Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Перестройки замкнутых многообразий с диэдральной фундаментальной группой, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 238–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:16:50

УДК 512.6

ПЕРЕСТРОЙКИ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ДИЭДРАЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Ю. В. Муранов, Д. Реповш

В работе вычислены группы препятствий к перестройкам до простой гомотопической эквивалентности нормальных степени 1 отображений замкнутых многообразий с диэдральной фундаментальной группой. Рассмотрены случаи тривиальной ориентации диэдральной группы и нетривиальной ориентации на циклической подгруппе порядка 2. Получены новые результаты о группах Браудера–Ливси и естественных отображениях L -групп, возникающих при вложении индекса 2 циклической группы в диэдральную.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Группы Уолла $L_n^s(G, w)$ являются группами препятствий к перестройкам нормального степени 1 отображения $f: (M, \partial M) \rightarrow (Y, \partial Y)$ гладких (кусочно-линейных, топологических) многообразий с краем до простой гомотопической эквивалентности. Далее для этих групп будем использовать обозначение $L_n(G, w)$.

Здесь n – размерность многообразия Y , $G = \pi_1(Y)$ и $w: G \rightarrow \{\pm 1\}$ – гомоморфизм ориентации. Если край многообразия Y непуст, то предполагаем, что ограничение отображения f на край многообразия M является простой гомотопической эквивалентностью $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial Y$. Каждый элемент группы $L_n(G, w)$ реализуется нормальным отображением многообразий с краем (см. [1]). Однако, в случае конечной фундаментальной группы G обычно существует очень мало элементов группы $L_n(G, w)$, которые могут быть реализованы нормальными отображениями замкнутых многообразий. Подгруппу, порожденную такими элементами, обозначим через $C_n(G, w)$ (см. [2]).

Существует естественное отображение групп Уолла $L_n(G, w)$ в проективные группы Новикова–Уолла $L_n^p(G, w)$, которые устроены значительно проще. В работе [2] получен полный набор инвариантов, описывающий образ группы $C_n(G, w)$ в группе $L_n^p(G, w)$ для любой конечной 2-группы G . В случае тривиальной ориентации глубокие результаты по проблеме реализации получены в работе [3], а в случае нетривиальной ориентации полные результаты получены только для конечных абелевых 2-групп (см. [3], [4]). Техника, развитая Хэмблтоном в работе [2] для проективного случая, базируется на результатах Браудера, Ливси [5] и Кэшелла, Шейнсона [6]. Основную роль при этом играют группы Браудера–Ливси $LN_{n-1}(\pi \rightarrow G)$, где π – подгруппа индекса 2 в группе G , и естественные отображения между ними и группами Уолла. Так, в работе [6] описано отображение, называемое инвариантом Браудера–Ливси, группы $L_n(G)$ в группу

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации, грант № 96-15-96841. Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республики Словения, грант № J1-7039-0101-95.

Браудера–Ливси, которое тривиально на элементах группы Уолла, реализуемых нормальными отображениями замкнутых многообразий. Группы Браудера–Ливси являются группами препятствий к расщеплению простой гомотопической эквивалентности $f: M \rightarrow Y$ вдоль одностороннего подмногообразия $X \subset Y$, когда индуцированное вложением отображение фундаментальных групп $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ есть изоморфизм. Естественные отображения (трансфер, скрученный трансфер, индуцирование) между группами Уолла и группами Браудера–Ливси, необходимые для исследования проблемы реализации замкнутыми многообразиями, входят в косу Левина (см. [7], [8])

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_n(\pi) & \xrightarrow{i_!} & L_n(G) & \xrightarrow{i^! t^{-1}} & LN_{n-2}(\pi \rightarrow G) & \longrightarrow \\
 \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 & & L_n(i^!) & & L_n(i_!) & & \\
 \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \\
 \longrightarrow & LN_{n-1}(\pi \rightarrow G) & \xrightarrow{t i_!} & L_{n-1}(G^-) & \xrightarrow{i^!} & L_{n-1}(\pi) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (1)$$

В геометрических приложениях наиболее важными оказываются отображения, входящие в верхнюю и нижнюю строки диаграммы (1) (см. [2], [6]). Диаграммы, в которых мы рассматриваем только верхнюю и нижнюю строки, будем называть двустрочными. Отметим, что верхняя и нижняя строки диаграммы (1) являются цепными комплексами с изоморфными в соответствующих членах гомологиями. Это обстоятельство дает достаточно эффективный метод вычисления групп и отображений. Знак “ $-$ ” означает, что гомоморфизм ориентации изменен на образующей $t \in G \setminus \pi$. Отображение $i_!$ индуцировано вложением i , а отображение $i^!$ есть трансфер в группах Уолла. Если t – произвольный элемент из $G \setminus \pi$, то определен изоморфизм скейлинга групп Уолла для колец с антиструктурой (см. п. 2) $t: L_n(G, w) \rightarrow L_n(\mathbb{Z}G, \beta, w(t)t^2)$ [7], [8], где $\beta(x) = t\alpha(x)t^{-1}$. Отметим, в частности, что отображение $i^! t^{-1}$ в диаграмме (1) задает инвариант Браудера–Ливси. Существует также аналогичная (1) диаграмма, начинающаяся с отображения $i_!: L_n(\pi) \rightarrow L_n(G^-)$. Чтобы различать их, диаграмму (1) будем обозначать через (D) , а другую – через $(\tilde{D})$.

Пусть $\pi = \mathbb{Z}/2^r \subset D_{r+1}$ – вложение индекса 2 циклической группы с тривиальной ориентацией в диэдральную 2-группу $D_{r+1} = \{x^{2^r} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}\}$. При $r = 2$ группы $L_n(D_{r+1}, w)$ и $L_n^p(D_{r+1}, w)$ изоморфны при любом гомоморфизме ориентации w . Следовательно, результаты [2] дают полное описание групп $C_n(D_3, w)$ для любого $n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4$. При $r \geq 3$ такого изоморфизма уже нет, значит в этом случае результаты [2] дают только нижнюю оценку групп $C_n(D_{r+1}, w)$.

В данной работе вычисляются группы $C_n(D_{r+1}, w)$ для случаев, когда гомоморфизм ориентации w тривиален на образующей x группы D_{r+1} . Группы Уолла диэдральной группы в этих случаях вычислены в работе [8], а группы Браудера–Ливси – в работе [9]. Основная трудность состоит в вычислении естественных отображений в диаграмме (1). В п. 3 для рассматриваемых вложений вычислены отображения в диаграмме (1), а также группа $LN_1(\pi \rightarrow D_{r+1}^{+,+}) \cong LN_3(\pi \rightarrow D_{r+1}^{+,-})$, полученная в работе [9], с точностью до расширения. Для вычислений использована спектральная последовательность в теории перестроек из работы [10]. Отметим, что в случае тривиальной ориентации на группе D_{r+1} ($w(y) = w(x) = 1$) группы $C_n(D_{r+1}, w)$ можно также вычислить (см. [3]). Основными результатами работы являются теоремы 3–5.

Промежуточный шаг в вычислении групп препятствий к перестройкам и групп Браудера–Ливси (см. [8]) состоит в вычислении групп $L_*^Y(\mathbb{Z}_2\pi)$, где $\mathbb{Z}_2$ – кольцо целых

2-адических чисел, $Y = \ker(K_1(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow K_1(\mathbb{Q}\pi)) \cup \{\pm\pi\}$. Эти группы входят в точную последовательность Ротенберга (см. [8])

$$\longrightarrow L_n^Y(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}) \longrightarrow L_n^K(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}) \longrightarrow H^n(K/Y) \longrightarrow, \quad (2)$$

где $H^n(K/Y)$ – когомологии Тейта группы K/Y , $K = K_1(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$, и инволюция на группе K/Y индуцирована стандартной инволюцией на групповом кольце $\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}$, заданной формулой

$$\Sigma n_g g \rightarrow \Sigma n_g w(g)g^{-1}, \quad n_g \in \widehat{\mathbb{Z}}_2, \quad g \in \pi,$$

и $w: \pi \rightarrow \{\pm 1\}$ – гомоморфизм ориентации. Для конечной 2-группы π группа $L_*^K(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$ изоморфна $\mathbb{Z}/2$. Группы $L_*^Y(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$ и аналогичные группы для антиструктур, соответствующих группам Браудера–Ливси, вычислены в работах [8], [9]. Естественные отображения между этими группами можно вычислить, используя естественные отображения когомологий Тейта (см. [11]–[13]).

Для любой группы π имеет место относительная длинная точная последовательность (см. [8])

$$\longrightarrow L'_n(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow L'_n(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}) \longrightarrow L_n(\mathbb{Z}\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}) \longrightarrow, \quad (3)$$

в которой $L'_n(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$ является группой $L_n^Y(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$ при $n = 2k$ и отождествляется с ядром отображения $L_n^Y(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi}) \rightarrow L_n^K(\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi})$ при $n = 2k + 1$. Отметим, что для диэдральной либо циклической 2-группы π группа

$$SK_1(\mathbb{Z}\pi) = \ker(K_1(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow K_1(\mathbb{Q}\pi))$$

тривиальна (см. [8]). Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место изоморфизм $L' \cong L^s$. В дальнейшем все L^s -группы будем обозначать через L .

Таким образом, для вычисления естественных отображений в диаграмме (1) для вложения $i: \pi \rightarrow G$ индекса 2 можно использовать двустрочные диаграммы для квадратичного расширения $\widehat{\mathbb{Z}}_{2\pi} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2 G$ (см. [7]) и двустрочные диаграммы для относительных групп (см. [11]).

2. Естественные отображения когомологий Тейта. Этот пункт содержит необходимые предварительные сведения о группах Уолла для колец с антиструктурами и спектральных последовательностях в теории перестроек для квадратичных расширений антиструктур (см. [7]–[14]).

Антиструктура – это тройка (R, α, u) , где R – кольцо с единицей, $u \in R^*$ – обратимый элемент кольца, $\alpha: R \rightarrow R$ – антиавтоморфизм кольца R такой, что $\alpha(u) = u^{-1}$, $\alpha^2(x) = u x u^{-1}$ для любого $x \in R$. *Структура* на кольце R – это пара (ρ, a) , где $\rho: R \rightarrow R$ – автоморфизм кольца R , а a – обратимый элемент такой, что $\rho(a) = a$, $\rho^2(x) = a x a^{-1}$ для любого $x \in R$ (см. [7]). Пусть $S = R[t]/(t^2 - a)$ – квадратичное расширение кольца R , где t – элемент независимый над R , для которого $\rho(x) = t x t^{-1}$ для любого $x \in R$. Пусть также существует продолжение автоморфизма α на кольцо S такое, что $\alpha(t)t \in R \subset S$, $\alpha^2(t) = u t u^{-1} \in S$. В этом случае антиструктура (S, α, u) называется *квадратичным расширением* антиструктуры (R, α, u) . Автоморфизм ρ продолжается на кольцо S по формуле $\rho(x + yt) = t(x + yt)t^{-1}$, $x, y \in R$. Можно также определить автоморфизм γ кольца S , полагая $\gamma(x + yt) = (x - yt)$, $x, y \in R$. По данному квадратичному расширению антиструктур можно построить другое квадратичное расширение $(R, \tilde{\alpha}, \tilde{u}) \rightarrow (S, \tilde{\alpha}, \tilde{u})$, где $\tilde{\alpha} = \rho\gamma\alpha$ и $\tilde{u} = -t\alpha(t^{-1})u$ (см. [7]). Так как квадраты

антиавтоморфизмов $\alpha, \tilde{\alpha}$ являются внутренними автоморфизмами, то эти антиавтоморфизмы индуцируют инволюции на группах $K_j(R), K_j(S)$ для $j = 0, 1$. Обозначим эти инволюции через T и $\tilde{T}$ соответственно.

Для любой подгруппы $X \subset K_j(R)$, инвариантной относительно инволюции T , определены группы Уолла с декорациями $L_n^X(R, \alpha, u)$, так что для двух инвариантных подгрупп $X \subset X' \subset K_j(R)$ имеет место точная последовательность Ротенберга (см., например, [8], [14])

$$\longrightarrow L_n^X(R) \longrightarrow L_n^{X'}(R) \longrightarrow H^n(X'/X) \longrightarrow ,$$

где H^* – когомологии Тейта. Пусть $i: (R, \alpha, u) \rightarrow (S, \alpha, u)$ – квадратичное расширение антиструктур. Тогда для $j = 0, 1$ определен гомоморфизм индуцирования $i_*: K_j(R) \rightarrow K_j(S)$ и гомоморфизм переноса $i^*: K_j(S) \rightarrow K_j(R)$. Отображения i^*, i_* коммутируют с инволюциями $T, \tilde{T}$ и, следовательно, индуцируют отображения когомологий Тейта, которые мы будем обозначать через $i^!$ и $i_!$ соответственно.

Аналогично, пусть $X \subset X' \subset K_j(R)$ и $Y \subset Y' \subset K_j(S)$ являются $T, \tilde{T}$ -инвариантными подгруппами при $j = 0, 1$. Предположим, что $i_*(X) \subset Y, i^*(Y) \subset X, i_*(X') \subset Y', i^*(Y') \subset X'$, и обозначим $A = X'/X, B = Y'/Y$. В этом случае мы также получаем индуцированные i^*, i_* отображения когомологий Тейта групп A и B , которые, по-прежнему, обозначим через $i^!$ и $i_!$ соответственно.

В этих предположениях существует коса Левина, состоящая из относительных точных последовательностей когомологий Тейта (см. [11], [12]):

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^n(B, \tilde{T}) & \longrightarrow & H^n(A, T) & \longrightarrow & H^n(B, T) & \longrightarrow \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & H^{n-1}(i_+^*) & & H^n(i_-^*) & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & H^{n-1}(B, T) & \longrightarrow & H^{n-1}(A, \tilde{T}) & \longrightarrow & H^{n-1}(B, \tilde{T}) & \longrightarrow \end{array} \quad (4)$$

В эту диаграмму входят относительные точные последовательности для отображений индуцирования

$$i_*: (A, T) \rightarrow (B, T), \quad i_*: (A, \tilde{T}) \rightarrow (B, \tilde{T})$$

и относительные точные последовательности для отображений переноса

$$i^*: (B, T) \rightarrow (A, \tilde{T}), \quad i^*: (B, \tilde{T}) \rightarrow (A, T).$$

Обозначим эту диаграмму через (D) . Другая диаграмма $(\tilde{D})$ получается для отображений индуцирования

$$i_*: (A, \tilde{T}) \rightarrow (B, T), \quad i_*: (A, T) \rightarrow (B, \tilde{T})$$

и отображений переноса

$$i^*: (B, T) \rightarrow (A, T), \quad i^*: (B, \tilde{T}) \rightarrow (A, \tilde{T}).$$

Диаграмма (1) реализуется на уровне спектров (см. [10]). С использованием этого факта в [10] построена спектральная последовательность в теории перестроек, причем $E_1^{p,q} = LN_{q+2}(\pi \rightarrow G)$, а первый дифференциал совпадает с композицией

$$LN_n(\pi \rightarrow G^\pm) \longrightarrow L_n(G^\mp) \longrightarrow LN_{n-2}(G^\mp),$$

где одно отображение из диаграммы (D) , а другое отображение из диаграммы $(\tilde{D})$. При этом первый дифференциал совпадает с отображением $1 \mp \Phi$, где Φ – инволюция на группах Браудера–Ливси (см. [2], [10]). Диаграмма (4) реализуется на уровне спектров (см. [11], [13]) аналогично диаграмме (1). Таким образом, метод Хэмблтона и Харшиладзе [10], построивших спектральную последовательность в теории перестроек по диаграмме (1), дает спектральную последовательность когомологий Тейта в рассматриваемом случае. Подробное построение спектральной последовательности в этом случае содержится в работе [13]. Первый дифференциал $d_1^{p,q}$ для четного p и $q = 0, 1$ совпадает с композицией

$$H^q(A, \tilde{T}) \xrightarrow{i_!} H^q(B, \tilde{T}) \xrightarrow{i^!} H^q(A, \tilde{T}),$$

где отображение $i_!$ входит в диаграмму (D) , а отображение $i^!$ входит в диаграмму $(\tilde{D})$. Для нечетного p и $q = 0, 1$ первый дифференциал $d_1^{p,q}$ совпадает с композицией

$$H^q(A, \tilde{T}) \xrightarrow{i_!} H^q(B, T) \xrightarrow{i^!} H^q(A, \tilde{T}),$$

где отображение $i_!$ входит в диаграмму $(\tilde{D})$, а отображение $i^!$ входит в диаграмму (D) . Обозначим через ρ инволюцию на группе $H^q(A, \tilde{T})$, индуцированную инволюцией ρ на кольце R .

ТЕОРЕМА 1 [13]. *Дифференциал $d_1^{p,q}: E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ не зависит от p и q и совпадает с гомоморфизмом $1 + \rho$.*

Пусть $\pi = \mathbb{Z}/2^r \subset D_{r+1} = G$ – вложение индекса 2 циклической группы с тривиальной ориентацией в диэдральную группу с тривиальной ориентацией, $w = 1$. Через i^- будем обозначать вложение $\pi \rightarrow G^-$ групп с ориентацией. Если из контекста ясно, какую ориентацию мы рассматриваем, то не будем указывать ориентацию в обозначениях групп и отображений. Вложение i индуцирует квадратичное расширение колец со стандартной инволюцией $\hat{\mathbb{Z}}_2\pi \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_2G$. Инволюция ρ в этом случае задается на любом элементе $x \in \pi$ равенством $\rho(x) = x^{-1}$. Обозначим $A = K_1(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi/Y)$, $B = K_1(\hat{\mathbb{Z}}_2G/Y)$. Тогда $H^1(A, T) = H^1(A, \tilde{T}) = H^1(B, T) = H^1(B, \tilde{T}) = 0$, $H^0(A, T) = (\mathbb{Z}/2)^2$, $H^0(A, \tilde{T}) = (\mathbb{Z}/2)^{2^r}$, $H^0(B, T) = (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3}$, $H^0(B, \tilde{T}) = (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-1}$ (см. [8], [9]).

ТЕОРЕМА 2 [11], [13]. 1) *В двустрочной диаграмме когомологий Тейта для вложения i нетривиальна только четномерная строка, являющаяся точной последовательностью*

$$\longrightarrow H^0(A, T) \xrightarrow{i_!} H^0(B, T) \xrightarrow{i^!} H^0(A, \tilde{T}) \xrightarrow{i_!} H^0(B, \tilde{T}) \xrightarrow{i^!},$$

в которой левое отображение является мономорфизмом.

2) *В двустрочной диаграмме для вложения i^- нетривиальна только четномерная строка, являющаяся точной последовательностью*

$$\longrightarrow H^0(A, T) \xrightarrow{i_!} H^0(B, \tilde{T}) \xrightarrow{i^!} H^0(A, \tilde{T}) \xrightarrow{i_!} H^0(B, T) \xrightarrow{i^!},$$

в которой левое отображение тривиально.

3. Естественные отображения L -групп. В этом пункте вычислены естественные отображения в диаграмме (1) для вложения $i: \pi = \mathbb{Z}/2^r \subset D_{r+1} = \{x^{2^r} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}\} = G$ и некоторые группы Браудера–Ливси.

Напомним, что мы рассматриваем только случай тривиальной ориентации на циклической подгруппе. Введем следующие обозначения: $R = \mathbb{Z}\pi, T^\pm = \mathbb{Z}G^\pm, \hat{R}_2 = \hat{\mathbb{Z}}_2\pi, \hat{T}_2^\pm = \hat{\mathbb{Z}}_2G^\pm, A = K_1(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)/Y, B = K_1(\hat{\mathbb{Z}}_2G)/Y$. Знак “+” означает, что гомоморфизм ориентации w тривиален на образующей y , а знак “-” означает, что $w(y) = -1$. В случае, когда мы рассматриваем когомологии Тейта относительно инволюции, индуцированной стандартной инволюцией в групповом кольце (она соответствует инволюции T п. 2), будем писать $H^n(A)$ и $H^n(B)$. Когомологии Тейта, рассматриваемые относительно тождественной инволюции, соответствующей антиструктуре групп Браудера–Ливси, будем обозначать через $H^n(A, *)$ и $H^n(B, *)$ (она соответствует инволюции $\tilde{T}$ п. 2). Напомним, что антиструктура $L_n(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi, \text{Id}, 1)$ соответствует антиструктуре для групп Браудера–Ливси в рассматриваемом случае в силу изоморфизма $LN_{n+2}(\pi \rightarrow D_{r+1}^+) \cong LN_n(\pi \rightarrow D_{r+1}^-) \cong L_n(\mathbb{Z}\pi, \text{Id}, 1)$.

Все группы, входящие в диаграммы типа (1) для квадратичных расширений $\hat{\mathbb{Z}}_2\pi \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_2G^+$ и $\hat{\mathbb{Z}}_2\pi \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_2G^-$, известны из работ [8], [9]. Имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} L_n(\hat{R}_2) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^2 & \text{при } n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n = 2, 3 \bmod 4, \end{cases} \\ L_n(\hat{T}_2^-) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{при } n = 0, 2 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-1} & \text{при } n = 1, 3 \bmod 4, \end{cases} \\ L_n(\hat{T}_2^+) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3} & \text{при } n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n = 2 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+2} & \text{при } n = 3 \bmod 4, \end{cases} \\ L_n(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi, \text{Id}, 1) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^r} & \text{при } n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n = 2 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^r-1} & \text{при } n = 3 \bmod 4. \end{cases} \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. 1) *Отображение $i_1: L_n(\hat{R}_2) \rightarrow L_n(\hat{T}_2^+)$, индуцированное отображением i , является мономорфизмом при любом $n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4$.*

2) *Отображение $i_1: L_n(\hat{R}_2) \rightarrow L_n(\hat{T}_2^-)$ является мономорфизмом при четном n и тривиально при нечетном n , а отображение $i^1: L_{2n+1}(\hat{T}_2^+) \rightarrow L_{2n+1}(\hat{R}_2)$ является эпиморфизмом при $n = 0, 1 \bmod 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В четных размерностях утверждения леммы либо тривиальны, либо следуют из сохранения Arf -инварианта отображением i_1 . Последнее, в свою очередь, следует из очевидных изоморфизмов $L_n^K(\hat{R}_2) \xrightarrow{\cong} L_n^K(\hat{T}_2^\pm) \cong \mathbb{Z}/2$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 L_2^K(\widehat{T}_2^+) & \cong & \mathbb{Z}/2 \\
 \downarrow & & \\
 (\mathbb{Z}/2)^2 \cong H^0(A) & \xrightarrow{i!} & H^0(B) \cong (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathbb{Z}/2)^2 \cong L_1(\widehat{R}_2) & \xrightarrow{i!} & L_1(\widehat{T}_2^+) \cong (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3}
 \end{array}$$

Правая вертикальная строка является точной последовательностью Ротенберга (2). Верхнее вертикальное отображение тривиально, так как в группе $L_2(\widehat{T}_2^+)$ Arg -инвариант реализуется. Верхнее горизонтальное отображение является мономорфизмом по теореме 2. Следовательно, нижнее горизонтальное отображение также является мономорфизмом. В размерности 3 для случая 1) рассуждения аналогичны. В случае 2) рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3} & \cong & H^0(B) \xrightarrow{i!} H^0(A) \cong (\mathbb{Z}/2)^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+3} & \cong & L_1(\widehat{T}_2^+) \xrightarrow{i!} L_1(\widehat{R}_2) \cong (\mathbb{Z}/2)^2
 \end{array}$$

Верхнее горизонтальное отображение является эпиморфизмом по теореме 2. Правое вертикальное отображение является изоморфизмом, как следует из рассмотрения предыдущей диаграммы. Отсюда следует утверждение леммы в размерности 1. Размерность 3 рассматривается аналогично. Заметим также, что отображение $L_2(\widehat{\mathbb{Z}}_2\pi, \text{Id}, 1) \rightarrow L_2(\widehat{T}_2^+)$, входящее в одну из рассматриваемых диаграмм, является изоморфизмом. Оно сохраняет Arg -инвариант. Теперь остальные утверждения леммы получаются с помощью диаграммного поиска в двустрочных диаграммах. Лемма доказана.

Следует отметить, что полученные в лемме 1 результаты дают все отображения в диаграммах типа (1) для квадратичных расширений $\widehat{R}_2 \rightarrow \widehat{T}_2^\pm$.

Относительные группы Уолла из точной последовательности (3) также известны (см. [8], [9]). Имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned}
 L_n(R \rightarrow \widehat{R}_2) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}^{2^{r-1}+1} \oplus (\mathbb{Z}/2)^2 & \text{при } n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}^{2^{r-1}-1} & \text{при } n = 3 \bmod 4, \end{cases} \\
 L_n(T^+ \rightarrow \widehat{T}_2^+) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 2, 3 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}^{2^{r-1}+3} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{r+3} & \text{при } n = 1 \bmod 4, \end{cases} \\
 L_n(T^- \rightarrow \widehat{T}_2^-) &\cong \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 1, 2 \bmod 4, \\ (\mathbb{Z}/2)^{r-1} \oplus \mathbb{Z}^{2^{r-1}-1} & \text{при } n = 3 \bmod 4, \end{cases} \\
 L_n(R \rightarrow \widehat{R}_2, \text{Id}, 1) &\cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2)^{r-1} & \text{при } n = 0 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+r} & \text{при } n = 1 \bmod 4, \\ 0 & \text{при } n = 2, 3 \bmod 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В диаграммах следующей леммы написаны только ненулевые относительные группы верхней и нижней строки.

ЛЕММА 2. 1) В двустрочной диаграмме (D) относительных групп

$$\begin{array}{ccccccc} L_1(R \rightarrow \widehat{R}_2) & \xrightarrow{i_!} & L_1(T^+ \rightarrow \widehat{T}_2^+) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & L_1(R \rightarrow \widehat{R}_2, \text{Id}, 1) & \xrightarrow{ti_!} & L_3(T^- \rightarrow \widehat{T}_2^-) \\ & & & & & \xrightarrow{i^!} & L_3(R \rightarrow \widehat{R}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & L_0(R \rightarrow \widehat{R}_2, \text{Id}, 1) \end{array}$$

отображение $i_!$ является мономорфизмом с коядром $\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+1}$; отображение $i^!t^{-1}$ имеет коядро $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$, лежащее в подгруппе кручения; отображение $ti_!$ является эпиморфизмом на подгруппу кручения; отображение $i^!$ имеет коядро $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$.

2) В двустрочной диаграмме $(\tilde{D})$ относительных групп

$$\begin{array}{ccccccc} L_3(R \rightarrow \widehat{R}_2) & \xrightarrow{i_!} & L_1(T^- \rightarrow \widehat{T}_2^-) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & L_1(R \rightarrow \widehat{R}_2, \text{Id}, 1) & \xrightarrow{ti_!} & L_1(T^+ \rightarrow \widehat{T}_2^+) \\ & & & & & \xrightarrow{i^!} & L_1(R \rightarrow \widehat{R}_2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & L_0(R \rightarrow \widehat{R}_2, \text{Id}, 1) \end{array}$$

отображение $i_!$ имеет коядро $(\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-1}$; отображение $i^!t^{-1}$ имеет образ $(\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-1}$, лежащий в подгруппе кручения; отображение $ti_!$ имеет образ $(\mathbb{Z}/2)^{r+1} \oplus \mathbb{Z}^2$, являющийся прямым слагаемым; отображение $i^!$ является эпиморфизмом на подгруппу кручения и имеет коядро $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай 1). Согласно [15] (см. также [11]) для любой конечной 2-группы π группа $L_*(\mathbb{Z}\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ изоморфна группе $L_*^S(\mathbb{Z}[1/2]\pi \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_2\pi)$, где $S = 0 \subset K_1$. Группа L^S разлагается в прямую сумму в соответствии с разложением кольца $\mathbb{Z}[1/2]\pi$, и соответственно можно разложить в прямую сумму индуцированное i отображение групповых колец (см. [11], [15]). В рассматриваемом случае двустрочная диаграмма относительных групп разлагается в прямую сумму

а) двух двустрочных диаграмм, соответствующих диагональному вложению

$$\mathbb{Z}[1/2] \rightarrow \mathbb{Z}[1/2] \oplus \mathbb{Z}[1/2],$$

б) $r - 1$ двустрочных диаграмм, соответствующих квадратичным расширениям

$$(\Gamma_k, c, 1) \rightarrow M_2(R_{k-1}, \text{Id}, 1), \quad k = 1, 2, \dots, r - 1$$

(см. [11]), где $\Gamma_k = \mathbb{Z}[1/2][\theta_{k+1}]$, $R_{k+1} = \mathbb{Z}[1/2][\theta_{k+2} + \bar{\theta}_{k+2}]$, c – комплексное сопряжение, θ_m – примитивный корень степени 2^m из 1.

Диаграммы относительных групп для отображений из б) изоморфны двустрочным диаграммам для вложений $(R_{k-1}, \text{Id}, 1) \rightarrow (\Gamma_k, c, 1)$ с точностью до переобозначения отображений (см. [15]). Таким образом, все необходимые диаграммы из а) и б) описаны в работе [11] (это диаграмма $(D4)$ при $N = 1$ и диаграмма $(D3)$ при $N = k$). Непосредственный подсчет доказывает утверждение 1) леммы 2. Случай 2) рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть A – конечная абелева 2-группа и Φ – инволюция на группе A такая, что гомоморфизмы $d^\pm: A \rightarrow A$, заданные формулами $d^+(x) = x\Phi(x)$, $d^-(x) = x(\Phi(x))^{-1}$, имеют образы, являющиеся элементарными 2-группами и прямыми слагаемыми в группе A . Тогда A – элементарная 2-группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого элемента $x \in A$ рассмотрим подгруппу $\rho \subset A$, порожденную элементами x и $\Phi(x)$. Если ρ – циклическая подгруппа, то x и $\Phi(x)$ являются ее образующими, так как Φ – инволюция. Если при этом ρ имеет порядок 2, то x имеет порядок 2. Если ρ имеет порядок больше 2, то $x, \Phi(x) \in \text{Im}(\Phi|_\rho)$. Следовательно, $x\Phi(x) = x(\Phi(x))^{-1} = 1$, так как единственная элементарная 2-группа, являющаяся прямым слагаемым в группе ρ , есть тривиальная группа. Таким образом, $(\Phi(x))^2 = 1$, а это противоречит предположению, что порядок ρ больше 2. Если ρ не является циклической группой, то ее можно записать в виде $\rho_1 \oplus \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 – циклические 2-группы, переставляемые инволюцией. Эти группы имеют образующие x и $\Phi(x)$ соответственно. Следовательно, порядок элемента $x\Phi(x)$ равен порядку группы ρ_1 , совпадающему с порядком группы ρ_2 . По условию порядок элемента $x\Phi(x)$ равен 2, т.е. группы ρ_1, ρ_2 и элемент x имеют порядок 2. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место изоморфизм

$$LN_3(\mathbb{Z}/2^r \rightarrow D_{r+1}^{+, -}) \cong LN_1(\mathbb{Z}/2^r \rightarrow D_{r+1}^{+, +}) \cong (\mathbb{Z}/2)^{2^r + r - 2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точностью до расширения группа $LN_3 = LN_3(\mathbb{Z}/2^r \rightarrow D_{r+1}^{+, -})$ описана в работе [9]. Поэтому нам достаточно доказать, что эта группа элементарна. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} LN_3 & \xrightarrow{ti_!} & L_3(T^-) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & LN_3 \\ \downarrow \text{epi} & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{epi} \\ L_3(\widehat{R}_2, \text{Id}, 1) & \xrightarrow{ti_!} & L_3(\widehat{T}_2^-) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & L_3(\widehat{R}_2, \text{Id}, 1) \end{array},$$

в которой крайние вертикальные отображения лежат в относительной точной последовательности (3) и являются эпиморфизмами согласно [9]. Левое нижнее горизонтальное отображение является эпиморфизмом, а правое нижнее горизонтальное отображение – мономорфизмом, как следует из леммы 1. Среднее вертикальное отображение является изоморфизмом согласно [8]. Композиция верхних горизонтальных отображений есть первый дифференциал в спектральной последовательности хирургии $d_1 = 1 + \Phi$, где Φ – инволюция на группе LN_3 (см. [10]). Так как $L_3(T^-)$ является элементарной 2-группой, образ отображения d_1 в верхней строке диаграммы также является элементарной 2-группой. Группа $L_3(\widehat{R}_2, \text{Id}, 1)$ является элементарной 2-группой. Из рассмотрения правого квадрата диаграммы следует, что образ d_1 является прямым слагаемым.

Аналогично, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} LN_3 & \xrightarrow{ti_!} & L_3(T^+) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & LN_3 \\ \downarrow \text{epi} & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{epi} \\ L_3(\widehat{R}_2, \text{Id}, 1) & \xrightarrow{ti_!} & L_3(\widehat{T}_2^+) & \xrightarrow{i^!t^{-1}} & L_3(\widehat{R}_2, \text{Id}, 1) \end{array},$$

в которой правые горизонтальные отображения имеют изоморфные образы $(\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}}$ по лемме 1. Композиция верхних горизонтальных отображений есть правый дифференциал $1 - \Phi$ в спектральной последовательности хирургии. Из рассмотрения правого квадрата следует, что образ отображения $1 - \Phi$ является элементарной 2-группой и выделяется прямым слагаемым в группе LN_3 . Применение леммы 3 завершает доказательство теоремы 3.

Теперь мы можем вычислить естественные отображения групп Уолла в двустрочной диаграмме (1) для вложений $i: \pi = \mathbb{Z}/2 \rightarrow D_{r+1}^{\pm} = G^{\pm}$. Далее применим эти результаты для вычисления групп $C_n(D_{r+1}, w)$.

Напомним необходимые для вычислений результаты о группах Уолла и группах Брауэра–Ливси (см. [8], [9]). Пусть Σ, Σ' – бесконечные абелевы группы ранга $2^{r-1} - 1$, $2^{r-1} + 3$ соответственно. Имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} L_n(\pi) &\cong \begin{cases} \Sigma \oplus \mathbb{Z}^2 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \Sigma \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ L_n(G^+) &\cong \begin{cases} \Sigma' & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-r} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+2} & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \\ L_n(G^-) &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-1} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \Sigma \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-r} & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Группу $L_n(\mathbb{Z}\pi, \text{Id}, 1) \cong LN_n(\pi \rightarrow G^-) \cong LN_{n+2}(\pi \rightarrow G^+)$ обозначим через LN_n . Тогда $LN_3 \cong (\mathbb{Z}/2)^{2^r+r-2}$ по теореме 3. Согласно [9] группа LN_2 изоморфна $\mathbb{Z}/2$ (Arf-инвариант), и имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow LN_1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}+r} \oplus \mathbb{Z}^2 \longrightarrow LN_0 \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим участок двустрочной диаграммы (1)

$$\begin{array}{ccccc} L_n(\pi) & \xrightarrow{i!} & L_n(G^+) & \xrightarrow{i!t^{-1}} & LN_n \\ \downarrow & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ LN_{n+1} & \xrightarrow{ti!} & L_{n-1}(G^-) & \xrightarrow{i!} & L_{n-1}(\pi) \end{array} \quad (5)$$

для вложения $i: \pi \rightarrow G^+$ и аналогичный участок

$$\begin{array}{ccccc} L_n(\pi) & \xrightarrow{i!} & L_n(G^-) & \xrightarrow{i!t^{-1}} & LN_{n-2} \\ \downarrow & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ LN_{n-1} & \xrightarrow{ti!} & L_{n-1}(G^+) & \xrightarrow{i!} & L_{n-1}(\pi) \end{array} \quad (6)$$

для вложения $i: \pi \rightarrow G^-$.

ТЕОРЕМА 4. 1) В диаграмме (5) отображение $i^!t^{-1}: L_n(G^+) \rightarrow LN_n$ мономорфно при $n \equiv 1 \pmod 4$, тривиально при $n \equiv 2 \pmod 4$, имеет ядро $(\mathbb{Z}/2)^2$ при $n \equiv 3 \pmod 4$, эпиморфно при $n \equiv 0 \pmod 4$.

Отображение $i_!: L_n(\pi) \rightarrow L_n(G^+)$ тривиально при $n \equiv 1 \pmod 4$, мономорфно при $n \equiv 3 \pmod 4$, эпиморфно при $n \equiv 2 \pmod 4$, мономорфно с коядром $\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-r}$ при $n \equiv 0 \pmod 4$.

2) В диаграмме (6) отображение $i^!t^{-1}: L_n(G^-) \rightarrow LN_{n-2}$ мономорфно при $n \equiv 1, 3 \pmod 4$, тривиально при $n \equiv 0 \pmod 4$, эпиморфно при $n \equiv 2 \pmod 4$.

Отображение $i_!: L_n(\pi) \rightarrow L_n(G^-)$ тривиально при $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$ и мономорфно с коядром $\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-r}$ при $n \equiv 2 \pmod 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим только случай 1). Отображение $i_!$ эпиморфно в размерности 2, так как оно сохраняет Arf-инвариант. В размерности 1 оно тривиально, так как $L_1(\pi) = 0$. В этом случае рассмотрим следующий участок диаграммы (1):

$$\mathbb{Z}/2 \cong L_3(\pi) \xrightarrow{i_!} L_3(G^+) \xrightarrow{i^!t^{-1}} LN_3 \xrightarrow{ti_!} L_1(G^-) \longrightarrow 0. \quad (7)$$

Гомологии в члене $L_1(G^-)$ тривиальны, как следует из рассмотрения нижней строки.

Гомологии в члене LN_3 изоморфны гомологиям в члене $\xrightarrow{i^!} L_2(\pi) \xrightarrow{i_!}$ нижней строки диаграммы. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} L_3(T^- \rightarrow \widehat{T}_2^-) & \xrightarrow{i^!} & L_3(R \rightarrow \widehat{R}_2) & \xrightarrow{i_!} & L_3(T^+ \rightarrow \widehat{T}_2^+) \\ \downarrow & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \\ L_2(G^-) & \xrightarrow{i^!} & L_2(\pi) & \xrightarrow{i_!} & L_2(G^+) \end{array},$$

в которой вертикальные отображения являются отображениями из соответствующих относительных точных последовательностей (3). Гомологии в члене $L_3(R \rightarrow \widehat{R}_2)$ равны $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$. Они изоморфно отображаются в гомологии в члене $L_2(\pi)$ нижней строки, так как среднее вертикальное отображение является вложением прямого слагаемого, а правое вертикальное отображение тривиально. Гомологии в члене $L_3(G^+)$ диаграммы (7) изоморфны прямому слагаемому $\mathbb{Z}/2$ группы $L_2(G^-)$ из соответствующей нижней строки, так как в группе LN_0 Arf-инвариант не реализуется, а отображение $L_2(G^-) \xrightarrow{i^!} L_2(\pi)$, лежащее в нижней строке, является мономорфизмом на свободной части по лемме 2. Следовательно, в диаграмме (7)

$$\text{rang}(\text{Im } i^!t^{-1}) = \text{rang } LN_3 - \text{rang } L_1(G^-) - (r-1) = 2^r + r - 2 - (2^{r-1} - 1) - (r-1) = 2^{r-1}.$$

Отсюда немедленно следуют оба утверждения из 1) в размерности 3. Описание отображений $i^!t^{-1}$ в размерностях 1 и 2 не представляет трудностей, так как в диаграмме (D) в этом случае отображение $\mathbb{Z}/2 \cong LN_2 \xrightarrow{ti_!} L_0(G^-) \cong \mathbb{Z}/2$ является изоморфизмом. Для доказательства утверждений в размерности 0 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_1(R \rightarrow \widehat{R}_2) & \xrightarrow{i_!} & L_1(T^+ \rightarrow \widehat{T}_2^+) \\ \downarrow \text{epi} & & \downarrow \text{epi} \\ L_0(\pi) & \xrightarrow{i_!} & L_0(G^+) \end{array},$$

в которой вертикальные отображения лежат в относительных точных последовательностях. Из леммы 2 следует, что верхнее горизонтальное отображение является мономорфизмом. При этом свободная часть переходит в свободную часть с коядром $\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}/2)^{2^{r-1}-r}$. Так как вертикальные отображения являются эпиморфизмами и нижние группы не имеют кручения, нижнее горизонтальное отображение имеет такое же коядро. Таким образом, мы получили описание отображения $i_!$ в размерности 0. Отображение $i^!t^{-1}$ является эпиморфизмом, так как гомологии в члене LN_0 тривиальны. Это следует из мономорфности отображения $i_!: L_3(\pi) \rightarrow L_3(G^+)$, лежащего в другой строке. Случай 2) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты, полученные в теореме 4, позволяют диаграммным поиском вычислить почти все отображения и группы гомологий в двустрочных диаграммах (D) и $(\tilde{D})$ для вложений $\mathbb{Z}/2^r \rightarrow D_{r+1}$, рассматриваемых в работе. Однако, в настоящее время автору неизвестны группы гомологий в члене $L_0(G^+)$ диаграммы (D) и группы гомологий в члене $L_2(G^-)$ диаграммы $(\tilde{D})$. Для ответа на этот вопрос достаточно знать отображения в точной последовательности, связывающей группы LN_0 и LN_1 .

4. Реализуемость замкнутыми многообразиями. Согласно результатам [6] (см. также [2], [16]) элементы группы $L_n(G^+)$, не лежащие в ядре отображения $i^!t^{-1}$ в диаграмме (5), не реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий. Таким образом, $i^!t^{-1}(x)$ при $x \in L_n(G)$ является первым препятствием к реализуемости элемента x нормальным отображением замкнутых многообразий. Пусть для элемента x первое препятствие тривиально, т.е. $i^!t^{-1}(x) = 0$. Используя гомоморфизм Γ в гомологиях из диаграммы (5), можно построить класс $\Gamma(x) \subset L_{n-1}(G^-)$, где отображение $i^!t^{-1}$ лежит в диаграмме (6). Согласно [2] этот смежный класс является вторым препятствием к реализуемости; если $0 \notin \Gamma(x)$, то элемент x не реализуется нормальным отображением замкнутых многообразий. Этих двух инвариантов оказывается достаточно для исследования проблемы реализуемости в проективном варианте (см. [2]). Далее этот процесс можно продолжить и получить итерированные инварианты Браудера–Ливси (см. [16]), но для диэдральных 2-групп в рассматриваемом случае нет такой необходимости. Напомним, что $D_{r+1} = G$ – группа с тривиальным гомоморфизмом ориентации, а $D_{r+1}^- = G^-$ – группа с гомоморфизмом ориентации w , для которого $w(x) = 1$, $w(y) = -1$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место следующие изоморфизмы:*

$$C_n(D_{r+1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ (\mathbb{Z}/2)^2 & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad C_n(D_{r+1}^-) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{при } n \equiv 1, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все необходимые отображения вычислены в теореме 4. Рассмотрим сначала случай нетривиальной ориентации. Отображения $i^!t^{-1}$ в диаграмме (6) являются мономорфизмами в нечетной размерности. Следовательно, все элементы групп $L_{2n+1}(G^-)$ не реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий. Группа $L_0(G^-)$ изоморфна $\mathbb{Z}/2$ и согласно [2] образ группы $C_0(D_{r+1}^-)$ в проективной группе L^p равен $\mathbb{Z}/2$. Отсюда следует утверждение теоремы в случае нетривиальной ориентации.

В случае тривиальной ориентации отображение $i^!t^{-1}$ в диаграмме (5) мономорфно в размерности 1, а в размерности 3 имеет ядро $(\mathbb{Z}/2)^2$. Согласно [2] образ группы $C_3(D_{r+1})$ в проективной группе равен $(\mathbb{Z}/2)^2$. Таким образом, в размерности 3 верхняя и нижняя оценки группы $C_3(D_{r+1})$ совпадают и, следовательно, $C_3(D_{r+1}) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$. В размерности 2 повторяем рассуждения, относящиеся к размерности 0 неориентируемого случая. Теорема доказана.

В размерности 0 в ориентируемом случае из диаграмм (5) и (6) также удастся получить верхнюю оценку $\mathbb{Z}^{r+1}$ на группу $C_0(D_{r+1})$, но она значительно превосходит нижнюю оценку $\mathbb{Z}$ из работы [2]. В размерности 2 в неориентируемом случае ситуация аналогична.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wall C. T. C. *Surgery on Compact Manifolds*. London: Acad. Press, 1970.
- [2] Hambleton I. Projective surgery obstructions // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 967. P. 101–131.
- [3] Hambleton I., Milgram R. J., Taylor L., Williams B. Surgery with finite fundamental group // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1988. V. 56. P. 349–379.
- [4] Morgan R. J. Surgery with finite fundamental group. II. The oozing conjecture // *Pacific J. Math.* 1991. V. 151. P. 117–149.
- [5] Browder W., Livesay R. Fixed point free involutions of homotopy spheres // *Tôhoku J. Math.* (2). 1973. V. 25. P. 69–88.
- [6] Cappell S. E., Shaneson J. L. Pseudo-free actions // *Lecture Notes in Math.* 1979. V. 763. P. 395–447.
- [7] Ranicki A. The L -theory of twisted quadratic extensions // *Canad. J. Math.* 1987. V. 39. P. 345–364.
- [8] Wall C. T. C. On the classification of Hermitian forms. VI. Group rings // *Ann. of Math.* (2). 1976. V. 103. P. 1–80.
- [9] Муранов Ю. В. Когомологии Тейта и группы Браудера–Ливси диэдральных групп // *Матем. заметки*. 1993. Т. 54. № 2. С. 44–55.
- [10] Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф. Спектральная последовательность в теории перестроек // *Матем. сб.* 1992. Т. 183. № 9. С. 3–14.
- [11] Муранов Ю. В. Относительные группы Уолла и декорации // *Матем. сб.* 1994. Т. 185. № 12. С. 79–100.
- [12] Муранов Ю. В. K -группы квадратичных расширений колец // *Матем. заметки*. 1995. Т. 58. № 2. С. 272–280.
- [13] Cavigchioli A., Muranov Y. V., Repovš D. Spectral Sequences in K -Theory for a Twisted Quadratic Extension. Preprint. V. 34: University of Ljubljana, 1996.
- [14] Hambleton I., Ranicki A., Taylor L. Round L -theory // *J. Pure Appl. Algebra*. 1987. V. 47. P. 131–134.
- [15] Hambleton I., Taylor L., Williams B. An introduction to maps between surgery obstruction groups // *Lecture Notes in Math.* 1984. V. 1051. P. 49–127.
- [16] Харшиладзе А. Ф. Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами // *УМН*. 1987. Т. 42. № 4. С. 55–85.