Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Покровский, Теоремы о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 260–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1394>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:36:24

УДК 517.956

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. В. Покровский

Рассматриваются теоремы типа теорем о среднем для решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и нулевой правой частью, удовлетворяющих следующему условию однородности относительно заданного вектора M с натуральными компонентами: для каждой частной производной, входящей в рассматриваемое уравнение, скалярное произведение вектора, составленного из порядков этой производной по каждому переменному, на вектор M не зависит от этой производной. Основным результатом работы является обобщение известной теоремы Зальцмана. Приводятся следствия.

Библиография: 11 названий.

Введение. Пусть μ – комплексная борелевская мера с носителем на шаре $B := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $n \geq 1$, F_μ – функционал, порожденный мерой μ в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:

$$F_\mu(\varphi) = \int \varphi(t) d\mu(t)$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В работе Л. Зальцмана [1] рассматривались функции f , непрерывные в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие равенству

$$\int f(x + rt) d\mu(t) = 0$$

при всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $\{x + rt : t \in B\} \subset G$. Зальцман показал, что множество всех таких функций f совпадает с множеством всех непрерывных слабых решений в G некоторой системы, состоящей из конечного числа линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящих только от меры μ . Для сведения этой системы к одному дифференциальному уравнению $P(D)f = 0$ необходимо и достаточно [1], чтобы оператор $P(D)$ был однородным (т.е. содержал частные производные только одного порядка), а функционал F_μ имел вид $F_\mu = P(D)T$, где T – некоторое распределение с носителем на B , $\hat{T}(0) \neq 0$ ($\hat{T}$ – преобразование Фурье–Лапласа

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01366.

распределения T). Этот результат Зальцмана представляет собой весьма общую теорему типа теорем о среднем для решений однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. С другой стороны, были известны конкретные теоремы о среднем для решений уравнения теплопроводности, неоднородного в указанном выше смысле (см. [2], [3]). В настоящей работе мы, следуя подходу Зальцмана, распространим его результат на более широкий класс дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, который, в частности, содержит оператор теплопроводности. Отметим, что мы имеем в виду приложения полученных результатов к исследованию некоторых функциональных классов, возникающих в теории особых точек решений линейных дифференциальных уравнений с частными производными, и планируем посвятить этому отдельную работу.

1. Определения и предварительные сведения. Прежде всего подчеркнем, что на протяжении всей работы нами рассматриваются только дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и нулевой правой частью, и, говоря об однородности такого уравнения, мы имеем в виду, что дифференциальный оператор, стоящий в левой части, однороден, т.е. содержит частные производные только одного порядка.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Как обычно, $C^m(G)$ – пространство всех комплекснозначных функций φ , имеющих непрерывные частные производные всех порядков $\leq m$ в G , $m \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$; $C^\infty(G) := \bigcap_{m \geq 0} C^m(G)$, $C(G) := C^0(G)$. Для замкнутой области $\overline{G}$ через $C^m(\overline{G})$, $m \in \mathbb{N}_0$, обозначим множество всех функций $f \in C^m(G)$, все частные производные которых порядка $\leq m$ допускают непрерывное продолжение на $\overline{G}$; $C^\infty(\overline{G}) := \bigcap_{m \geq 0} C^m(\overline{G})$. Через $C_0^\infty(G)$ (соответственно $C_0^\infty(\overline{G})$) обозначим множество всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, носитель которых $\text{supp } \varphi$ есть компакт, принадлежащий области G (замкнутой области $\overline{G}$). Как обычно, если $1 \leq p \leq \infty$, то $L_p(G)$ – линейное пространство всех функций f , интегрируемых по Лебегу в степени p (существенно ограниченных при $p = \infty$) в области G , с обычной нормой, которая обозначается через $\|\cdot\|_{p,G}$. В случае $G = \mathbb{R}^n$ эта норма обозначается через $\|\cdot\|_p$.

Для произвольного мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ положим

$$\partial^{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{k_n}, \quad D^{\mathbf{k}} = (-i)^{|\mathbf{k}|} \partial^{\mathbf{k}}, \quad |\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n.$$

Пусть $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $|\mathbf{M}| = M_1 + \cdots + M_n$. Сопоставим каждому полиному $P(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, дифференциальный оператор $P(D)$, полученный заменой z_k на

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

при каждом $k = 1, \dots, n$. Полином $P(\mathbf{z})$ (оператор $P(D)$) называется $\mathbf{M}$ -однородным, если существует $l \in \mathbb{N}_0$ такое, что $P(\mathbf{z}) \equiv \sum a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$, где сумма берется по множеству всех мультииндексов $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ таких, что $|\mathbf{kM}| := k_1 M_1 + \cdots + k_n M_n = l$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$. Для любого (необязательно $\mathbf{M}$ -однородного) полинома

$$P(\mathbf{z}) \equiv \sum a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \neq 0$$

через $\deg_{\mathbf{M}} P$ обозначим величину $\sup |\mathbf{kM}|$, где супремум берется по всем мультииндексам $\mathbf{k}$ с $a_{\mathbf{k}} \neq 0$. Если $P(z) \equiv 0$, то $\deg_{\mathbf{M}} P := 0$. При $\mathbf{M} = (1, \dots, 1)$ вместо $\deg_{\mathbf{M}} P$ будем использовать обозначение $\deg P$. При всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ через $B_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, r)$ обозначим множество $\{\mathbf{x} + r\mathbf{M}\mathbf{t} : \mathbf{t} \in B\}$, которое назовем замкнутым $\mathbf{M}$ -шаром. Если $\mathbf{M} = (1, \dots, 1)$, то будем использовать обозначение $B(\mathbf{x}, r)$.

Далее приводятся известные определения и результаты из теории линейных дифференциальных операторов с частными производными. Большинство из них взято из [4] и [5].

Как обычно, $\mathcal{D}'(G)$ – пространство всех распределений в области G ; $\mathcal{E}'(G)$ – пространство всех распределений в G , носитель которых компактен в этой области. Каждая локально интегрируемая в G функция f , как известно, порождает распределение, действие которого на произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ есть $\int f\varphi dx$, а каждая комплексная борелевская мера μ в $\mathbb{R}^n$ порождает распределение, действующее на произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ как $\int \varphi d\mu$, которое мы будем обозначать через F_μ . Мы будем в дальнейшем говорить, что распределение является функцией или мерой, если оно порождается соответственно локально интегрируемой функцией или комплексной борелевской мерой в указанном выше смысле. Через δ обозначим меру Дирака – единичную меру, сосредоточенную в начале координат.

Для заданных $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in C_0^\infty(G)$ свертка $u * \varphi$ есть функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, определяемая формулой $u * \varphi(\mathbf{x}) = u(\varphi(\mathbf{x} - \cdot))$, где $u(\varphi(\mathbf{x} - \cdot))$ обозначает действие u на функцию $\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, рассматриваемую как функция от $\mathbf{y}$. Если $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и при этом одно из этих распределений имеет компактный носитель, то существует единственное распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, при котором $u_1 * (u_2 * \varphi) = u * \varphi$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Это распределение называется *сверткой* u_1 и u_2 и обозначается через $u_1 * u_2$. В частности, *свертка двух комплексных борелевских мер* μ_1 и μ_2 , сосредоточенных на компактах K_1 и K_2 соответственно, есть комплексная борелевская мера μ , сосредоточенная на компакте $K_1 + K_2 := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in K_1, \mathbf{y} \in K_2\}$ такая, что

$$\int \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d\mu_1(\mathbf{x}) d\mu_2(\mathbf{y}) = \int \varphi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Любой линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)$ определяет отображение $\mathcal{D}'(G)$ в себя: $(P(D)u)(\varphi) = u(P(-D)\varphi)$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Если $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то $P(D)(u_1 * u_2) = (P(D)u_1) * u_2 = u_1 * (P(D)u_2)$.

Если $u, f \in \mathcal{D}'(G)$, $P(D)u = f$, то говорят, что u является *слабым* (или *обобщенным*) *решением уравнения* $P(D)g = f$ в G . Если $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – обобщенное решение уравнения $P(D)g = F_\delta$, то E называется *фундаментальным решением оператора* $P(D)$. Для каждого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D)$ фундаментальное решение всегда существует. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)$ называется *гипоэллиптическим*, если для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и для любой функции $f \in C^\infty(G)$ каждое обобщенное решение уравнения $P(D)g = f$ в G является функцией класса $C^\infty(G)$. Это равносильно тому, что оператор $P(D)$ имеет фундаментальное решение, ограничение которого на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ есть функция класса C^∞ . Из приведенного определения легко вытекает, что

если оператор $P(D)$ гипоеллиптичен, то оператор $P(-D)$ также гипоеллиптичен. Существуют просто формулируемые условия на полином $P = P(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, необходимые и достаточные для того, чтобы соответствующий ему оператор $P(D)$ был гипоеллиптическим. Приведем одно из них (см. [5, с. 75]): расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$ стремится к ∞ при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, в частности, что если оператор $P(D)$ гипоеллиптичен, то таковым является и каждый оператор $(P(D))^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Преобразованием Фурье–Лапласа распределения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ называется функция

$$\hat{u}(z) := u(e^{-i(z \cdot x)}), \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ (z \cdot x) := z_1 x_1 + \dots + z_n x_n,$$

где распределение u действует на функцию $e^{-(z \cdot x)}$ по x . В частности, для комплексной борелевской меры μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$

$$\hat{F}_\mu(z) = \int e^{-i(z \cdot x)} d\mu(x).$$

Функция $\hat{F}_\mu(z)$ называется преобразованием Фурье–Лапласа меры μ и обозначается через $\hat{\mu}(z)$. Хорошо известно, что для каждого распределения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ его преобразование Фурье–Лапласа является целой функцией экспоненциального типа. Если $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $T(z)$ и $Q(z)$ – преобразования Фурье–Лапласа u и $P(D)u$ соответственно, то $Q(z) \equiv P(z)T(z)$.

ТЕОРЕМА А [4, теорема 7.3.2]. Пусть $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Уравнение $P(D)g = f$ имеет обобщенное решение $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}(\zeta)/P(\zeta)$ – целая функция. В этом случае решение однозначно определено и замыкание выпуклой оболочки носителя распределения u совпадает с замыканием выпуклой оболочки носителя распределения f .

Отметим, что в формулировке теоремы 7.3.2 в [4] имеется явная опечатка: вместо фразы “... $\hat{f}(\zeta) \cdot P(\zeta)$ – целая функция” должно быть “... $\hat{f}(\zeta)/P(\zeta)$ – целая функция”.

Пусть заданы полиномы P_k , $k \in \mathbb{N}_0$. Если функция u удовлетворяет в $\mathbb{R}^n$ равенству $P_k(D)u = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ и

$$u(x) \equiv g(x)e^{-i(z \cdot x)} \quad (1)$$

для некоторого полинома $g(x)$ и для некоторого $z \in \mathbb{C}^n$, то u называется экспоненциальным решением системы $P_k(D)f = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

ЛЕММА А [4, лемма 7.3.7]. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Если распределение $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ таково, что для каждого экспоненциального решения u уравнения $P(D)f = 0$ выполнено равенство $\nu(u) = 0$, то $\hat{\nu}(z)/P(-z)$ – целая функция.

ТЕОРЕМА Б [6, теорема 7.6.14]. Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $P_k(D)$, $k = 0, 1, \dots, q$, $q \in \mathbb{N}_0$, – конечный набор линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Тогда каждая функция $u \in C(G)$, являющаяся в G слабым решением системы $P_k(D)f = 0$, $k = 0, 1, \dots, q$, есть предел некоторой последовательности конечных линейных комбинаций экспоненциальных решений этой системы, равномерно сходящейся на компактах из G .

2. Системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными, определяемые обобщенным свойством среднего значения. Пусть $M = (M_1, \dots, M_n)$ – вектор с натуральными компонентами, μ – комплексная борелевская мера с носителем на шаре B , G – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Непрерывную в G функцию u будем называть (M, μ) -функцией в G , если

$$\int u(x + r^M t) d\mu(t) = 0 \quad (2)$$

для всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $B_M(x, r) \subset G$.

ТЕОРЕМА 1. Для каждой комплексной борелевской меры μ с носителем на шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, существует последовательность полиномов $\{P_j(z)\}_{j=0}^\infty$, $z \in \mathbb{C}^n$, со свойствами:

- 1) при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ $P_j(z)$ – либо M -однородный полином, $\deg_M P_j = j$, либо $P_j(z) \equiv 0$;
- 2) для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ любая функция $u \in C(G)$ является в G (M, μ) -функцией тогда и только тогда, когда она есть слабое решение в G системы $P_j(D)f = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана комплексная борелевская мера μ с носителем на B . Предположим сначала, что u есть (M, μ) -функция в $\mathbb{R}^n$ вида (1). Фиксируя точку $x \in \mathbb{R}^n$ и разлагая функцию u в ряд Тейлора с центром в x , а затем группируя этот ряд по M -однородным полиномам, получим

$$u(x + y) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(y), \quad (3)$$

где

$$Q_j(y) = \sum_{|k|_M=j} (k!)^{-1} \partial^k u(x) y^k, \quad k! := k_1! k_2! \dots k_n!, \quad y^k = y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n},$$

при этом ряд в правой части (3) сходится к $u(x + y)$ равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольным образом $r > 0$ и положим в (3) $y = r^M t$. Интегрируя почленно обе части полученного равенства по мере μ , что законно в силу равномерной сходимости ряда из (3), получаем

$$\int u(x + r^M t) d\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int Q_j(r^M t) d\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j (P_j(D)u)(x), \quad (4)$$

где

$$P_j(z) \equiv \sum_{|\mathbf{kM}|=j} (\mathbf{k}!)^{-1} (iz)^{\mathbf{k}} \int \mathbf{t}^{\mathbf{k}} d\mu(\mathbf{t}), \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (5)$$

Поскольку u есть $(\mathbf{M}, \mu)$ -функция в $\mathbb{R}^n$, в силу произвола в выборе $\mathbf{x}$ и r из (4) вытекает, что $P_j(D)u(\mathbf{x}) \equiv 0$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что последовательность полиномов $\{P_j(z)\}_{j=0}^\infty$, определенных формулой (5), удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть G – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем каким-либо образом функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ и $\mathbf{M}$ -шар $B_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, r) \subset G$, $r > 0$. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме при каждом $l \in \mathbb{N}_0$ и при всех $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{M}}(0, r)$ имеем равенство

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{|\mathbf{k}| < l} (\mathbf{k}!)^{-1} \partial^{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{y}^{\mathbf{k}} + l \int_0^1 (1-s)^{l-1} \left(\sum_{|\mathbf{k}|=l} (\mathbf{k}!)^{-1} \partial^{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x} + s\mathbf{y}) \mathbf{y}^{\mathbf{k}} \right) ds.$$

Полагая $\mathbf{y} = -r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}$, $\mathbf{t} \in B$, и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$\varphi(\mathbf{x} - r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^p r^j \left(\sum_{|\mathbf{kM}|=j} (-1)^{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}!)^{-1} \partial^{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \right) + R_p(r, \mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (6)$$

где $p = p(l) \in \mathbb{N}_0$ – наибольшее число, при котором для любого мультииндекса $\mathbf{k}$ из $|\mathbf{kM}| \leq p$ вытекает, что $|\mathbf{k}| < l$; $R_p(r, \mathbf{x}, \mathbf{t}) = o(r^p)$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $\mathbf{x} \in \text{supp } \varphi$ и $\mathbf{t} \in B$. Ясно, что на самом деле (6) выполняется при каждом $p \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя обе части (6) по мере μ , получаем

$$\int \varphi(\mathbf{x} - r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^p r^j \left(\sum_{|\mathbf{kM}|=j} (-1)^{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}!)^{-1} \partial^{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{x}) \int \mathbf{t}^{\mathbf{k}} d\mu(\mathbf{t}) \right) + W_p(r, \mathbf{x})$$

или

$$\int \varphi(\mathbf{x} - r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) = \sum_{j=0}^p r^j (P_j(-D)\varphi)(\mathbf{x}) + W_p(r, \mathbf{x}), \quad (7)$$

где

$$P_j(-D) = \sum_{|\mathbf{kM}|=j} (-1)^{|\mathbf{k}|} (\mathbf{k}!)^{-1} (iD)^{\mathbf{k}} \int \mathbf{t}^{\mathbf{k}} d\mu(\mathbf{t}),$$

$W_p(r, \mathbf{x}) = o(r^p)$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $\mathbf{x} \in \text{supp } \varphi$.

Пусть теперь непрерывная в G функция u является в этой области $(\mathbf{M}, \mu)$ -функцией, т.е. для всех $\mathbf{x} \in G$ и $r > 0$ таких, что $B_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, r) \subset G$, выполнено равенство (2). Умножая это равенство на $\varphi(\mathbf{x})$ и интегрируя по мере Лебега в G , получаем (при достаточно малых r)

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left(\int u(\mathbf{x} + r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \right) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int u(\mathbf{x}) \left(\int \varphi(\mathbf{x} - r^{\mathbf{M}}\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int \left(u(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=0}^p r^j (P_j(-D)\varphi)(\mathbf{x}) \right) + W_p(r, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{j=0}^p r^j \left(\int u(\mathbf{x}) (P_j(-D)\varphi)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) + o(r^p), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8)$$

(Мы последовательно сделали замены $y = x + r^M t$ и $x = y$, воспользовались теоремой Фубини и равенством (7), а также тем, что $W_p(r, x) = o(r^p)$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $x \in \text{supp } \varphi$.) Предположим, что хотя бы один из полиномов (5) не равен тождественно нулю. Тогда, полагая p в (8) наименьшим целым неотрицательным числом, при котором $P_p(z) \neq 0$, затем, поделив последнюю строчку (8) на r^p и устремив r к 0, мы получим, что $\int u(x)(P_p(-D)\varphi)(x) dx = 0$. Отсюда по индукции следует, что $\int u(x)(P_j(-D)\varphi)(x) dx = 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_0$. Если все полиномы в (5) равны тождественно нулю, то последнее утверждение очевидно. В наших рассуждениях функция $\varphi \in C_0^\infty(G)$ может быть фиксирована произвольным образом, значит u является в G слабым решением системы

$$P_j(D)f = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Обратно, пусть непрерывная в G функция u является в этой области слабым решением системы (9). Мы хотим показать, что u есть (M, μ) -функция в G . Полиномы $P_j(z)$, $j \in \mathbb{N}_0$, порождают идеал $\mathfrak{U}$ в кольце всех многочленов от n переменных над полем $\mathbb{C}$. По теореме Гильберта о базисе (см. [7, с. 421–423]) идеал $\mathfrak{U}$ конечно порожден, следовательно, существует $q \in \mathbb{N}_0$ такое, что каждый полином $L \in \mathfrak{U}$ представим в виде $L = \sum_{j=0}^q L_j P_j$ с некоторыми полиномами L_j , $j = 0, 1, \dots, q$. Это означает, что система (9) эквивалентна системе дифференциальных уравнений $P_k(D)f = 0$, $k = 0, 1, \dots, q$. Отсюда и из теоремы Б следует, что для доказательства того, что u есть (M, μ) -функция в G , можно, не теряя общности, считать, что $G = \mathbb{R}^n$ и u – экспоненциальное решение системы $P_k(D)f = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Возьмем произвольно M -шар $B_M(x, r) \subset \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Тогда функция $u(x + y)$, $y \in B_M(0, r)$, разлагается в ряд (3), сходящийся к $u(x + y)$ равномерно на $B_M(0, r)$, и замена $y = r^M t$ с почленным интегрированием полученного ряда (см. формулу (4)) дает равенство (2). Таким образом, u есть (M, μ) -функция в $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

3. Теорема о среднем для слабых решений M -однородных линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Пусть $M = (M_1, \dots, M_n)$ – тот же вектор, что и выше, μ – комплексная борелевская мера с носителем на единичном шаре B , $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Будем говорить, что мера μ и (целочисленный) вектор M характеризуют решения уравнения $P(D)f = 0$, если для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и любой функции $u \in C(G)$ эквивалентны следующие условия:

- а) u есть (M, μ) -функция в G ;
- б) u – слабое решение уравнения $P(D)f = 0$ в G .

В принятых обозначениях имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы мера μ и вектор M характеризовали решения уравнения $P(D)f = 0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $P(D)$ был M -однородным, а $F_\mu = P(-D)T$, где T – некоторое распределение с носителем на B , $\hat{T}(0) \neq 0$.*

Доказательству этой теоремы предположим лемму, которая фактически установлена в работе [1].

ЛЕММА 1. *Пусть даны полиномы $P(z) \neq 0$ и $P_j(z)$, $j \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{C}^n$, такие, что при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ либо $P_j(z)$ – M -однородный полином, $\deg_M P_j = j$, либо*

$P_j(z) \equiv 0$; при этом $P_k(z) \not\equiv 0$ хотя бы для одного номера $k \in \mathbb{N}_0$. Система дифференциальных уравнений (9) эквивалентна уравнению $P(D)f = 0$ тогда и только тогда, когда полином $P(z)$ делит каждый из полиномов $P_j(z)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и для какого-то номера $k \in \mathbb{N}_0$ полином $P_k(z)$ с точностью до ненулевого постоянного множителя совпадает с полиномом $P(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $j \in \mathbb{N}_0$, чтобы $P_j(z) \not\equiv 0$. Пусть $K(z)$ – (каким-либо образом фиксированный) наибольший общий делитель полиномов $P_j(z)$ и $P(z)$ такой, что $P_j(z) \equiv K(z)Q_j(z)$, $P(z) \equiv K(z)L(z)$, где $Q_j(z)$ и $P(z)$ – некоторые полиномы. При каждом $z \in \mathbb{C}^n$ уравнение $K(D)f = e^{i(z \cdot x)}$ имеет в $\mathbb{R}^n$ решение $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [5, следствие 10.6.8]). Значит, если $L(z) = 0$, то

$$P(D)g = L(D)K(D)g = L(D)e^{i(z \cdot x)} = L(z)e^{i(z \cdot x)} = 0,$$

откуда

$$P_j(D)g = Q_j(D)K(D)g = Q_j(z)e^{i(z \cdot x)} = 0.$$

Таким образом, $Q_j(z) = 0$ во всех точках $z \in \mathbb{C}^n$, в которых $L(z) = 0$. По теореме Гильберта о нулях (см. [7, с. 468]) существует $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что полином Q_j^m делится на полином L , но Q_j и L не имеют общих делителей, отличных от постоянных; следовательно, полином L – ненулевая постоянная (если бы L содержал в качестве делителя неприводимый полином ненулевой степени, то последний, очевидно, был бы делителем Q_j , что противоречит взаимной простоте L и Q_j). Значит, P_j делится на P . Легко видеть, что любой M -однородный полином, тождественно не равный нулю, в качестве делителей имеет только M -однородные полиномы, откуда вытекает, что полином P M -однородный. Выберем из полиномов P_j , $j \in \mathbb{N}_0$, тождественно не равный нулю полином с наименьшим номером j . Пусть для определенности это номер k . Поскольку P_k делится на P , частное от этого деления S есть некоторый M -однородный полином. Если $\deg_M S > 0$, то всякое бесконечно дифференцируемое решение уравнения $P(D)f = 1$ в $\mathbb{R}^n$ должно быть решением системы (9), что невозможно. Значит, $\deg_M S = 0$ и полином S – ненулевая постоянная. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. *Необходимость.* Рассмотрим преобразование Фурье–Лапласа меры μ :

$$\hat{\mu}(z) = \int e^{-i(z \cdot t)} d\mu(t).$$

Поскольку $\hat{\mu}(z)$ – целая функция, ряд Тейлора этой функции с центром в точке $z = 0$ сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте из $\mathbb{C}^n$. Следовательно, сгруппировав этот ряд по M -однородным полиномам в порядке возрастания M -степени, мы получим ряд, равномерно сходящийся к $\hat{\mu}(z)$ на компактных подмножествах из $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(z) &= \int e^{-i(z \cdot t)} d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} \int (-i(z \cdot t))^k d\mu(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k (k!)^{-1} \left(\sum_{|l|=k} C_k^l z^l \int t^l d\mu(t) \right) = \sum_l \left((l!)^{-1} (-iz)^l \int t^l d\mu(t) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|l|_M=j} (l!)^{-1} (-iz)^l \int t^l d\mu(t) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(-z), \end{aligned}$$

где

$$l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad C_k^l := \frac{k!}{l_1! \dots l_n!}, \quad l! := l_1! \dots l_n!,$$

$$P_j(z) \equiv \sum_{|lM|=j} (l!)^{-1} (iz)^l \int t^l d\mu(t), \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Если мера μ и вектор M характеризуют решения уравнения $P(D)f = 0$, то, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, мы получаем, что это уравнение должно быть эквивалентно системе дифференциальных уравнений $P_j(D)f = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$. Предположим, что $P(z) \not\equiv 0$ (в противном случае утверждение теоремы тривиально). Ясно, что $P_j(z) \not\equiv 0$ хотя бы для одного номера $j \in \mathbb{N}_0$. Поэтому из леммы 1 следует M -однородность оператора $P(D)$.

Из того, что мера μ и вектор M характеризуют решения уравнения $P(D)f = 0$, и из леммы А вытекает, что $S(z) := \hat{\mu}(z)/P(-z)$ – целая функция. По теореме А отсюда получаем, что $F_\mu = P(-D)T$ для некоторого распределения T с носителем на B . Выполняя для обеих частей последнего равенства преобразование Фурье–Лапласа, мы видим, что $\hat{\mu}(z) \equiv P(-z)\hat{T}(z)$. Следовательно, $\hat{T}(z) \equiv S(z)$. Далее, из леммы 1 и единственности представления целой функции равномерно сходящимся на компактах из $\mathbb{C}^n$ рядом по M -однородным полиномам с центром в точке $z = 0$ получаем, что $\hat{T}(0) \neq 0$.

Достаточность. Пусть $P(D)$ – M -однородный оператор, а мера μ такова, что $F_\mu = P(-D)T$, где T – распределение с носителем на B , при этом необязательно, чтобы $\hat{T}(0) \neq 0$. Пусть u – экспоненциальное решение уравнения $P(D)f = 0$ (в $\mathbb{R}^n$). Если $\hat{T}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(-z)$ – разложение целой функции $\hat{T}$ в сгруппированный по M -однородным полиномам ряд Тейлора с центром в точке $z = 0$ ($\deg_j Q = j$), то, сравнивая равенства

$$\hat{\mu}(z) \equiv P(-z)\hat{T}(z), \quad \hat{\mu}(z) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} P_j(-z), \quad \int u(x + r^M t) d\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j (P_j(D)u)(x)$$

(см. формулу (4)), а также полагая $m = \deg_M P$, мы получаем, что $P_j(z) \equiv 0$ при $j < m$ и $P_{j+m}(z) \equiv P(z)Q_j(z)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Следовательно,

$$\int u(x + r^M t) d\mu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} r^{j+m} (Q_j(D)P(D)u)(x) = 0,$$

что с учетом теоремы Б полностью доказывает теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1 и 2 можно обобщить следующим образом. Пусть $M = (M_1, \dots, M_n)$ – тот же вектор, что и выше, μ – комплексная борелевская мера (в $\mathbb{R}^n$) с компактным носителем, G – область в $\mathbb{R}^n$. Будем называть (M, μ) -*функцией* (в G) всякую функцию $u \in C(G)$, для которой (2) выполнено при всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $\{x + r^M t : t \in \text{supp } \mu\} \subset G$. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что *мера μ и вектор M характеризуют решения уравнения $P(D)f = 0$* , если для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и любой функции $u \in C(G)$ эквивалентны условия а), б), сформулированные в начале п. 3, но (M, μ) -функция в G понимается в указанном только что смысле.

При таком определении теорема 1 остается справедливой, а если $\text{supp } \mu$ – выпуклое множество, то верна и теорема 2, в ее формулировке нужно лишь заменить шар B на $\text{supp } \mu$ (требование выпуклости возникает в результате применения теоремы А).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для каждого M -однородного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D)$ существует комплексная борелевская мера μ с носителем на B , абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, которая вместе с вектором M характеризует решения уравнения $P(D)f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем функцию $f \in C_0^\infty(B)$ такую, что $\hat{f}(0) = \int f(x) dx \neq 0$. Тогда мера $\mu: d\mu(x) = (P(-D)f)(x) dx$ является требуемой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $P_1(D)$ и $P_2(D)$ – M -однородные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и комплексные борелевские меры μ_1 и μ_2 с носителями на B характеризуют вместе с вектором M решения уравнений $P_1(D)f = 0$ и $P_2(D)f = 0$ соответственно. Тогда для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ любая функция $u \in C(G)$ является в G слабым решением уравнения $P_1(D)P_2(D)f = 0$ в том и только том случае, когда

$$\int u(x + r^M t + r^M s) d\mu_1(t) d\mu_2(s) = 0$$

при всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $\{x + r^M t : t \in B(0, 2)\} \subset G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 вытекает, что $F_{\mu_j} = P_j(-D)T_j$, где T_j – некоторое распределение с носителем на B , $\hat{T}_j(0) \neq 0$, $j = 1, 2$. Пусть $\mu = \mu_1 * \mu_2$ и $T = T_1 * T_2$. Из свойств свертки (см. п. 1) следует, что μ – комплексная борелевская мера с носителем на шаре $B(0, 2)$, T – распределение с носителем на $B(0, 2)$, $\hat{T}(0) = \hat{T}_1(0)\hat{T}_2(0) \neq 0$,

$$F_\mu = (P_1(-D)T_1) * (P_2(-D)T_2) = P_1(-D)P_2(-D)(T_1 * T_2) = P_1(-D)P_2(-D)T,$$

$$\int u(x + r^M t + r^M s) d\mu_1(t) d\mu_2(s) = \int u(x + r^M t) d\mu(t).$$

Последние равенства с учетом замечания 1 дают необходимое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $P(D)$ – M -однородный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, μ – комплексная борелевская мера с носителем на B , характеризующая вместе с вектором M решения уравнения $P(D)f = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ любая функция $u \in C(G)$ является в G слабым решением уравнения $(P(D))^k f = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int u(x + r^M t_1 + r^M t_2 + \dots + r^M t_k) d\mu(t_1) d\mu(t_2) \dots d\mu(t_k) = 0,$$

$$t_j = (t_{j1}, \dots, t_{jn}) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k,$$

для всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $\{x + r^M t : t \in B(0, kR)\} \subset G$.

Это следствие вытекает из следствия 2 по индукции.

Дадим определение, необходимое для формулировки следующего следствия из теоремы 2. Пусть ρ – функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$, равная 0 вне шара B , $\int \rho(t) dt = 1$, $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Будем говорить,

что (M, ρ) -регуляризация сохраняет решения уравнения $P(D)f = 0$, если для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ каждая функция $u \in C(G)$, являющаяся в G слабым решением уравнения $P(D)f = 0$, удовлетворяет равенству

$$\int u(x + r^M t) \rho(t) dt = u(x) \quad (10)$$

при всех $x \in G$ и $r > 0$ таких, что $B_M(x, r) \subset G$. Если в дополнение к этому для любой области $G \subset \mathbb{R}^n$ и для любой функции $u \in C(G)$ из справедливости равенства (10) при всех указанных выше x и r следует, что u – слабое решение уравнения $P(D)f = 0$ в области G , то мы будем говорить, что (M, ρ) -регуляризация характеризует решения уравнения $P(D)f = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $P(D)$ – гипоеллиптический M -однородный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $\deg_M P > 0$. Тогда существует функция $\rho \in C_0^\infty(B)$ такая, что (M, ρ) -регуляризация характеризует решения уравнения $P(D)f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – фундаментальное решение гипоеллиптического оператора $P(-D)$ (напомним, что E – бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Возьмем функцию $g \in C_0^\infty(B)$ такую, что $g(x) = 1$ при всех $x \in B(0, 1/2)$ и $\widehat{gE}(0) \neq 0$. Тогда

$$P(-D)(-gE) = P(-D)((1 - g)E) - P(-D)E = P(-D)((1 - g)E) - F_\delta$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем распределение $P(-D)((1 - g)E)$ – бесконечно дифференцируемая функция с носителем в кольце $\{1/2 \leq |x| \leq 1\}$. Из теоремы 2 вытекает, что функция $\rho(x) := P(-D)((1 - g)E)(x)$ обладает требуемыми свойствами.

Из известных критериев гипоеллиптичности (см., например, [5, с. 75]) вытекает, что M -однородный линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P(D)$ является гипоеллиптическим тогда и только тогда, когда $P(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; откуда следует, что M -однородные гипоеллиптические операторы являются частным случаем так называемых квазиэллиптических операторов, введенных Л.Р. Волевичем [8] и более известных как полуэллиптические операторы. Отметим (без доказательства), что из теоремы 2 можно вывести теорему о среднем для решений уравнения теплопроводности, установленную У. Фалксом в работе [2].

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $P(D)$ – M -однородный гипоеллиптический линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\deg_M P = t > 0$, E – фундаментальное решение оператора $P(D)$. Тогда

- 1) если $|M| < t$, то $E \in L_\infty(\mathbb{R}^n; \text{loc})$;
- 2) если $|M| = t$, то $E \in L_p(\mathbb{R}^n; \text{loc})$ при каждом $p < \infty$;
- 3) если $|M| > t$, то $E \in L_p(\mathbb{R}^n; \text{loc})$ при каждом $p < |M|(|M| - t)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует постоянная $K_1 = K_1(P)$ такая, что для любой функции $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем, принадлежащим некоторому M -шару $B_M(x, r)$, $r > 0$, выполняется неравенство

$$\|\Phi\|_2 \leq K_1 r^m \|P(D)\Phi\|_2. \quad (11)$$

Если $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $r = 1$, то сформулированное утверждение есть частный случай одной леммы Л. Хёрмандера (см. [9, с. 510]), а случай произвольных $\mathbf{x}$ и r сводится к $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $r = 1$ с помощью функции $\Phi_{\mathbf{x}, r}(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} + r\mathbf{M}\mathbf{y})$. Пусть функция $\rho \in C_0^\infty(B)$, $\int \rho(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1$, такова, что $(\mathbf{M}, \rho)$ -регуляризация сохраняет решения уравнения $P(D)f = 0$. Положим $\rho_s(\mathbf{t}) := s^{-|\mathbf{M}|} \rho(-s\mathbf{M}\mathbf{t})$ и $\lambda_s(\mathbf{t}) := \rho_s(\mathbf{t}) - \rho_{s/2}(\mathbf{t})$, $s > 0$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, и рассмотрим семейство функций $g_s(\mathbf{y}) := E * \rho_s(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Несложно проверить, что $g_s - g_{s/2} \in C_0^\infty(B_{\mathbf{M}}(\mathbf{0}, s))$. Из неравенства Гёльдера и (11) получаем, что

$$\begin{aligned} \|g_s - g_{s/2}\|_1 &\leq K_2 s^{|\mathbf{M}|/2} \|g_s - g_{s/2}\|_2 \leq K_1 K_2 s^{|\mathbf{M}|/2} s^m \|P(D)(g_s - g_{s/2})\|_2 \\ &= K_3 s^{|\mathbf{M}|/2} s^m \|P(D)E * (\rho_s - \rho_{s/2})\|_2 = K_3 s^{|\mathbf{M}|/2} s^m \|\lambda_s\|_2 \\ &= K_3 s^{|\mathbf{M}|/2} s^m s^{-|\mathbf{M}|/2} \|\lambda_1\|_2 = K_4 s^m, \end{aligned}$$

где K_2 , K_3 и K_4 не зависят от s . Отсюда и из неравенства Минковского вытекает, что последовательность $g_{2^{-l}}(\mathbf{x})$, $l \in \mathbb{N}$, фундаментальна в $L_1(B)$. Следовательно, она сходится в $L_1(B)$ при $l \rightarrow \infty$ к некоторой функции из $L_1(B)$, которая, очевидно, совпадает в $B \setminus \{\mathbf{0}\}$ с $E(\mathbf{x})$. Таким образом, $E \in L_1(\mathbb{R}^n; \text{loc})$. Далее, при каждом $p \in [1, \infty]$ имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_p \leq K_5 r^m \|P(D)\Phi\|_p, \quad (12)$$

где Φ – та же функция, что и в (11), а K_5 зависит только от $P(D)$, которое в силу приведенных выше соображений достаточно доказать в случае $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $r = 1$. Используя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [10, с. 27–28]), имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_p &\leq \|E * P(D)\Phi\|_p \leq \left(\int_{|\mathbf{x}| < 1} \left(\int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1} |(P(D)\Phi)(\mathbf{x} - \mathbf{y})E(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{|\mathbf{x}| < 1} \left(\int_{|\mathbf{y}| < 2} |(P(D)\Phi)(\mathbf{x} - \mathbf{y})E(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{|\mathbf{y}| < 2} |E(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \cdot \|P(D)\Phi\|_p = K_5 \|P(D)\Phi\|_p, \quad p < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Выше мы воспользовались тем, что при $|\mathbf{x}| < 1$ из $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1$ вытекает, что $|\mathbf{y}| < 2$. Если $p = \infty$, то в цепочку неравенств (13) нужно внести соответствующие изменения. Теперь, как и при $p = 2$, из (12) получаем, что для каждого $p \in [1, \infty]$ имеет место неравенство

$$\|g_s - g_{s/2}\|_p \leq K_6 s^m s^{-|\mathbf{M}|/q} \|\lambda_1\|_p,$$

где K_6 не зависит от s , $q = 1 + (p - 1)^{-1}$. Как и выше, проверяем, что в случае $m - |\mathbf{M}|q^{-1} > 0$ последовательность функций $g_{2^{-l}}(\mathbf{x})$ сходится при $l \rightarrow \infty$ в $L_p(B)$ к $E(\mathbf{x})$, откуда сразу получаем необходимое утверждение.

Показатель p в следствии 5 точен, на что указывают известные примеры фундаментальных решений однородных эллиптических операторов (см. [4, с. 206]). Отметим, что следствие 5 может быть получено в качестве следствия результатов В. В. Грушина [11], относящихся к оценкам роста фундаментальных решений произвольных гипоеллиптических уравнений вблизи особенности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В процессе доказательства следствия 5 получена оценка

$$\|g_s - g_{s/2}\|_p \leq K s^{m - |\mathbf{M}|/q} \|\lambda_1\|_p,$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $q = 1 + (p - 1)^{-1}$, K не зависит от s .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zalcman L. Mean values and differential equations // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 339–352.
- [2] Fulk W. A mean value theorem for the heat equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. P. 6–11.
- [3] Купцов Л. П. О свойстве среднего для уравнения теплопроводности // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 211–222.
- [4] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [5] Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Т. 2. М.: Мир, 1986.
- [6] Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
- [7] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
- [8] Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Матем. сб. 1962. Т. 59(101). Доп. вып. С. 3–52.
- [9] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
- [10] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [11] Грушин В. В. Связь между локальными и глобальными свойствами решений гипозэллиптических уравнений с частными производными // Матем. сб. 1965. Т. 66(108). № 4. С. 525–550.

Государственная академия легкой промышленности Украины, г. Киев

Поступило
30.12.96