Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, О количестве слагаемых в асимптотической формуле для числа решений уравнения Варинга, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 285–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:19:52

УДК 511.3

О КОЛИЧЕСТВЕ СЛАГАЕМЫХ В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВАРИНГА

А.В. УСТИНОВ

В статье получается оценка количества слагаемых в асимптотической формуле для числа решений уравнения Варинга. Это удастся сделать благодаря рекуррентному процессу, дающему лучшее понижение, чем теорема Виноградова о среднем.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть $N_k^{(P)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – число решений системы

[illegible]

(Здесь и далее, переменные принимают только целые значения.) Согласно теореме Виноградова о среднем при $k \geq n\tau$ выполняется оценка

$$N_k(P) = N_k^{(P)}(0, \dots, 0) \ll P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{n})^\tau}. \quad (1)$$

Обозначим через $I_k(P)$ число решений уравнения Харди

$$x_1^n + \cdots + x_k^n - y_1^n - \cdots - y_k^n = 0, \quad 0 \leq x_1, \dots, y_k < P.$$

Формула (1) позволяет получить оценку для $I_k(P)$

$$\begin{aligned} I_k(P) &\ll \sum_{|\lambda_1| < k^P} \cdots \sum_{|\lambda_{n-1}| < k^{P^{n-1}}} N_k^{(P)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0) \\ &\ll P^{n(n-1)/2} N_k(P) \ll P^{2k-n+\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{n})^\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $I(N)$ – число решений уравнения Варинга

$$x_1^n + \cdots + x_k^n = N, \quad 0 \leq x_1, \dots, x_k \leq N^{1/n}.$$

В книге [1] доказано, что при $n \geq 4$ и $k \geq 2[n^2(2 \ln n + \ln \ln n + 5)]$ справедлива асимптотическая формула

$$I(N) = \sigma(N)\gamma N^{k/n-1} + O(N^{k/n-1-1/(20n \ln n)}), \quad (3)$$

где $\gamma = (\Gamma(1 + 1/n))^k / \Gamma(k/n)$, $\sigma(N) \geq c_0(n, k) > 0$.

В настоящей работе доказывается, что при $k \geq n(n-1) + n\tau$

$$I_k(P) \ll P^{2k-n+\frac{n}{2}}(1-\frac{1}{n})^\tau.$$

Этот результат уточняет оценку (2), благодаря чему удастся доказать, что формула (3) верна при $n \geq 4$ и $k \geq 2[n^2(\ln n + \ln \ln n + 6)]$.

2. Свойства коэффициентов Фурье некоторых функций. В работе [2] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $N_1, \dots, N_n$ – неотрицательные целые, $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – неотрицательная вещественная функция, определенная на кубе $E_n = [0, 1]^n$ и интегрируемая по Лебегу. Пусть также $c(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – коэффициенты Фурье $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – неотрицательные вещественные числа. Тогда для любых целых $\mu_1, \dots, \mu_n$

$$\sum_{|\lambda_1| \leq N_1} \cdots \sum_{|\lambda_n| \leq N_n} c(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n) \leq 4^n \sum_{|\lambda_1| \leq N_1} \cdots \sum_{|\lambda_n| \leq N_n} c(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся леммы 2 и 3, которые доказываются как лемма 1.

ЛЕММА 2. Пусть N – неотрицательное действительное число, a, b – целые, q – натуральное. Пусть также $F(\alpha)$ – неотрицательная вещественная функция, представимая конечным рядом Фурье с неотрицательными коэффициентами $c(\lambda)$. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{|\lambda| \leq N} c(a\lambda + b) \leq 4q \int_0^1 F(\alpha) \Phi(\alpha) d\alpha \leq 4q \sum_{|\lambda| \leq Nq^{-1}} c(aq\lambda), \quad (4)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \sum_{|\lambda| \leq Nq^{-1}} \left(1 - \frac{|\lambda|}{[Nq^{-1}] + 1} \right) e^{-2\pi i \alpha a q \lambda} \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму в случае $a = 1$. При произвольном a доказательство не изменится. Пусть $N_1 = [Nq^{-1}] + 1$. Тогда

$$\sum_{|\lambda| \leq N} c(\lambda + b) \leq \sum_{\mu=0}^{q-1} \sum_{|\lambda| \leq N_1} c(q\lambda + \mu + b) = \sum_{\mu=0}^{q-1} \sigma(\mu), \quad (5)$$

где

$$\sigma(\mu) = \sum_{|\lambda| \leq N_1} c(q\lambda + \mu + b).$$

Оценим величину $\sigma(\mu)$:

$$\begin{aligned} \sigma(\mu) &= \frac{1}{N_1^2} \sum_{x,y=1}^{N_1} \sum_{|\lambda+x-y| \leq N_1} c(q(\lambda+x-y) + \mu + b) \\ &\leq \frac{1}{N_1^2} \sum_{x,y=1}^{N_1} \sum_{|\lambda| \leq 2N_1-1} c(q(\lambda+x-y) + \mu + b) \\ &= \frac{1}{N_1^2} \sum_{x,y=1}^{N_1} \sum_{|\lambda| \leq 2N_1-1} \int_0^1 F(\alpha) e^{-2\pi i \alpha (q(\lambda+x-y) + \mu + b)} d\alpha \\ &= \frac{1}{N_1^2} \int_0^1 F(\alpha) \left| \sum_{x=1}^{N_1} e^{-2\pi i \alpha q x} \right|^2 \sum_{|\lambda| \leq 2N_1-1} e^{-2\pi i \alpha (q\lambda + \mu + b)} d\alpha. \end{aligned}$$

Оценивая последнюю сумму тривиально, получим

$$\begin{aligned}\sigma(\mu) &\leq \frac{4}{N_1} \int_0^1 F(\alpha) \left| \sum_{x=1}^{N_1} e^{-2\pi i \alpha q x} \right|^2 d\alpha \\ &= \frac{4}{N_1} \int_0^1 F(\alpha) \sum_{|\lambda| \leq N_1-1} (N_1 - |\lambda|) e^{-2\pi i \alpha q \lambda} d\alpha = 4 \int_0^1 F(\alpha) \Phi(\alpha) d\alpha.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sigma(\mu) \leq 4 \int_0^1 F(\alpha) \Phi(\alpha) d\alpha = 4 \sum_{|\lambda| \leq N_1-1} \left(1 - \frac{|\lambda|}{N_1}\right) c(q\lambda) \leq 4 \sum_{|\lambda| \leq N q^{-1}} c(q\lambda).$$

Подставляя полученные неравенства в формулу (5), получим утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются условия леммы 2 и $Nq^{-1} = O(1)$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{|\lambda| \leq N q^{-1}} c(aq\lambda) \ll c(0). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в оценку (4) вместо N, a, q, b величины $Nq^{-1}, aq, N_1, 0$ соответственно, получим

$$\sum_{|\lambda| \leq N q^{-1}} c(aq\lambda) \leq 4N_1 \sum_{|\lambda| \leq N(qN_1)^{-1}} c(aqN_1\lambda) = 4N_1 c(0) \ll c(0).$$

Полностью аналогично доказываются лемма 3 и ее следствие.

ЛЕММА 3. Для любых целых $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{n,n}, b_1, \dots, b_n$ и натуральных $q_1, \dots, q_n$ положим

$$l_\nu = \sum_{j=1}^n a_{\nu,j} \lambda_j, \quad l'_\nu = \sum_{j=1}^n a_{\nu,j} q_j \lambda_j, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Предположим, далее, что $N_1, \dots, N_n$ — неотрицательные действительные числа и $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — неотрицательная вещественная функция, представимая конечным рядом Фурье с неотрицательными коэффициентами $c(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\sum_{|\lambda_1| \leq N_1} \dots \sum_{|\lambda_n| \leq N_n} c(l_1 + b_1, \dots, l_n + b_n) \\ &\leq 4^n q_1 \dots q_n \int_0^1 \dots \int_0^1 F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Phi d\alpha_1 \dots d\alpha_n \\ &\leq 4^n q_1 \dots q_n \sum_{|\lambda_1| \leq N_1 q_1^{-1}} \dots \sum_{|\lambda_n| \leq N_n q_n^{-1}} c(l'_1, \dots, l'_n),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{|\lambda_1| \leq N_1 q_1^{-1}} \dots \sum_{|\lambda_n| \leq N_n q_n^{-1}} \left(1 - \frac{|\lambda_1|}{[N_1 q_1^{-1}] + 1}\right) \dots \left(1 - \frac{|\lambda_n|}{[N_n q_n^{-1}] + 1}\right) \\ &\times e^{-2\pi i(\alpha_1 l'_1 + \dots + \alpha_n l'_n)} \geq 0.\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются условия леммы 3 и $N_j q_j^{-1} = O(1)$ при некотором j , $1 \leq j \leq n$. Тогда если вычисления проводятся с точностью до констант, то можно считать, что λ_j принимает только нулевое значение.

3. Основные леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $1 \leq r \leq n$, H , Q , $\mu_r, \dots, \mu_{n-1}$, a — целые числа, $H' = H - aQ$. Тогда система

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots - y_k = 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^{r-1} + \dots - y_k^{r-1} = 0, \\ C_n^r(x_1^r + \dots - y_k^r) = \mu_r Q, \\ C_n^{r+1}(x_1^{r+1} + \dots - y_k^{r+1}) + \mu_r H = \mu_{r+1} Q, \\ \dots \dots \dots \\ C_n^{n-1}(x_1^{n-1} + \dots - y_k^{n-1}) + \mu_{n-2} H = \mu_{n-1} Q, \\ C_n^n(x_1^n + \dots - y_k^n) + \mu_{n-1} H = \mu_n \end{array} \right. \quad (7)$$

равносильна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 + a) + \dots - (y_k + a) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (x_1 + a)^{r-1} + \dots - (y_k + a)^{r-1} = 0, \\ C_n^r((x_1 + a)^r + \dots - (y_k + a)^r) = \mu'_r Q, \\ C_n^{r+1}((x_1 + a)^{r+1} + \dots - (y_k + a)^{r+1}) + \mu'_r H' = \mu'_{r+1} Q, \\ \dots \dots \dots \\ C_n^{n-1}((x_1 + a)^{n-1} + \dots - (y_k + a)^{n-1}) + \mu'_{n-2} H' = \mu'_{n-1} Q, \\ C_n^n((x_1 + a)^n + \dots - (y_k + a)^n) + \mu'_{n-1} H' = \mu'_n, \end{array} \right. \quad (8)$$

где

$$\mu'_l = \sum_{j=r}^l C_{n-j-1}^{l-j} a^{l-j} \mu_j, \quad l = r, \dots, n-1, \quad \mu'_n = \mu_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые $r-1$ уравнений системы (8) непосредственно следуют из системы (7). Положим $\mu_{r-1} = 0$. Пусть $r \leq l \leq n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} & C_n^l((x_1 + a)^l + \dots - (y_k + a)^l) + \mu'_{l-1} H' - \mu'_l Q \\ &= C_n^l \sum_{j=r}^l C_l^j a^{l-j} (x_1^j + \dots - y_k^j) + \mu'_{l-1} H' - \mu'_l Q \\ &= \sum_{j=r}^l C_{n-j}^{l-j} a^{l-j} (\mu_j Q - \mu_{j-1} H) + (H - aQ) \sum_{j=r}^l C_{n-j-1}^{l-j-1} a^{l-j-1} \mu_j \\ &\quad - Q \sum_{j=r}^l C_{n-j-1}^{l-j} a^{l-j} \mu_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H \sum_{j=r}^l (C_{n-j-1}^{l-j-1} a^{l-j-1} \mu_j - C_{n-j}^{l-j} a^{l-j} \mu_{j-1}) \\
&\quad + Q \sum_{j=r}^l a^{l-j} \mu_j (C_{n-j}^{l-j} - C_{n-j-1}^{l-j-1} - C_{n-j-1}^{l-j}) = 0.
\end{aligned}$$

При $l = n$ и в обратную сторону доказательство проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в системе (7) величины $\mu_r, \dots, \mu_{n-1}$ независимо друг от друга пробегает целые числа, то в системе (8) величины $\mu'_r, \dots, \mu'_{n-1}$ также независимо друг от друга пробегает целые числа.

ЛЕММА 5. Пусть $1 \leq r \leq n$, H , Q , β – целые числа, $0 \leq \beta \leq r + 1$, p – простое, $(Q, p) = 1$, $H = p^\alpha h$, $(h, p) = 1$, $\gamma = \min(1, \alpha)$ и $\alpha\beta = 0$. Тогда система

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \cdots - y_k = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{r-1} + \cdots - y_k^{r-1} = 0, \\ C_n^r p^r (x_1^r + \cdots - y_k^r) = \mu_r Q p^\beta, \\ \dots\dots\dots \\ C_n^n p^n (x_1^n + \cdots - y_k^n) + \mu_{n-1} H p^\beta = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

равносилъна системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \cdots - y_k = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{r-1} + \cdots - y_k^{r-1} = 0, \\ C_n^r(x_1^r + \cdots - y_k^r) = \lambda_r Q p^{1-\gamma}, \\ \dots\dots\dots \\ C_n^n(x_1^n + \cdots - y_k^n) + \lambda_{n-1} H p^{-\gamma} = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

где величины $\mu_r, \dots, \mu_{n-1}$ и $\lambda_r, \dots, \lambda_{n-1}$ связаны равенствами

$$\mu_r = p^{(r+1)-\beta-\gamma} \lambda_r, \quad \dots, \quad \mu_{n-1} = p^{n-\beta-\gamma} \lambda_{n-1}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (9) следует, что величины $\mu_r, \dots, \mu_{n-1}$ должны иметь вид (11). После подстановки этих выражений в систему (9) и сокращений, получим систему (10). Обратные рассуждения доказывают, что из равенств (10) следует справедливость системы (9).

ЛЕММА 6. Рассмотрим систему сравнений

[illegible]

Если $T(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – число решений этой системы, то имеют место неравенства

$$\frac{4}{9} N^{2n} p^{rn+r(r-1)/2} \leq T = T(0, \dots, 0) \leq n! N^{2n} p^{rn+r(r-1)/2}.$$

Доказательство см. в [3].

4. О числе решений уравнения Харди и о проблеме Варинга. Определим натуральные числа $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ равенствами

$$P_0 = P, \quad P_1 = [P_0^{1/2}] + 1, \quad \dots, \quad P_{n-1} = [P_{n-2}^{(n-1)/n}] + 1.$$

Выберем простые $p_1, \dots, p_{n-1}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$P_0^{1/2} \leq p_1 < 2P_0^{1/2}, \quad P_1^{1/3} \leq p_2 < 2P_1^{1/3}, \quad \dots, \quad P_{n-2}^{1/n} \leq p_{n-1} < 2P_{n-2}^{1/n}.$$

При $\nu = 1, \dots, n-1$ верны соотношения

$$p_\nu P_\nu \geq P_{\nu-1}, \quad P_\nu \asymp P^{1/(\nu+1)} \asymp p_\nu^\nu, \quad p_1 \cdots p_\nu \asymp P^{1-1/(\nu+1)} \asymp P_\nu^\nu.$$

Пусть $0 \leq r \leq n-1$. Положим $Q_r = p_1 \cdots p_r$ ($Q_0 = 1$). Обозначим через $T_{k,r}(P')$ число решений системы

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \cdots - y_k = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^r + \cdots - y_k^r = 0, \\ C_n^{r+1}(x_1^{r+1} + \cdots - y_k^{r+1}) = \mu_{r+1} Q_r, \\ C_n^{r+2}(x_1^{r+2} + \cdots - y_k^{r+2}) + \mu_{r+1} z_r = \mu_{r+2} Q_r, \\ \dots\dots\dots \\ C_n^{n-1}(x_1^{n-1} + \cdots - y_k^{n-1}) + \mu_{n-2} z_r = \mu_{n-1} Q_r, \\ C_n^n(x_1^n + \cdots - y_k^n) + \mu_{n-1} z_r = 0, \\ 0 \leq x_1, \dots, y_k < P', \quad 0 \leq z_r < Q_r, \end{array} \right.$$

в которой $\mu_{r+1}, \dots, \mu_{n-1}$ могут принимать произвольные целые значения. При $r = 0$ получим равенство $T_{k,0}(P_0) = I_k(P)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 2$, $k \geq n^2/2$, $1 \leq r \leq n-1$, $p_r \geq 4n$. Тогда

$$T_{k,r-1}(P_{r-1}) \ll p_r^{2(k-n)-1-r(r+1)/2} P_{r-1}^{2n} T_{k-n,r}(P_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать интеграл по единичному n -мерному кубу следующим образом:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n = \int_{E_n} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\bar{\alpha}.$$

Пусть

$$f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r C_n^r x^r + \cdots + \alpha_n C_n^n x^n,$$

$$S(a) = \sum_{x=0}^{P_r-1} e^{2\pi i f(a+p_r x)}, \quad S = \sum_{a=0}^{p_r-1} S(a).$$