Дирихле монотонного типа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. № 6. С. 33–37.