Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Назаренко, Некоторые свойства рациональных аппроксимаций степени $(k, 1)$ в пространстве Харди $H_2(\mathcal{D})$, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 251–259

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:59:36

УДК 517.538.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СТЕПЕНИ $(k, 1)$ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ $H_2(\mathcal{D})$

М. А. Назаренко

Доказано, что известные интерполяционные условия, возникающие при рациональных аппроксимациях со свободными полюсами, не являются достаточными для нахождения рациональной функции наименьшего уклонения. В случае рациональных приближений степени $(k, 1)$ установлена эквивалентность этих интерполяционных условий условиям стационарности точки интерполяции c для функции $\Omega_k(c)$ – квадрата величины уклонения f от подпространства рациональных функций со степенью числителя не выше k и фиксированным полюсом $1/\bar{c}$. При любых натуральных k и s построена функция $g \in H_2(\mathcal{D})$, для которой $R_{k,1}(g) = R_{k+s,1}(g) > 0$, где $R_{k,1}(g)$ есть величина наилучшего приближения g классом рациональных функций степени не выше $(k, 1)$.

Библиография: 7 названий.

Пространство Харди $H_2(\mathcal{D})$ образовано аналитическими функциями в круге $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$, имеющими почти всюду на границе $\partial\mathcal{D} = \{z : |z| = 1\}$ пределы по некасательным путям, с конечной нормой $\|\cdot\|$, порожденной скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} f(z) \overline{g(z)} |dz| = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(z) \overline{g(z)}}{z} dz.$$

Известно, что полиномы z^j при целых неотрицательных j образуют ортонормированный базис в пространстве $H_2(\mathcal{D})$, и для каждого элемента $f \in H_2(\mathcal{D})$ выполнено равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2,$$

где $f_j = (f, z^j) = f^{(j)}(0)/j!$ – коэффициенты степенного ряда

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (1)$$

При каждом целом неотрицательном k через $\mathbf{P}_k$ обозначим пространство полиномов степени не выше k переменного z , а через $\mathbf{R}_{k,1} \subset H_2(\mathcal{D})$ – совокупность рациональных

функций с числителем из $\mathbf{P}_k$ и линейным знаменателем. Величины наилучших приближений функции $f \in H_2(\mathcal{D})$ этими множествами определим равенствами

$$E_k(f) = \inf_{P \in \mathbf{P}_k} \|f - P\|, \quad R_{k,1}(f) = \inf_{r \in \mathbf{R}_{k,1}} \|f - r\|$$

соответственно.

Рассмотрим аппроксимацию подпространством $\mathbf{R}_k(c)$, состоящим из рациональных функций

$$r(z) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j + \frac{az^k}{1 - \bar{c}z} \quad (2)$$

степени $(k, 1)$ с фиксированным знаменателем $1 - \bar{c}z$, где $c \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Для данной функции f обозначим рациональную функцию наилучшего приближения из этого подпространства через $r(k, c)$. Известно [1, с. 273–274], что если рациональная функция r имеет вид (2), то интерполяционные условия

$$f(0) = r(0), \quad f'(0) = r'(0), \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(0) = r^{(k-1)}(0), \quad (3)$$

$$f(c) = r(c) \quad (4)$$

необходимы и достаточны для совпадения r и $r(k, c)$. Если, помимо этого, рациональная функция $r = r(k, c)$ удовлетворяет равенству $\|f - r\| = R_{k,1}(f)$, то справедливо дополнительное условие интерполяции [2], [3]

$$f'(c) = r'(c). \quad (5)$$

Введем удобные для дальнейших рассуждений вспомогательные функции

$$F_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} z^j. \quad (6)$$

Из равенств (3) и (4) получаем следующее представление:

$$r(z; k, c) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^j + \frac{az^k}{1 - \bar{c}z}, \quad (7)$$

$$a = (1 - |c|^2)F_k(c). \quad (8)$$

Через $\Omega_k(c)$ обозначим квадрат величины наименьшего уклонения данной функции f от подпространства $\mathbf{R}_k(c)$.

ЛЕММА 1. При $c \in \mathcal{D}$ выполнено равенство

$$\Omega_k(c) = \|F_k\|^2 - (1 - |c|^2)|F_k(c)|^2. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись равенствами (7) и (8), а также возможностью сокращения сомножителей вида z^k под знаком нормы без изменения ее величины, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Omega_k(c) &= \left\| f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^j - \frac{az^k}{1-\bar{c}z} \right\|^2 = \left\| z^k \left(F_k(z) - \frac{a}{1-\bar{c}z} \right) \right\|^2 = \left\| F_k(z) - \frac{a}{1-\bar{c}z} \right\|^2 \\ &= \|F_k\|^2 - \left(F_k(z), \frac{a}{1-\bar{c}z} \right) - \left(\frac{a}{1-\bar{c}z}, F_k(z) \right) + \left\| \frac{a}{1-\bar{c}z} \right\|^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Легко обосновать вспомогательные равенства

$$\left(F_k(z), \frac{1}{1-\bar{c}z} \right) = F_k(c), \quad \left\| \frac{1}{1-\bar{c}z} \right\|^2 = \frac{1}{1-|c|^2}.$$

Подставляя их в выражение (10), с использованием (8) и свойства скалярного произведения получим (9). Функция Ω_k по непрерывности может быть доопределена при $c = 0$ значением $\Omega_k(0) = \|F_k\|^2 - |f_k|^2 = E_k^2(f)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Положим $E_{-1}(f) = \|f\|$. Тогда для любых $f \in H_2(\mathcal{D})$, $c \in \mathcal{D}$ и произвольного целого неотрицательного k выполнено неравенство

$$\|f - r(k, c)\| \leq E_{k-1}(f).$$

ЛЕММА 2. Пусть $f \in H_2(\mathcal{D}) \setminus \mathbf{P}_{k-1}$. Тогда необходимым и достаточным условием того, что $c \in \mathcal{D}$ – стационарная точка функции Ω_k , является выполнение равенства

$$\overline{F_k(c)} \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^{j-1} (-j + (j+1)|c|^2) = 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стационарные точки функции Ω_k задаются уравнением

$$d\Omega_k(c) \equiv \frac{\partial}{\partial c} \Omega_k(c) dc + \frac{\partial}{\partial \bar{c}} \Omega_k(c) d\bar{c} = 0. \quad (12)$$

Из равенств (6) и (9) несложно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Omega_k(c) &= \|F_k\|^2 - (1-|c|^2) \sum_{s=0}^{\infty} \bar{f}_{k+s} \bar{c}^s \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j \\ &= \|F_k\|^2 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{f}_{k+s} f_{k+j} (\bar{c}^s c^j - \bar{c}^{s+1} c^{j+1}).\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial c} \Omega_k(c) &= \frac{\partial}{\partial c} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{f}_{k+s} f_{k+j} (-\bar{c}^s c^j + \bar{c}^{s+1} c^{j+1}) \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{f}_{k+s} f_{k+j} (-j \bar{c}^s c^{j-1} + (j+1) \bar{c}^{s+1} c^j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{f}_{k+s} \bar{c}^s f_{k+j} c^{j-1} (-j + (j+1)|c|^2) \\
 &= \overline{F_k(c)} \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^{j-1} (-j + (j+1)|c|^2). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Несложно видеть, что

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{c}} \Omega_k(c) \right)} = \frac{\partial}{\partial c} \Omega_k(c).$$

Значит, уравнение (12) эквивалентно соотношению

$$\frac{\partial}{\partial c} \Omega_k(c) = 0. \tag{14}$$

В силу равенств (13) и (14) получаем (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть k – любое натуральное число, $f \in H_2(\mathcal{D}) \setminus \mathbf{P}_{k-1}$. Тогда выполнено неравенство

$$E_{k-1}(f) > R_{k,1}(f). \tag{15}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция f задана рядом (1), $P \in \mathbf{P}_{k-1}$, $\|f - P\| = E_{k-1}(f)$. Тогда в силу свойств гильбертова пространства $H_2(\mathcal{D})$ выполнены равенства

$$P(z) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^j, \quad f(z) - P(z) = z^k F_k(z).$$

Если предположить, что $\|f - P\| = R_{k,1}(f)$, то для любого $c \in \mathcal{D}$ имеет место соотношение ортогональности

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} (f(z) - P(z)) \overline{\left(\frac{z^k}{1 - \bar{c}z} \right)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{F_k(z)}{z - c} dz = F_k(c).$$

В силу произвольности $c \in \mathcal{D}$ получаем тождество $F_k \equiv 0$, значит $f \in \mathbf{P}_{k-1}$. Лемма доказана.

Соотношение (9) для функции Ω_k используется при изучении аппроксимаций в $H_2(\mathcal{D})$ рациональными функциями с одним свободным полюсом. Следующие утверждения дают необходимые условия на параметр c , реализующий равенство $\Omega_k(c) = R_{k,1}^2(f)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – любое натуральное число, $f \in H_2(\mathcal{D})$. Тогда лежащий в конечной плоскости полюс $b := 1/\bar{c}$ рациональной функции наилучшего приближения f из класса $\mathbf{R}_{k,1}$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^{j-1} (-j + (j+1)|c|^2) = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\|f - \rho\| = R_{k,1}(f)$ и $\rho \in \mathbf{R}_{k,1} \setminus \mathbf{P}_k$. Пусть $1/\bar{c}$ – полюс рациональной функции ρ . Тогда в точке $c \in \mathcal{D}$ функция Ω_k имеет минимум, значит выполнено равенство (11). Если $F_k(c) = 0$, то в силу (9) получаем, что $\Omega_k(c) = E_{k-1}^2(f) = R_{k,1}^2(f)$, а это противоречит соотношению (15). Следовательно, выполнено условие (16). Теорема доказана.

Применим теорему 1 для определения рациональных функций наименьшего уклонения степени $(k, 1)$ от мономов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $n > k \geq 0$. Тогда для всех $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} R_{k,1}(z^n) &= \sqrt{1 - \frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+1}}} \\ &= \left\| z^n - \sqrt{\frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+1}}} \frac{e^{i(n-k)\theta} z^k}{\sqrt{n-k+1 - e^{-i\theta} \sqrt{n-k} z}} \right\|. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением (16) для определения стационарных точек функции Ω_k :

$$c^{n-k-1} (-(n-k) + (n-k+1)|c|^2) = 0, \quad |c|^2 = \frac{n-k}{n-k+1}. \quad (17)$$

Найдем $\Omega_k(e^{i\theta}|c|)$ при полученном значении $|c|$. Учитывая, что в силу (9) $\Omega_k(0) = 1$, получаем

$$\Omega_k\left(e^{i\theta} \sqrt{\frac{n-k}{n-k+1}}\right) = 1 - \frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+1}} = R_{k,1}^2(f).$$

Для расчета коэффициентов рациональной функции наилучшего приближения используем условие первой интерполяции, выраженное в формуле (8), при $c = e^{i\theta}|c|$:

$$a = \frac{1}{n-k+1} \left(\sqrt{\frac{n-k}{n-k+1}} e^{i\theta} \right)^{n-k} = \sqrt{\frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+2}}} e^{i(n-k)\theta}. \quad (18)$$

Рациональные функции наилучшего приближения степени $(k, 1)$ в силу (7) имеют вид

$$r\left(z; k, e^{i\theta} \sqrt{\frac{n-k}{n-k+1}}\right) = \sqrt{\frac{(n-k)^{n-k}}{(n-k+1)^{n-k+1}}} \frac{e^{i(n-k)\theta} z^k}{\sqrt{n-k+1 - e^{-i\theta} \sqrt{n-k} z}}. \quad (19)$$

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неединственность рациональной функции наилучшего приближения в пространствах L_p , $p > 1$, была доказана в [4]. В работе [5] предложен метод построения функций $f \in L_2[a, b]$, имеющих любое заданное число наилучших L_2 -аппроксимаций из однопараметрических семейств

$$\{e^{\beta x} : \beta \in (-\infty, \infty), x \in [0, 1]\}, \quad \left\{ \frac{1}{1 - \beta x} : \beta \in (-1, 1), x \in [-1, 1] \right\}.$$

Точное доказательство авторы не приводят, но при $N = 3$ и $N = 5$ предложенное утверждение подтверждает численный эксперимент, проведенный с высокой точностью на ЭВМ. В работе [5] имеется исторический обзор. В следствии 2 аналитически показано, что в пространстве $H_2(\mathcal{D})$ рациональная функция наилучшего приближения не единственна и даже полюса этих функций на плоскости образуют окружность.

Идея применения условий интерполяции для поиска рациональной функции наилучшего приближения со свободными полюсами получила свое развитие, например, в работах [2] и [3]. Следующее утверждение устанавливает эквивалентность интерполяционных условий (3)–(5) и условий стационарности функции Ω_k в точке c .

ТЕОРЕМА 2. *Зафиксируем $f \in H_2(\mathcal{D})$ и натуральное число k . Если существуют точка $c \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ и элемент $r \in \mathbf{R}_{k,1}$, удовлетворяющий равенствам (3)–(5), то выполнено (11). Обратно, если число $c \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ удовлетворяет соотношению (11), то для рациональной функции (7), (8) выполнены условия (3)–(5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда рациональная функция r определяется равенством (7), а ее коэффициент a задается равенством (8). Если $a = 0$, то $F_k(c) = 0$, и выполняется (11). В случае $a \neq 0$ запишем равенство (4) в развернутом виде

$$\sum_{j=0}^{k-1} f_j c^j + a \frac{c^k}{1 - |c|^2} = r(c) = f(c) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j c^j + c^k \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j,$$

которое при $c \neq 0$ эквивалентно соотношению

$$a = (1 - |c|^2) \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j.$$

Интерполяционное условие (5)

$$\sum_{j=0}^{k-1} j f_j c^{j-1} + a c^{k-1} \frac{k + (k-1)|c|^2}{(1 - |c|^2)^2} = r'(c) = f'(c) = \sum_{j=0}^{k-1} j f_j c^{j-1} + c^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} (k+j) f_{k+j} c^j$$

при $c \neq 0$ эквивалентно равенству

$$a = \frac{(1 - |c|^2)^2}{k + (1 - k)|c|^2} \sum_{j=0}^{\infty} (k+j) f_{k+j} c^j.$$

Приравняем полученные выражения для коэффициента a . Тогда имеем

$$(k + (1 - k)|c|^2) \sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j = (1 - |c|^2) \sum_{j=0}^{\infty} (k + j) f_{k+j} c^j.$$

Приведение подобных слагаемых дает соотношение

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j (-k - (1 - k)|c|^2 + (k + j) - (k + j)|c|^2) = 0.$$

Сокращение взаимнообратных выражений приводит к окончательному результату

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{k+j} c^j (j - (j + 1)|c|^2) = 0.$$

По условию теоремы $c \neq 0$, следовательно, все изложенные рассуждения обратимы. Теорема полностью доказана.

Убедимся, что интерполяционные условия (3)–(5) не являются достаточными для определения рациональной функции наименьшего уклонения из класса $\mathbf{R}_{k,1}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого натурального k существует функция $f \in H_2(\mathcal{D})$ и рациональная функция r степени $(k, 1)$, интерполирующая f в нуле с кратностью k и в точке, инверсной собственному полюсу, дважды, но не являющаяся рациональной функцией наилучшего приближения степени $(k, 1)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Другими словами, утверждается существование $f \in H_2(\mathcal{D})$ и рациональной функции степени $(k, 1)$ вида (7) таких, что условие (16) выполнено, но $\Omega_k(c) > R_{k,1}^2(f)$. Фактически в теореме доказано более сильное неравенство $\Omega_k(c) > E_k^2(f)$, т.е. приближение функции f подпространством рациональных функций $\mathbf{R}_k(c)$ хуже, чем пространством полиномов $\mathbf{P}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим функцию $f(z) = z^k + 2z^{k+1}$. Соотношение (16) для этой функции имеет вид

$$\bar{c} + 2(-1 + 2|c|^2) = 0 \implies \bar{c} = 2 - 4|c|^2.$$

Следовательно, c является вещественным числом. Вычислим корни этого уравнения:

$$4c^2 + c - 2 = 0 \implies c = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \in \mathcal{D}.$$

Рассмотрим значения функции Ω_k , выраженной формулой (9), в обоих случаях:

$$\begin{aligned} \Omega_k\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) &= \|F_k\|^2 - \frac{207 + 33\sqrt{33}}{256} < E_k^2(f), \\ \Omega_k\left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{8}\right) &= \|F_k\|^2 - \frac{207 - 33\sqrt{33}}{256} > E_k^2(f). \end{aligned}$$

Теперь опишем рациональную функцию $r(k, c)$, осуществляющую наилучшее приближение в подпространстве рациональных функций, при фиксированном $c = -(1 + \sqrt{33})/8$. По формуле (8)

$$a = \frac{39 - 9\sqrt{33}}{64},$$

а по формуле (7)

$$r\left(z; k, -\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right) = \frac{39 - 9\sqrt{33}}{8} \frac{z^k}{8 + (1 + \sqrt{33})z}.$$

Доказательство теоремы полностью завершено.

Составим таблицу $\{R_{n,m}(f)\}$ из величин наименьших уклонений $f \in H_2(\mathcal{D})$ от рациональных функций степени не выше (n, m) в пространстве $H_2(\mathcal{D})$. Известно, что элементы $R_{n,0}(f) = E_n(f)$, образующие нулевую строку, могут быть членами любой невозрастающей стремящейся к 0 последовательности. Из результатов работы [3] следует, что главная диагональ $\{R_{n,n}(f)\}$ должна строго убывать, если f не является рациональной функцией (этот факт впервые был отмечен в работе [6] при рациональных аппроксимациях в $L_2[a, b]$). В заключительной части работы [7] показано существование при любом наперед заданном натуральном k функций $f \in H_2(\mathcal{D})$, для которых выполнены соотношения $E_k(f) = R_{k,1}(f) > 0$, т.е. обоснована неулучшаемость аппроксимации при увеличении степени знаменателя. В следующей теореме доказано существование функций, у которых в первой строке таблицы $\{R_{n,m}(f)\}$ существуют два равных элемента, удаленные друг от друга на отрезок произвольной наперед заданной длины.

ТЕОРЕМА 4. *При любых натуральных k и s существует $g \in H_2(\mathcal{D}) \setminus \mathbf{R}_{k+s,1}$ такая, что выполнены соотношения*

$$R_{k,1}(g) = R_{k+1,1}(g) = \dots = R_{k+s,1}(g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{z^{k+s+1}}{\sqrt{2^{s-3}}}. \quad (20)$$

Обозначим рациональную функцию наилучшего приближения степени $(k + s, 1)$ для функции (20) через r . Воспользуемся интерполяционными свойствами (3). Тогда

$$r(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{bz^{k+s}}{1 - \bar{c}z}, \quad (21)$$

значит

$$\|g - r\| = \left\| \frac{z^{k+s+1}}{\sqrt{2^{s-3}}} - \frac{bz^{k+s}}{1 - \bar{c}z} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2^{s-3}}} \left\| z - \frac{\sqrt{2^{s-3}}b}{1 - \bar{c}z} \right\|.$$

В следствии 2 приведен общий вид (19) рациональных функций наилучшего приближения для мономов. Они образуют целое семейство, определяемое тем, что величина

модуля точки полюса есть некоторая постоянная, а коэффициент в числителе определяется из интерполяционных свойств (4). В нашем случае $k = 0$, $n = 1$. Из уравнения (17) получаем $|c|^2 = 1/2$. Рассмотрим одну из функций (19), а именно, такую, что $c = 1/\sqrt{2}$. Уравнение (18) дает равенство

$$b = \frac{1}{\sqrt{2^s}}.$$

Учитывая это равенство, преобразуем функцию (21) при $c = 1/\sqrt{2}$:

$$r(z) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{z^{k+j}}{\sqrt{2^j}} + \frac{1}{\sqrt{2^s}} \frac{z^{k+s}}{1 - z/\sqrt{2}} = \frac{z^k}{1 - z/\sqrt{2}} \in \mathbf{R}_{k,1}. \quad (22)$$

Таким образом, получаем соотношения

$$\|g - r\| \geq R_{k,1}(g) \geq R_{k+s,1}(g) = \|g - r\|,$$

где в первом неравенстве для функции r использовано представление (22), а в последнем равенстве – (21). Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.С. Вячеславу, Е.П. Долженко и В.Г. Зинову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
- [2] Ерохин В. Д. О наилучшем приближении аналитических функций посредством рациональных дробей со свободными полюсами // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 1. С. 29–32.
- [3] Левин А. Л. Расположение полюсов рациональных функций наилучшего приближения и смежные вопросы // Матем. сб. 1969. Т. 80. № 2. С. 281–289.
- [4] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 3. С. 522–524.
- [5] Akhlaghi M., Wolfe J. M. Functions with many best L_2 -approximations // J. Approx. Theory. 1981. V. 33. № 2. P. 111–118.
- [6] Cheney E. W., Goldstein A. A. Mean-square approximation by generalized rational functions // Math. Z. 1967. V. 95. P. 232–241.
- [7] Nazarenko M. A. Relations between Rational and Polynomial Approximations in the Banach Spaces. Preprint E5-94-145. Dubna: ОИЯИ, 1994.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: nazaren@nusun.jinr.ru

Поступило
30.01.95
Исправленный вариант
26.05.97