Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, Дифференциальные уравнения с почти и условно периодическими коэффициентами: возвращаемость и приводимость, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 229–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:06:02

УДК 517.928

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОЧТИ И УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ: ВОЗВРАЩАЕМОСТЬ И ПРИВОДИМОСТЬ

Н. Г. Мошевитин

Доказывается возвращаемость индивидуальной траектории неавтономного линейного дифференциального уравнения на компактной группе Ли в случае почти и условно периодической зависимости от времени правой части. Изучается связь задачи о возвращаемости с вопросами приводимости.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Пусть $v(x)$ – векторное поле на компактном гладком многообразии M такое, что $\operatorname{div} v \equiv 0$. Как известно, в этом случае дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ сохраняет фазовый объем и справедлива теорема Пуанкаре о возвращаемости [1]: почти всякая траектория уравнения $\dot{x} = v(x)$ бесконечно много раз возвращается к своему начальному условию. Эта теорема допускает небольшое количественное уточнение [2]. Обозначим через $|\cdot|$ какое-либо расстояние на M , через $x(t, x_0)$ траекторию с начальным условием x_0 . Тогда существует положительное $\delta = \delta(M, v)$ такое, что для почти всякого (в смысле меры Лебега) $x_0 \in M$ найдется последовательность моментов времени $t_\nu \rightarrow +\infty$, для которой выполнено $|x(t_\nu, x_0) - x_0| < t_\nu^{-\delta}$. Последний результат является метрическим, так как связан с поведением *почти всех* траекторий.

В настоящей работе получены результаты о возвращаемости *всех* траекторий неавтономного уравнения

$$\dot{X} = A(t)X, \quad (1)$$

где $X \in \operatorname{SO}(n)$ и $A(t) \subset \operatorname{so}(n)$ – гладкая кососимметрическая матрица, почти или условно периодически зависящая от времени t .

В случае условно периодической зависимости уравнение (1) может быть записано в расширенном виде

$$\dot{X} = D(\varphi)X, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad X \in \operatorname{SO}(n), \quad \varphi \in \mathbb{T}^s$$

($\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$ – базис частот условно периодической кососимметрической матрицы $A(t) = D(\omega t + \varphi_0)$). Последнее уравнение является автономным (но уже нелинейным) на компактной группе $\operatorname{SO}(n) \times \mathbb{T}^s$, и по теореме Пуанкаре почти всякая траектория этого

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00378 и № 96-15-96072.

уравнения возвращается. Тем не менее, теорема Пуанкаре ничего не говорит о возвращаемости каждой траектории.

Отметим, что в случае *периодической* зависимости от t матрицы $A(t)$ уравнение (1) *приводимо* и, следовательно, каждая его траектория возвращается, причем регулярно.

Ниже все результаты формулируются для линейного неавтономного уравнения на группе $SO(n)$. Однако, они остаются справедливыми и для любого левоинвариантного почти или условно периодического векторного поля на любой компактной связной группе Ли, поскольку последнюю всегда можно вложить в $SO(n)$ при достаточно большом n .

Отметим, что идеи доказательств почерпнуты из некоторых элементарных методов в задачах теории чисел, связанных с итерационными процессами [3]–[5].

2. Возвращаемость. Зафиксируем некоторую норму в пространстве всех матриц и обозначим через $|\cdot|$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть непрерывная матрица $A(t) \in so(n)$ удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists \tau > T : \quad \tau \text{ есть } \varepsilon\text{-почти период } A(t). \quad (2)$$

Тогда траектория $X(t) = X(t, X_0)$ уравнения (1) возвращается к начальному условию $X(0) = X_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку уравнение (1) является линейным, возвращается величина

$$\Xi(t) = \sup_{X_0 \in SO(n)} |X(t, X_0) - X_0|,$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists t > T : \quad \Xi(t) < \varepsilon.$$

Отметим, что условие (2) является более слабым, чем классическое условие (равномерной) почти периодичности (см. [6]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть матрица $A(t) \in so(n)$ условно периодически зависит от времени t и $\omega_1, \dots, \omega_s$ – базис линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот:

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} A_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(m_1\omega_1 + \dots + m_s\omega_s)t}, \quad A_{m_1, \dots, m_s} \in so(n), \\ K &= s \sum_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} |A_{m_1, \dots, m_s}| \max\{|m_1|, \dots, |m_s|, 1\} < +\infty \end{aligned} \quad (3)$$

и $d = n(n-1)/2$. Тогда для любого $T > 1$ найдется $t(T)$, $1 \leq t(T) \leq T$, такое, что

$$|X(t(T), X_0) - X_0| \leq C(n, K, \omega) \left(\frac{\log s}{\log \log T} \right)^{1/d}, \quad (4)$$

причем $t(T) \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, в левой части неравенства (4) можно поставить величину

$$\Xi(t(T)) = \sup_{X_0 \in \text{SO}(n)} |X(t(T), X_0) - X_0|.$$

В [7] доказано, что для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов частот (ω_1, ω_2) для траектории $X(t, X_0)$ уравнения (1) с двухчастотной условно периодической матрицей $A(t)$ найдется последовательность моментов времени $t_\nu \rightarrow +\infty$, для которой

$$|X(t_\nu, X_0) - X_0| = O((\log t_\nu)^{-1/(2n+1)}).$$

Относительно нижних оценок времени возвращаемости автору известен лишь классический результат, получающийся с помощью алгебраических чисел (см. [8]): для уравнения

$$\dot{X} = \omega, \quad X \in \mathbb{T}^n,$$

в случае, когда $\omega_1, \dots, \omega_n$ образуют базис вещественного алгебраического поля, выполнено

$$|X(t, X_0) - X_0| \gg t^{-1/(n-1)}, \quad t > 1.$$

3. Вспомогательные утверждения и доказательства теорем 1 и 2.

ЛЕММА 1. Пусть $B_1, \dots, B_k \in \text{SO}(n)$, $d = n(n-1)/2$. Тогда найдутся натуральные числа $i_1, \dots, i_p$ такие, что $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k$ и $B_{i_1} \cdots B_{i_p} = E + O(k^{-1/d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип Дирихле. Рассмотрим матрицы

$$\Omega_j = B_0 B_1 \cdots B_j, \quad B_0 = E, \quad j = 0, \dots, k.$$

В силу компактности $\text{SO}(n)$ можно покрыть k кусочками диаметра $O(k^{-1/d})$. Однако, число матриц Ω_j в точности $k+1$. Итак,

$$\exists j > i : \quad |\Omega_j - \Omega_i| = O(k^{-1/d}).$$

Тем самым, $|B_{i+1} \cdots B_j - E| = O(k^{-1/d})$. Лемма доказана.

Следующая лемма очевидна, и ее доказательство мы не приводим.

ЛЕММА 2. Пусть $Z(t)$ и $Y(t)$ – соответственно решения систем

$$\dot{Z} = A(t)Z, \quad \dot{Y} = B(t)Y,$$

где $A(t), B(t) \subset \text{so}(n)$, с начальным условием $Z(0) = Y(0) \in \text{SO}(n)$. Пусть для любого t выполнено $|A(t) - B(t)| < \varepsilon$. Тогда при любом $t \in [0, 1/\varepsilon]$ имеем $|Z(t) - Y(t)| \ll \varepsilon t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ограничимся случаем $X_0 = E$ (единичная матрица). Зафиксируем T . По $\varepsilon_1 = \varepsilon$ согласно условию (2) выберем $\tau_1 > T$, которое является ε_1 -почти периодом $A(t)$. Возьмем $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/\tau_1$ и выберем по нему $\tau_2 > T$, которое является ε_2 -почти периодом $A(t)$. Выполним эту процедуру k раз, пока по $\varepsilon_k = \varepsilon_1/(\tau_1 + \dots + \tau_{k-1})$ не определится $\tau_k > T$, являющееся ε_k -почти периодом $A(t)$. Рассмотрим матрицы $X(\tau_1), \dots, X(\tau_k) \in \text{SO}(n)$ и применим к ним лемму 1. Получим

$$X(\tau_{i_1}) \cdots X(\tau_{i_p}) = E + O(k^{-1/d}).$$

Оценим разность $X(\tau_{i_p} + \dots + \tau_{i_1}) - X(\tau_{i_1}) \cdots X(\tau_{i_p})$. Так как τ_i является ε_i -почти периодом, имеет место $|A(t + \tau_i) - A(t)| < \varepsilon_i$ для любого t . Рассмотрим системы уравнений с начальными условиями

$$\dot{Y} = A(t + \tau_{i_{\nu+1}})Y, \quad Y(0) = X(\tau_{i_{\nu+1}}), \quad (5)$$

$$\dot{Z} = A(t)Z, \quad Z(0) = X(\tau_{i_{\nu+1}}). \quad (6)$$

Для системы (5) $Y(t) = X(\tau_{i_{\nu+1}} + t)$, а для (6) $Z(t) = X(t)X(\tau_{i_{\nu+1}})$. По лемме 2 имеем

$$X(\tau_{i_{\nu+1}} + t) - X(t)X(\tau_{i_{\nu+1}}) = O(\varepsilon_{i_{\nu+1}}t).$$

Итак,

$$\begin{aligned} X(\tau_{i_p} + \dots + \tau_{i_1}) &= X(\tau_{i_{p-1}} + \dots + \tau_{i_1})X(\tau_{i_p}) + O(\varepsilon_{i_p}(\tau_{i_{p-1}} + \dots + \tau_{i_1})) = \dots \\ &= X(\tau_{i_1}) \cdots X(\tau_{i_p}) + O(k\varepsilon). \end{aligned}$$

Полагая $k = [\varepsilon^{-d/(d+1)}]$, имеем $T^* = \tau_{i_p} + \dots + \tau_{i_1} > T$ и $X(T^*) = E + O(\varepsilon^{1/(d+1)})$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим

$$\varepsilon = \gamma \left(\frac{\log s}{\log \log T} \right)^{(d+1)/d}, \quad k = [\varepsilon^{-d/(d+1)}],$$

γ — достаточно малая положительная константа. Применяя теорему Дирихле о совместных приближениях [8], получим для $\varepsilon_1 = \varepsilon$ натуральное τ_1 такое, что

$$\max_{j=1, \dots, s-1} \left\| \frac{\tau_1 \omega_j}{\omega_s} \right\| \leq \varepsilon_1, \quad \tau_1 \leq \varepsilon_1^{-s+1}.$$

Определим индуктивно $\varepsilon_\mu, \tau_\mu, \mu = 1, \dots, k$, так, что

$$\varepsilon_{\mu+1} = \frac{\varepsilon}{\tau_1 + \dots + \tau_\mu}, \quad \max_{j=1, \dots, s-1} \left\| \frac{\tau_\mu \omega_j}{\omega_s} \right\| \leq \varepsilon_\mu, \quad \tau_\mu \leq \varepsilon_\mu^{-s+1}.$$

В силу условия (3) каждое из чисел τ_μ/ω_s является $K\varepsilon_\mu$ -почти периодом $A(t)$. В силу иррациональности ω_j/ω_s выполнено $\min \tau_\mu \rightarrow +\infty, T \rightarrow +\infty$. Рассуждения, применявшиеся в доказательстве теоремы 1, позволяют утверждать, что существует момент времени $T^* = t(T)$ такой, что

$$\omega_s^{-1} \min_{\mu} \tau_\mu \leq T^* \leq \omega_s^{-1}(\tau_1 + \dots + \tau_k), \quad (7)$$

$$|X(T^*, X_0) - X_0| \leq \gamma_1 k \varepsilon \leq \gamma_2 \left(\frac{\log s}{\log \log T} \right)^{1/d}, \quad (8)$$

где $\gamma_l = \gamma(n, K, \omega, \gamma) > 0$. При достаточно малом γ

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq \mu} \tau_j &\leq \varepsilon_\mu^{-s} \leq \left(\frac{\varepsilon}{\tau_1 + \dots + \tau_{\mu-1}} \right)^{-s} \\ &\leq \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^s \left(\max_{1 \leq j \leq \mu-1} \tau_j \right)^s \leq \dots \leq \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^{(s+1)^k} \leq T \omega_s. \end{aligned}$$

Теперь (7) можно переписать в виде

$$\omega_s^{-1} \min_\mu \tau_\mu \leq T^* \leq T. \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) доказывают теорему 2.

4. Интегралы от условно периодических функций. Пусть $f: \mathbb{T}^s \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, заданная абсолютно сходящимся рядом Фурье:

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} f_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

частоты $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in \mathbb{R}^s$. Рассмотрим интеграл

$$I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi) = \int_t^{t+\tau} f(\omega_1 \xi + \varphi_1, \dots, \omega_s \xi + \varphi_s) d\xi.$$

ЛЕММА 3. Для любого вещественного τ выполнено равенство

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)| = \inf_{\varphi \in \mathbb{T}^s} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$g(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} f_m \frac{e^{2\pi i(m_1 \omega_1 + \dots + m_s \omega_s) \tau} - 1}{2\pi i(m_1 \omega_1 + \dots + m_s \omega_s)} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}$$

(ряд сходится абсолютно). Отсюда видно, что $I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi) = g(\omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_s t + \varphi_s)$, т.е. интеграл $I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)$ является условно периодической функцией от t . Теперь лемма 3 является следствием всюду плотности вполне иррациональной обмотки тора.

Совершенно аналогично доказывается

ЛЕММА 4. Имеют место равенства

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^s} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)| = \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^s} |I_{f, \omega}(0, \tau, \varphi)|.$$

В работе [9] на основании свойств сингулярных по Хинчину систем (см. [10], [11]) доказана

ЛЕММА 5. Пусть $s \geq 3$. Тогда для любой положительнозначной функции $\Psi(y)$, сколь угодно быстро убывающей к 0, и для любой положительнозначной функции $\psi(y)$ такой, что $\psi(y) = o(y)$, $y \rightarrow +\infty$, найдется набор линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот $\omega_1, \dots, \omega_s$ со следующим свойством:

для любой функции f , коэффициенты Фурье которой допускают оценку

$$|f_{m_1, \dots, m_s}| \geq \Psi(\max_j |m_j|) \quad \text{при} \quad \max_j |m_j| \geq M_0 = M_0[f],$$

имеет место соотношение

$$\exists \tau_0 = \tau_0[\Psi, \psi, M_0] : \quad \forall \tau \geq \tau_0 \quad \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^s} |I_{f, \omega}(0, \tau, \varphi)| \geq \psi(\tau).$$

Из лемм 3–5 и соображений непрерывности вытекает

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s \geq 3$. Тогда для любой положительнозначной функции $\Psi(y)$ найдется набор линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот $\omega_1, \dots, \omega_s$ со следующим свойством:

для любой функции f , коэффициенты Фурье которой допускают оценку

$$|f_{m_1, \dots, m_s}| \geq \Psi(\max_j |m_j|) \quad \text{при} \quad \max_j |m_j| \geq M_0 = M_0[f],$$

имеет место соотношение

$$\exists \tau_0 = \tau_0[\Psi, M_0] : \quad \forall \tau \geq \tau_0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^s \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)\| = \frac{1}{2}$$

($\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого).

Отметим, что при $s = 2$ теорема 3 неверна: в работах [12], [13] для любой достаточно гладкой функции $f(x_1, x_2)$ и для любых несоизмеримых частот ω_1, ω_2 доказано выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \tau^* \quad \exists \tau > \tau^* : \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)| < \varepsilon,$$

т.е. возвращаемость величины $\sup_{t \in \mathbb{R}} |I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)|$ при $\tau \rightarrow \infty$. Тем не менее, мы можем сформулировать результат об аномальном поведении рассматриваемого интеграла и при $s = 2$. Этот результат связан с наличием частот ω_1, ω_2 , отношение которых допускает аномально хорошие рациональные приближения. Его доказательство фактически проведено в [14, теорема 1, случай Б].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $s = 2$. Тогда для любой положительнозначной функции $\Psi(y)$ и любой положительнозначной функции $\psi(y)$, монотонно стремящейся к 0 при $y \rightarrow \infty$, найдется набор линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот ω_1, ω_2 со следующим свойством:

для любой функции f , коэффициенты Фурье которой допускают оценку

$$|f_{m_1, m_2}| \geq \Psi(\max_j |m_j|) \quad \text{при} \quad \max_j |m_j| \geq M_0 = M_0[f],$$

для некоторой последовательности моментов времени $T_\nu \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\min_{1 \leq \tau \leq T_\nu} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)\| \geq \psi(T_\nu).$$

Отметим, что левая часть этой формулы на самом деле не зависит от φ .

5. Равномерная возвращаемость. Контрпример. Вернемся к уравнению (1). Как отмечалось в п. 2, возвращаемость величины $\Xi(t)$ равносильна возвращаемости отдельной траектории. Далее мы будем рассматривать другую характеристику равномерной возвращаемости и для уравнения (1) определим величину

$$\Lambda(\tau) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{X_0 \in \text{SO}(n)} |X(t + \tau, X_0) - X(t, X_0)|.$$

Ниже приведен пример системы уравнений, для которых величина $\Lambda(\tau)$ не возвращается.

На окружности $\text{SO}(2)$, отнесенной к координате $z \pmod{1}$, рассмотрим уравнение с условно периодическими коэффициентами

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X = \begin{pmatrix} \cos 2\pi z & \sin 2\pi z \\ -\sin 2\pi z & \cos 2\pi z \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a(t) \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$a(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_s t) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^s \\ m \neq 0}} f_{m_1, \dots, m_s} e^{2\pi i(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_s x_s)t}.$$

Поскольку решение рассматриваемого уравнения явным образом записывается с помощью интеграла $I_{f, \omega}(t, \tau, \varphi)$, теоремы 3 и 4 принимают следующий вид.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $s \geq 3$. Тогда для любой положительнозначной функции $\Psi(y)$ найдется набор линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот $\omega_1, \dots, \omega_s$ со следующим свойством:

для любой функции f , коэффициенты Фурье которой допускают оценку

$$|f_{m_1, \dots, m_s}| \geq \Psi\left(\max_j |m_j|\right) \quad \text{при} \quad \max_j |m_j| \geq M_0 = M_0[f],$$

для уравнения (10)

$$\Lambda(\tau) = \max_{\xi, \eta \in \text{SO}(2)} |\xi - \eta| > 0 \quad \text{при} \quad \tau \geq \tau_0,$$

т.е. величина $\Lambda(\tau)$ не возвращается.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $s = 2$. Тогда для любой положительнозначной функции $\Psi(y)$ и любой положительнозначной функции $\psi(y)$, монотонно стремящейся к 0 при $y \rightarrow \infty$, найдется набор линейно независимых над $\mathbb{Z}$ частот ω_1, ω_2 со следующим свойством:

для любой функции f , коэффициенты Фурье которой допускают оценку

$$|f_{m_1, m_2}| \geq \Psi\left(\max_j |m_j|\right) \quad \text{при} \quad \max_j |m_j| \geq M_0 = M_0[f],$$

для некоторой последовательности моментов времени $T_\nu \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\min_{1 \leq \tau \leq T_\nu} \Lambda(\tau) \geq \psi(T_\nu).$$

Теоремы 5, 6 можно рассматривать как пример того, что “интеграл” почти периодической функции (решение уравнения (10)) ограничен, но не является почти периодической функцией.

6. Возвращаемость и приводимость. Существуют различные определения приводимости (см. [15]–[19]). Будем говорить, что уравнение (1) *приводимо*, если существует замена переменных $X = B(t)Y$ с невырожденной *условно периодической* матрицей $B(t)$, $B(0) = E$, с базисом частот $\omega_1^*, \dots, \omega_\sigma^*$ такая, что после замены переменных уравнение (1) принимает вид

$$\dot{Y} = DY, \quad (11)$$

где D – постоянная матрица. Поскольку исходное уравнение рассматривается на компактной группе Ли $SO(n)$, справедливы следующие наблюдения.

ЛЕММА 6. *В случае приводимости уравнения (11) выполнено $D \in so(n)$ и, следовательно, $B(t) \in SO(n)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что в силу невырожденности и условной периодичности замены матрицы $B(t)$ и $(B(t))^{-1}$ ограничены при всех t и, следовательно, e^{Dt} ограничена при всех $t \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 7. *Если уравнение (1) приводимо, то для любого $T > 1$ найдется $t(T)$, $1 \leq t(T) \leq T$, такое, что*

$$\Lambda(t(T)) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{X_0 \in SO(n)} |X(t(T) + t, X_0) - X(t, X_0)| \leq \kappa T^{-1/(n+\sigma)},$$

причем $t(T) \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow \infty$.

Лемма 7 вытекает из теоремы Дирихле о совместных приближениях [8], примененной для базиса частот $\omega_1^*, \dots, \omega_\sigma^*$ матрицы приведения и показателей $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, определяемых характеристическими числами $\chi_1 = e^{2\pi i \lambda_1}, \dots, \chi_n = e^{2\pi i \lambda_n}$ постоянной ортогональной матрицы e^D .

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 7 показывает, что пример (10) со сколь угодно большим наперед заданным порядком гладкости правой части при определенном выборе частот обладает следующими свойствами:

- 1) для “почти всех” условно периодических матриц $A(t)$ заданной гладкости, имеющих базис частот из теорем 4, 5, уравнение (10) неприводимо;
- 2) каждая траектория уравнения (10) ограничена.

7. Структура невозвращаемости. Примеры этого пункта показывают, что величина $\Lambda(\tau)$ может не возвращаться. Опишем комбинаторную структуру такой невозвращаемости. Согласно теореме 1 для матрицы $A(t)$, удовлетворяющей (2), для любых ε, T и каждого τ найдется момент $t^*(\varepsilon, T) \geq T$ возвращаемости траектории $X(t + \tau, X_0)$ в ε -окрестность точки $X(t, X_0)$. Этот момент времени имеет вид $t^*(\varepsilon, T) = \tau_i + \dots + \tau_j$, $i < j$, где величины $\tau_i, \dots, \tau_j$ представляют собой несколько последовательно идущих чисел из набора $\tau_1, \dots, \tau_k$, $k = O(\varepsilon^{-d})$, зависящего только от ε и T . Начало i и конец j выборки зависят от t . Кроме того, для каждого t соответствующая ему выборка $\tau_i, \dots, \tau_j$ обеспечивает возвращаемость в 2ε -окрестность точки $X(t, X_0)$ не только для самого t , но и для всех моментов времени в некоторой окрестности момента t . Следующая теорема отражает эту картину возвращаемости.

ТЕОРЕМА 7. Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $H(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-d})$, $d = n(n-1)/2$, такое, что для любого T можно указать совокупность интервалов

$$J^h(\varepsilon, T) = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} (t_i(\varepsilon, T), t_{i+1}(\varepsilon, T)), \quad 1 \leq h \leq H(\varepsilon),$$

таких, что

$$\bigcup_{h=1}^{H(\varepsilon)} J^h(\varepsilon, T) = (-\infty, +\infty),$$

и для каждого h можно указать момент времени $\tau_h = \tau_h(\varepsilon, T) > T$ такой, что

$$\Lambda_h(\tau_h) = \sup_{t \in J^h(\varepsilon, T)} \sup_{X_0 \in \text{SO}(n)} |X(t + \tau_h, X_0) - X(t, X_0)| < \varepsilon.$$

Отметим, что интересно получить точные по порядку оценки величины $H(\varepsilon)$, а также описать возможные структуры последовательности переключений величины h .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
- [2] Мощевитин Н. Г. Об одной теореме Пуанкаре // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 223–224.
- [3] Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
- [4] Baker R. C. Recent results on fractional parts of polynomials // Lecture Notes in Math. 1979. V. 751. P. 10–17.
- [5] Boshernizan M. D. Elementary proof of Furstenberg Diophantine result // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. № 1. P. 67–70.
- [6] Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [7] Лапин С. Э. Овозвращаемости траекторий систем линейных дифференциальных уравнений с условно периодическими коэффициентами // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 52–56.
- [8] Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
- [9] Мощевитин Н. Г. Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 394–410.
- [10] Khinchin A. Ya. Über eine Klasse linearer Diophantine Approximationen // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1926. V. 50. P. 170–195.
- [11] Хинчин А. Я. Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 12. С. 249–258.
- [12] Козлов В. В. Финальные свойства интегралов от квазипериодических функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. № 1. С. 106–115.
- [13] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
- [14] Козлов В. В., Мощевитин Н. Г. О диффузии в гамильтоновых системах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 5. С. 49–52.
- [15] Еругин Н. П. Приводимые системы. Тр. МИАН. Т. 13. Л.–М.: АН СССР, 1946.
- [16] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [17] Treshchev D. V. An estimate of irremovable nonconstant terms in the reducibility problem // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 168. P. 91–128.
- [18] Блинов И. Н. Прямой метод. Приводимость // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 201–212.
- [19] Бронштейн И. У., Чёрный В. Ф. Линейные расширения, удовлетворяющие условию Перрона. I // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 10. С. 1739–1751; II // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 201–207.