Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белов, В. А. Максимов, Квазимоды двух связанных нелинейных осцилляторов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 297–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:01:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

КВАЗИМОДЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В. В. Белов, В. А. Максимов

Для $(\varepsilon, \hbar)$ -двухпараметрического оператора Шрёдингера с семейством потенциалов

$$V_\varepsilon(x) = \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \frac{\varepsilon}{4}(x_1^4 + x_2^4), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (1)$$

рассматривается задача о построении квазиклассической ($\hbar \rightarrow 0$) асимптотики спектра и собственных функций

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V_\varepsilon(x)\right)\Psi(x, \hbar, \varepsilon) = E\Psi(x, \hbar, \varepsilon), \quad \|\Psi(x, \hbar, \varepsilon)\|_{L_2} = 1, \quad (2)$$

равномерной относительно регулярного параметра ε в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}_\varepsilon^+$.

Модель двух связанных нелинейных осцилляторов (1) – одна из популярных в настоящее время моделей в проблеме квазиклассического квантования неинтегрируемых гамильтоновых систем с хаотическим поведением (см., например, [1], [2]). Неинтегрируемость соответствующей (1) классической системы с гамильтонианом $H_\varepsilon(x, p) = p^2/2 + V_\varepsilon(x)$

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\nabla_x V_\varepsilon(x), \quad (x, p) \in \mathbb{R}^4, \quad (3)$$

подтверждается численными экспериментами [3]–[5], отсутствие дополнительного аналитического интеграла движения при $\varepsilon \neq 1, 1/3$ доказано в [6].

Известно, что квазиклассическое ($\hbar \rightarrow 0$) приближение к многомерным спектральным задачам квантовой механики позволяет сопоставить некоторым инвариантным множествам классической системы серии (подпоследовательности) асимптотических собственных функций и значений – квазимоды соответствующего квантового гамильтониана. Для неинтегрируемых систем, допускающих семейство инвариантных k -мерных изотропных торов Λ^k ($0 \leq k < n$, n – размерность задачи), ответ дает комплексный метод ВКБ [7]–[9] (метод комплексного ростка Маслова) при выполнении дополнительных условий типа устойчивости (в линейном приближении) этих объектов. В наиболее изученном случае $k = 1$ (для устойчивых точек покоя, случай $k = 0$, квазиклассическое приближение совпадает с хорошо известным в физике осцилляторным приближением, см. [7], [10]–[14]) достаточным условием существования и построения $\text{mod} O(\hbar^{3/2})$ соответствующих квазимод является орбитальная устойчивость и выполнение условия квантования типа Бора–Зоммерфельда (см. [8], [9]) замкнутых фазовых траекторий Λ^1 .

Неинтегрируемая система (3) допускает семейства замкнутых траекторий, “естественно” связанных с группой дискретных симметрий C_{4v} потенциала $V_\varepsilon(x)$. Рассмотрим несобственные вращения плоскости – отражения в осях $g_i: x_i \mapsto -x_i$, $i = 1, 2$, и диагоналях $g_\pm: x_1 \mapsto \pm x_2$ – и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00720, и образовательной программы Международного научного фонда, грант P98-455.

соответствующие им линейные канонические преобразования фазового пространства, коммутирующие с гамильтонианом $H_\varepsilon(x, p)$, $G_i: x_i \mapsto -x_i, p_i \mapsto -p_i, i = 1, 2$, и $G_\pm: x_1 \mapsto \pm x_2, p_1 \mapsto \pm p_2$. Неподвижные точки этих отображений $\Pi_i = (x_i = p_i = 0)$ и $\Pi_\pm = (x_1 = \pm x_2, p_1 = \pm p_2)$ – двумерные симплектические плоскости. Очевидно, что они инвариантны относительно исходной гамильтоновой системы (производная гладкой четной функции в начале координат равна 0). Пересечение компактной при $E > 0$ поверхности уровня функции $H_\varepsilon(x, p)$ с плоскостями $\Pi_i, i = 1, 2$, и $\Pi_\pm$ определяет семейства замкнутых фазовых траекторий системы (3)

$$\Lambda_i(E, \varepsilon) = \{H_\varepsilon = E\} \cap \{p_i = x_i = 0\}, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } \varepsilon > 0 \quad (4)$$

и

$$\Lambda_\pm(E, \varepsilon) = \{H_\varepsilon = E\} \cap \{x_1 = \pm x_2, p_1 = \pm p_2\} \quad \text{при } \varepsilon \geq 0 \quad (5)$$

соответственно.

Проекции этих траекторий на конфигурационное пространство – отрезки Γ координатных осей и диагоналей $x_1 = \pm x_2$, вдоль которых классическая частица совершает периодическое движение (либрации) между граничными точками Γ – точками поворота (прообразы этих точек в фазовом пространстве – фокальные точки замкнутых траекторий (4), (5)). Например, для траектории $\Lambda_2(E, \varepsilon): x_2 = 0, x_1 = -A \operatorname{cn}(\omega(t + t_0)), t \in \mathbb{R}$, и $\Gamma_2 = [x_1^-, x_1^+] \times \{x_2 = 0\}, x_1^\pm = \pm A$, где $A = A(E, \varepsilon) = (4E\varepsilon^{-1})^{1/4}, \omega = 2\pi T^{-1}, T = T(E, \varepsilon) = 4K(1/\sqrt{2})(4E\varepsilon)^{-1/4}$ – период движения, $\operatorname{cn}(\tau, 1/\sqrt{2})$ – эллиптический косинус, $K(1/\sqrt{2})$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Цель заметки – получить явные формулы квазимод спектральной задачи (2), отвечающие семействам замкнутых фазовых траекторий (4), (5) и равномерно пригодные в максимально широкой области изменения параметра $\varepsilon \geq 0$.

Мы ограничимся рассмотрением семейства $\Lambda_2(E, \varepsilon)$. Для семейств $\Lambda_1, \Lambda_\pm$ соответствующие формулы нетрудно получить после поворотов в конфигурационном пространстве на углы $\pi/2$ и $\pm\pi/4$ соответственно.

Будем следовать общей схеме квазиклассического квантования замкнутых траекторий с фокальными точками (при отсутствии фокальных точек формулы спектральных серий были предложены в [10], [15] для оператора Бельтрами–Лапласа и в [14] для оператора Шрёдингера), в которой глобальные формулы для асимптотических собственных функций, включая окрестности точек поворота, дает канонический оператор Маслова на семействе $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ с комплексным ростком $r^2(\Lambda_2)$ (см. [8], [9]).

В силу простой геометрии вложения семейства траекторий в фазовое пространство (равномерно по $E > 0$ и $\varepsilon > 0$ они лежат в плоскости Π_2) построение комплексного ростка сводится к построению устойчивого решения линеаризованной на траектории $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ гамильтоновой системы, отвечающей косоортогональным к Π_2 направлениям, – системы в нормальных вариациях (эквивалентной уравнению Хилла). В силу однородности потенциала $V_\varepsilon(x)$ коэффициенты этого уравнения не зависят от энергии E и, следовательно, зоны его сильной устойчивости определяют те интервалы на полуоси $\mathbb{R}_\varepsilon^+$, в которых локальная асимптотика собственных функций равномерна по параметру ε . Достаточным условием сшивания локальных асимптотик *равномерного по параметру ε* является выделение в условиях квантования семейства траекторий $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ с комплексным ростком (см. [9]) индекса Гельфанда–Лидского [16], [17], нумерующего зоны сильной устойчивости соответствующего уравнения Хилла.

Перейдем к формулировке результатов.

ЛЕММА 1. Для всех $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\varepsilon \in \Omega_m = \left\{ \varepsilon : \frac{1}{(m+1)(2m+1)} < \varepsilon < \frac{1}{m(2m+1)} \right\}$$

соответственно

$$\varepsilon \in \tilde{\Omega}_m = \left\{ \varepsilon : \frac{2m^2 + m + 1}{2m^2 + m + 3} < \varepsilon < \frac{2m^2 + 3m + 2}{2m^2 + 3m + 4} \right\}$$

замкнутые траектории $\Lambda_i(E, \varepsilon)$ соответственно $\Lambda_{\pm}(E, \varepsilon)$ орбитально устойчивы в линейном приближении (эллиптического типа).

Доказательство следует из результатов [18]. Например, для $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ уравнение в нормальных вариациях (уравнение Хилла)

$$\varepsilon z''_{\tau\tau} + \omega_0^2 \operatorname{cn}^2\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)z = 0, \quad \omega_0 = 2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi^{-1}, \quad (6)$$

где $\tau = \omega(t + t_0)$ – угловая переменная, интегрируется в терминах гипергеометрической и эллиптических функций, причем след приведенной матрицы монодромии

$$\operatorname{tr} M(\varepsilon) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{8}{\varepsilon}}\right).$$

ЛЕММА 2. Базис устойчивых ($\varepsilon \in \Omega_m$) решений Флоке $(z(\tau), \bar{z}(\tau))$, $z(\tau + 2\pi) = e^{i\beta(\varepsilon)\tau} z(\tau)$, уравнения (6) имеет вид

$$\begin{aligned} z &= C_1 \varphi_1(\tau) + C_2 \varphi_2(\tau), \\ \varphi_1(\tau) &= F\left(\alpha, \beta, \gamma, \operatorname{cn}^4\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ \varphi_2(\tau) &= \begin{cases} \operatorname{cn}\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \operatorname{cn}^4\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ \text{при } 0 \leq \tau \leq K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ -\operatorname{cn}\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) F\left(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \operatorname{cn}^4\left(\omega_0\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ \text{при } K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq \tau \leq 2K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $F(\alpha, \beta, \gamma, \operatorname{cn}^4(\omega_0\tau, 1/\sqrt{2}))$ – гипергеометрическая функция Гаусса с параметрами

$$\alpha = \frac{1}{8}(1 + \lambda(\varepsilon)), \quad \beta = \frac{1}{8}(1 - \lambda(\varepsilon)), \quad \gamma = \frac{3}{4}, \quad \lambda(\varepsilon) = \sqrt{1 + \frac{8}{\varepsilon}},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция и

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}C(2 - \gamma)\Gamma(1/4 + \alpha)\Gamma(1/4 + \beta)} - \frac{iC}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} \right), \\ C_2 &= \sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{1}{C\Gamma(3/4 - \alpha)\Gamma(3/4 - \beta)} - \frac{i2C}{\gamma\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right), \\ C &= \frac{1}{\pi} \left(2\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\beta + \frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \right)^{1/2} \left(-\cos \frac{\pi\lambda(\varepsilon)}{2} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) следует, что базис на плоскости комплексного роста r_τ^2 , $\tau \in \Lambda_2$, образован векторами $a_1 = (X'_\tau(\tau, E), 0, X(\tau, E), 0)$, $a_2 = (0, z'_\tau(\tau), 0, z(\tau))$, где $X(\tau, E) = -A(E, \varepsilon) \operatorname{cn}(\tau, 1/\sqrt{2})$.

Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем ветвь показателя устойчивого решения Флоке следующим образом:

$$\frac{\beta(\varepsilon)}{2\pi} = m + (-1)^m \theta(\varepsilon), \quad \theta(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{8}{\varepsilon}}\right), \quad (8)$$

m – номер зоны (сильной) устойчивости уравнения (6) (соответствующий индекс Гельфанда–Лидского $p_{GL} = m/2$ для четных m и $p_{GL} = (m+1)/2$ для нечетных m , см. [17]). Выберем постоянные $C_1(m), C_2(m) > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in \Omega_m$ выполнено $C_1(m) \geq \hbar n \varepsilon^{1/4} \geq C_2(m)$ при $\hbar \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Определим последовательности чисел $E_{n,\nu}(\varepsilon)$ и гладких функций $\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon) = \hat{K}1$, $\hat{K}$ – канонический оператор на $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ с комплексным ростком $r^2(\Lambda_2)$ (см. [9]):

$$E_{n,\nu}(\varepsilon) = \left(\frac{3\pi\hbar\varepsilon^{1/4}}{2^{5/2}K(1/\sqrt{2})} \right)^{4/3} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\beta(\varepsilon)}{2\pi} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right)^{4/3}, \quad n, \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad \nu \ll n, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon) = & \frac{e(x_1)}{\sqrt{T\sqrt{2(E_{n,\nu}(\varepsilon) - \varepsilon x_1^4/4)}}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1^-}^{x_1} \sqrt{2 \left(E_{n,\nu}(\varepsilon) - \frac{\varepsilon x_1^4}{4} \right)} dx_1 \right. \\ & - \frac{\pi}{4} - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\beta(\varepsilon)}{2} \Big) \Phi_\nu \left(\tau(x_1), \frac{x_2}{\sqrt{\hbar}} \right) e^{i(\nu+1/2)\beta(\varepsilon)/2} e^{i\pi/4} \\ & + \frac{e^{-i\pi/2} \varepsilon^{-3/2}}{\sqrt{-2\pi i \hbar T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|X^+(p_1)|^3}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(x_1 p_1 - \int_0^{p_1} X^+(p_1) dp_1 \right) \right) \\ & \times (1 - e(X^+(p_1))) \Phi_\nu \left(\tau^+(p_1), \frac{x_2}{\sqrt{\hbar}} \right) dp_1 \\ & + \frac{e^{-i\pi} \varepsilon^{-3/2}}{\sqrt{-2\pi i \hbar T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|X^-(p_1)|^3}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left(x_1 p_1 - \int_0^{p_1} X^-(p_1) dp_1 \right) \right) \\ & \times (1 - e(X^-(p_1))) \Phi_\nu \left(\tau^-(p_1), \frac{x_2}{\sqrt{\hbar}} \right) dp_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\Phi_\nu \left(\tau, \frac{x_2}{\sqrt{\hbar}} \right) = N_\nu(\hbar) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\dot{z}(\tau)}{z(\tau)} \frac{x_2^2}{2} \right) (z(\tau))^{-1/2} e^{-i\nu \operatorname{Arg} z(\tau)} H_\nu \left(\frac{x_2}{\sqrt{\hbar}|z(\tau)|} \right)$$

– нормированные сжатые когерентные состояния [19], $N_\nu(\hbar) = ((\pi\hbar)^{1/4} 2^{\nu/2} \sqrt{\nu!})^{-1}$, H_ν – полином Эрмита ($\nu \in \mathbb{Z}_+$), $z(\tau)$ определена формулой (7); $\tau(x_1)$ – любое гладкое решение уравнения $x_1 = X(\tau, E)$ при $\tau \neq 0 \bmod \pi$, $\tau^\pm(p_1)$ – решения уравнения $p_1 = X'_\tau(\tau, E)$ при $\tau \neq \pi/2 \bmod \pi$,

$$T = T(E, \varepsilon) = \frac{K(1/\sqrt{2})}{(4E\varepsilon)^{1/4}}$$

– период движения вдоль фазовой орбиты $\Lambda_2(E, \varepsilon)$. Функции $X^\pm(p_1)$ задают кривую

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{\varepsilon}{4} x_1^4 = E$$

в окрестности точек поворота $x_1^\pm = x_1^\pm(E, \varepsilon) = \pm(4E\varepsilon)^{1/4}$ и $e(x_1) \in C_0^\infty(x_1^-, x_1^+)$ – срезающая функция, причем $e(x_1) = 1$ на интервале (x_1^-, x_1^+) за исключением малых окрестностей его концов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (8). Тогда для всех $t \in \mathbb{Z}_+$ числа $E_{n,\nu}(\varepsilon)$, определенные формулой (9), и соответствующие асимптотические собственные функции $\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon)$, определенные формулой (10), отвечающие семейству $\Lambda_2(E, \varepsilon)$: $\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon) = \Psi_{\Lambda_2}(x)$, удовлетворяют задаче (2) с точностью до $O(\hbar^2)$ по норме $L_2(\mathbb{R}_x^2)$ равномерно по $\varepsilon \in \Omega_m$. Функции $\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon)$ по модулю $O(\hbar^\infty)$ сосредоточены в окрестности проекции $\Lambda_2(E, \varepsilon)$ на конфигурационное пространство $\mathbb{R}_x^2$ – отрезка $\Gamma_2 = [x_1^-, x_1^+] \times \{x_2 = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Асимптотические собственные значения, отвечающие семейству $\Lambda_1(E, \varepsilon)$, определяются той же формулой (9), а соответствующие асимптотические собственные функции имеют вид $\Psi_{\Lambda_1}(x) = \Psi_{\Lambda_2}(g_+(x)) = \Psi_{n,\nu}(x_2, x_1, \hbar, \varepsilon)$. Таким образом, квазиклассический спектр (9) в приближении $O(\hbar^2)$ двукратно вырожден. По-видимому, это есть квазивырождение, поскольку здесь мы рассматриваем лишь степенные $\text{mod}O(\hbar^N)$ (аддитивные) формальные асимптотики, не учитывающие возможного туннелирования между кривыми Λ_1 и Λ_2 (приводящего к экспоненциально малому по $\hbar \rightarrow 0$ расщеплению уровней). Ответ на этот вопрос лежит за рамками теории комплексного роста. Для высоких уровней энергии в одномерном случае это расщепление было вычислено в [20], [21], в многомерном случае для оператора Бельтрами–Лапласа – в работе [22].

Для семейств траекторий $\Lambda^\pm$ (5) квазиклассический двукратный спектр $\text{mod}O(\hbar^2)$

$$E_{n,\nu}^+(\varepsilon) = E_{n,\nu}^-(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^{1/3} E_{n,\nu} \left(\frac{3\varepsilon - 1}{1 + \varepsilon} \right), \quad \varepsilon \in \tilde{\Omega}_m,$$

и соответствующие (линейно независимые) собственные функции

$$\Psi_{\Lambda_\pm}(x) = \Psi_{n,\nu} \left(\frac{x_1 \mp x_2}{\sqrt{2}}, \frac{\pm x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \hbar, \varepsilon \right).$$

ЛЕММА 3. В окрестности точек поворота $(x_1^\pm, 0)$, $|x_1 - x_1^\pm| < \delta$, $|x_2| < \sqrt{\hbar}$, $\delta = O(\hbar^{2/3})$, имеет место следующее представление для $\Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,\nu}(x_1, x_2, \hbar, \varepsilon) &= \hbar^{-1/6} \frac{C_p^\pm}{\sqrt{-2\pi i T} \sqrt{|\varepsilon(x_1^\pm)|^3}} \Phi_\nu \left(\tau^\pm, \frac{x_2}{\sqrt{\hbar}} \right) \\ &\times \left((2^{4/3} \pi (\varepsilon x_1^\pm)^3)^{1/3} \text{Ai}((x_1 - x_1^\pm) 2^{1/3} \hbar^{-2/3} (\varepsilon x_1^\pm)^3) + O(\hbar^{1/3}) \right), \end{aligned}$$

где $C_p^+ = e^{-i\pi/2}$, $C_p^- = e^{-i\pi}$, $\tau^+ = T/2$, $\tau^- = 0$, $\text{Ai}(\cdot)$ – функция Эйри.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berry M. V. // Les Houches, Session 36, 1981. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 171–271.
2. Gutzwiller M. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
3. Bohigas O., Tomsovic S., Ullmo D. // Phys. Rep. 1993. V. 223. P. 43–133.
4. Carnegie A., Percival I. C. // Phys. A. 1984. V. 17. P. 801–813.
5. Eckhardt B. // Phys. Rep. 1988. V. 163. P. 205–279.
6. Yoshida H. // Phys. D. 1987. V. 29. P. 128–142.
7. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
8. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 5. С. 1037–1042.
9. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. // ТМФ. 1992. Т. 92. С. 215–254.
10. Бабич В. М. Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Т. 9. Л.: Наука, 1968.
11. Лазуткин В. Ф. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 34. М.: ВИНТИ, 1988. С. 135–174.
12. Voros A. // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 1976. V. 24. P. 31–90.
13. Duistermaat J. J., Guillemin V. W. // Invent. Math. 1983. V. 29. P. 63–73.
14. Ralston J. V. // Comm. Math. Phys. 1976. V. 51. P. 219–242.
15. Крахнов А. Д. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Вып. 1. Горький: Изд-во ГГУ. С. 66–74.
16. Гельфанд И. М., Лидский В. Б. // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 3–19.
17. Крейн М. Г. // Памяти А. А. Андропова (1901–1952). Сб. статей. М., 1955. С. 413–497.
18. Yoshida H. // Celestial Mech. Dynam. Astronom. 1984. V. 32. P. 73–86.
19. Perelomov A. Generalized Coherent States and Their Applications. Berlin: Springer, 1986.
20. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Квантовая механика, нерелятивистская теория. Т. 3. М.: Наука, 1969.
21. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
22. Dobrokhotov S. Yu., Shafarevich A. I. “Momentum” Tunneling between Tori and the Splitting of Eigenvalues of the Beltrami–Laplace Operator on Liouville Surfaces. Preprint № 599. М.: ИПМ РАН, 1998.