Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буренков, Л. Д. Кудрявцев, И. В. Неверов, Об одном тождестве для разностей произвольного порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 302–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:10:10

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ РАЗНОСТЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В. И. Буренков, Л. Д. Кудрявцев, И. В. Неверов

Докажем равенство

$$\sum_{i=0}^{2m-1} a_{im} b_i = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{km} \Delta^m b_k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

в котором числа b_k , $k \in \mathbb{Z}$, произвольны, а числа a_{im} и λ_{km} заданы следующим образом:

$$a_{im} = \sum_{j=i+1}^m \frac{(-1)^{j+1}}{j} C_m^j + \sum_{\substack{(i+1)/2 \leq j \leq i \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{(-1)^j}{j} C_m^j, \quad i = \overline{0, 2m-1} \quad (2)$$

(если нижний предел оказывается больше верхнего, то считаем сумму равной 0),

$$\lambda_{km} = (-1)^m a_{km} + (-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_m^{k-j} \lambda_{jm}, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (3)$$

а $\Delta^m b_k$ — разность порядка m :

$$\Delta^m b_k = \sum_{j=0}^m (-1)^{m+j} C_m^j b_{k+j},$$

где под b_k можно понимать не только числа, но и элементы любого линейного векторного пространства.

Равенство (1) применяется при доказательстве существования разложения локально суммируемых функций в ряды по интегралам от разностей высших порядков рассматриваемых функций [1].

Доказательство тождества (1) основано на двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *Даны числа $a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. Следующие два условия эквивалентны:*

$$\exists \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1} \quad \forall b_0, b_1, \dots, b_{2m-1} \quad \sum_{i=0}^{2m-1} a_i b_i = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k \Delta^m b_k, \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^{2m-1} a_i i^l = 0, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (4) можно переписать в виде

$$\exists \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1} \quad \sum_{i=1}^{2m} a_{i-1} e_i = \sum_{k=1}^m \mu_{k-1} \Delta^m e_k,$$

где e_k — k -й вектор ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^{2m}$. Так как $\{\Delta^m e_k\}_{k=1}^m$ — линейно независимая система векторов, числа μ_i определяются однозначно.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96102.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (4) $\Rightarrow$ (5). Возьмем $b_i = i^l$, $l = \overline{0, m-1}$. Тогда из (4) вытекает

$$\sum_{i=1}^{2m-1} a_i i^l = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \Delta^m i^l = 0,$$

так как при $l = \overline{0, m-1}$ имеет место равенство $\Delta^m i^l = 0$, т.е.

$$\sum_{i=0}^m (-1)^{m+i} C_m^i = 0, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (6)$$

Это следует из того, что для любых $h \in \mathbb{R}$ и $x > 0$ при $l = \overline{0, m-1}$ имеет место $\Delta_h^m x^l = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Положим $\tilde{a}_i = a_i$, $\tilde{b}_i = b_i$, $i = \overline{0, 2m-1}$; $\tilde{a}_i = \tilde{b}_i = 0$, $i \geq 2m$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{2m-1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i = - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \tilde{a}_j \right) \Delta \tilde{b}_i.$$

Действительно, положим $\eta_i = \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{a}_k$, так что $\eta_1 = \tilde{a}_0$, $\Delta \eta_i = \tilde{a}_i$; имеем

$$\begin{aligned} \Delta(\eta \tilde{b})_i &= \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i + \tilde{b}_i \Delta \eta_i = \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i + \tilde{b}_i \tilde{a}_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(\eta \tilde{b})_i = -\eta_1 \tilde{b}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i + \tilde{b}_i \tilde{a}_i), \\ -\tilde{a}_0 \tilde{b}_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i + \tilde{b}_i \tilde{a}_i), \quad \tilde{a}_0 \tilde{b}_0 - \tilde{a}_0 \tilde{b}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i, \\ 0 &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i + \tilde{a}_0 (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i = - \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{i+1} \Delta \tilde{b}_i,$$

что и требовалось доказать.

Применив это преобразование $m-1$ раз, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{b}_i = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \Delta^m \tilde{b}_i, \quad (7)$$

где

$$\mu_i = (-1)^m \sum_{j_m=0}^i \sum_{j_{m-1}=0}^{j_m} \cdots \sum_{j_1=0}^{j_2} \tilde{a}_{j_1} = \sum_{j=0}^i C_{i-l+m-1}^{m-1} \tilde{a}_j, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Последнее равенство доказывается следующим образом. Рассмотрим j -й элемент $\tilde{a}_j$. Правее него $(i+1) - (j+1) = i-j$ элементов и на 1 больше, т.е. $i-j+1$, позиций для отметок, соответствующих верхним границам сумм. Коэффициент в сумме

$$\sum_{j_m=0}^i \cdots \sum_{j_1=0}^{j_2} \tilde{a}_{j_1}$$

при $\tilde{a}_j$ равен числу способов разместить $m-1$ отметок (так как одна из m отметок фиксирована — для внешней суммы) на $i-j+1$ позициях при сохранении порядка отметок, причем отметки могут накладываться. Каждую i -ю отметку ($i = \overline{2, m-1}$) сдвинем на $(i-1)$ относительно выбранного для нее места. Тогда добавится $m-2$ новых позиций и наше множество выборов (или размещений)

взаимно однозначно отобразится на множество неупорядоченных выборок из $i - j + 1 + m - 2$ по $m - 1$. Таким образом, коэффициент при $\tilde{a}_j$ равен $C_{i-j+m-1}^{m-1}$.

Поскольку при $i \geq 2m$ $\Delta^m \tilde{b}_i = 0$, а при $i \leq m - 1$ $\Delta^m \tilde{b}_i = \Delta^m b_i$, равенство (7) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{2m-1} a_i b_i = \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i \Delta^m b_i + \sum_{i=m}^{2m-1} \mu_i \Delta^m \tilde{b}_i. \quad (8)$$

Поскольку $C_k^{m-1} = C_{k+1}^{m-1} - C_k^{m-2}$, при $m \geq 2$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i C_{i-j+m-1}^{m-1} a_j &= \sum_{j=0}^i C_{i+1-j+m-1}^{m-1} a_j - \sum_{j=0}^i C_{i+1-j+m-2}^{m-2} a_j \\ &= \sum_{j=0}^{i+1} C_{i+1-j+m-1}^{m-1} a_j - \sum_{j=0}^{i+1} C_{i+1-j+m-2}^{m-2} a_j. \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру, приходим к тому, что при $m \geq s + 1$

$$\sum_{j=0}^i C_{i-j+m-1}^{m-1} a_j = \sum_{k=0}^s (-1)^k C_s^k \sum_{j=0}^{i+s} C_{i+s-j+m-1-k}^{m-1-k} a_j.$$

При $m = 1$ исходная сумма уже имеет требуемый вид, что соответствует случаю $s = 0$. Выбирая здесь $i + s = 2m - 1$, $i = \overline{m, 2m - 1}$, получаем

$$\sum_{j=0}^i C_{i-j+m-1}^{m-1} a_j = \sum_{k=0}^{2m-1-i} (-1)^k C_{2m-1-i}^k \sum_{j=0}^{2m-1} C_{2m-1-j+m-1-k}^{m-1-k} a_j, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Поскольку $C_{2m-1-j+m-1-k}^{m-1-k}$ — многочлен степени $m - 1 - k$ от j , в силу (5) имеем

$$\sum_{j=0}^{2m-1} C_{2m-1-j+m-1-k}^{m-1-k} a_j = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^i C_{i-j+m-1}^{m-1} a_j = 0, \quad i = \overline{m, 2m-1},$$

значит $\mu_i = 0$, $i = \overline{m, 2m-1}$, и (8) переходит в (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условия (4) числа μ_i , $i = \overline{0, m-1}$, определяются однозначно:

$$\mu_i = (-1)^m \sum_{j=0}^i C_{i-j+m-1}^{m-1} a_j.$$

Рассмотрим ньютоновские степени $(k)_l = k(k+1) \cdots (k+l-1)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $l \in \mathbb{N}$; считаем $(k)_0 = 1$ (в том числе $(0)_0 = 1$). Отметим, что

$$(k)_l = k(k+1)_{l-1}, \quad \sum_{k=0}^i (k)_l = \frac{(i)_{l+1}}{l+1}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Мы будем пользоваться эквивалентным (6) равенством

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j (j)_l C_m^j = 0, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (10)$$

Кроме того, рассмотрим усредненные ньютоновские степени

$$\overline{(k)}_l = \frac{1}{k} \sum_{i=k}^{2k-1} (i)_l, \quad k \in \mathbb{N}, \quad l \in \mathbb{Z}^+;$$

считаем $\overline{(0)}_l = 0$ при $l \in \mathbb{N}$ и $\overline{(0)}_0 = 1$. Отметим, что согласно (9) при $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \overline{(k)}_l &= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=0}^{2k-1} (i)_l - \sum_{i=0}^{k-1} (i)_l \right) = \frac{1}{k(l+1)} ((2k-1)_{l+1} - (k-1)_{l+1}) \\ &= \frac{1}{l+1} (2(2k-1)(2k+1)_{l-1} - (k-1)(k+1)_{l-1}) = P_l(k) \end{aligned}$$

— многочлен степени l . Согласно (6)

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j P_l(j) C_m^j = 0, \quad l < m.$$

Однако,

$$\begin{aligned} P_l(0) &= \frac{1}{l+1} (-2(1)_{l-1} + (1)_{l-1}) = -\frac{(1)_{l-1}}{l+1} \neq \overline{(0)}_l = 0, \quad l \geq 1, \\ \sum_{j=0}^m (-1)^j \overline{(j)}_l C_m^j &= \sum_{j=0}^m (-1)^j (\overline{(j)}_l - P_l(j)) C_m^j = (-1)^0 (\overline{(0)}_l - P_l(0)) C_m^0 = -P_l(0) = \frac{(1)_{l-1}}{l+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \overline{(j)}_l C_m^j = \frac{(1)_{l-1}}{l+1}, \quad l = \overline{1, m-1}. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. Числа (2) удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=0}^{2m-1} (i)_l a_{im} = 0, \quad l = \overline{0, m-1},$$

что эквивалентно условию (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m-1} (i)_l a_{im} &= \sum_{i=0}^{m-1} (i)_l \sum_{j=i+1}^m \frac{(-1)^{j+1}}{j} C_m^j + \sum_{i=1}^{m-1} (i)_l \sum_{(i+1)/2 \leq j \leq i} \frac{(-1)^j}{j} C_m^j \\ &\quad + \sum_{i=m}^{2m-1} (i)_l \sum_{(i+1)/2 \leq j \leq m} \frac{(-1)^j}{j} C_m^j = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \\ \Sigma_2 &= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{j \leq i \leq \min\{m-1, 2j-1\}} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m/2} \left(\sum_{i=j}^{2j-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j + \sum_{m/2 < j \leq m-1} \left(\sum_{i=j}^{m-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j, \\ \Sigma_3 &= \sum_{(m+1)/2 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=m}^{2j-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 + \Sigma_3 &= \sum_{1 \leq j \leq m/2} \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j + \sum_{m/2 < j \leq m-1} \left(\sum_{i=j}^{m-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j \\ &+ \sum_{(m+1)/2 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=m}^{2j-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^j}{j} C_m^j.\end{aligned}$$

При $m = 2k$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 + \Sigma_3 &= \sum_{j=1}^k \overline{(j)}_l (-1)^j C_{2k}^j + \sum_{j=k+1}^{2k-1} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j}^{2k-1} (i)_l \right) (-1)^j C_{2k}^j + \sum_{j=k+1}^{2k} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=2k}^{2j-1} (i)_l \right) (-1)^j C_{2k}^j \\ &= \sum_{j=1}^k \overline{(j)}_l (-1)^j C_{2k}^j + \sum_{j=k+1}^{2k-1} \overline{(j)}_l (-1)^j C_{2k}^j + \overline{(2k)}_l = \sum_{j=1}^{2k} \overline{(j)}_l (-1)^j C_{2k}^j.\end{aligned}$$

При $m = 2k + 1$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 + \Sigma_3 &= \sum_{j=1}^k \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j + \sum_{j=k+1}^{2k} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j}^{2k} (i)_l \right) (-1)^j C_m^j + \sum_{j=k+1}^{2k+1} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=2k+1}^{2j-1} (i)_l \right) (-1)^j C_m^j \\ &= \sum_{j=1}^k \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j + \sum_{j=k+1}^{2k} \overline{(j)}_l (-1)^j C_{2k}^j + \overline{(2k+1)}_l (-1)^{2k+1} C_m^{2k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2k+1} \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 = \sum_{j=1}^m \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j.$$

Далее,

$$\Sigma_1 = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^{j+1}}{j} C_m^j,$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{2m-1} (i)_l a_{im} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} (i)_l \right) \frac{(-1)^{j+1}}{j} C_m^j + \sum_{j=1}^m \overline{(j)}_l (-1)^j C_m^j.$$

При $l = 0$

$$\sum_{i=0}^{j-1} (i)_l = j \implies \Sigma_1 = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} C_m^j, \quad \Sigma_2 + \Sigma_3 = \sum_{j=1}^m (-1)^j C_m^j \implies \sum_{i=0}^{2m-1} (i)_l a_{im} = 0.$$

При $l > 0$ согласно (9)

$$\sum_{i=0}^{j-1} (i)_l = \frac{(j-1)_{l+1}}{l+1},$$

откуда согласно (11) и (10)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m-1} (i)_l a_i &= \frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^m \frac{(j-1)_{l+1}}{j} (-1)^{j+1} C_m^j + \sum_{j=1}^m (\overline{j})_l (-1)^j C_m^j \\ &= \frac{1}{l+1} \sum_{j=1}^m (j-1)(j+1)_{l-1} (-1)^{j+1} C_m^j + \frac{(1)_{l-1}}{l+1} \\ &= \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^m (j-1)(j+1)_{l-1} (-1)^{j+1} C_m^j = \sum_{j=0}^m (-1)^j Q_l(j) C_m^j = 0. \end{aligned}$$

Комбинируя теоремы 1 и 2, получаем равенство (1), где числа λ_{km} согласно замечанию 2 определены однозначно. Равенство (3) есть следствие равенства (1). Действительно, перегруппировывая слагаемые в правой части (1), получаем

$$\sum_{i=0}^{2m-1} a_{im} b_i = \sum_{k=0}^{2m-1} b_k \left(\sum_{j=0}^k \lambda_{jm} (-1)^{m+k-j} C_m^{k-j} \right),$$

значит

$$(-1)^m a_{km} = \sum_{j=0}^k \lambda_{jm} (-1)^{k-j} C_m^{k-j} = \lambda_{km} + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} C_m^{k-j} \lambda_{jm}, \quad k = \overline{0, 2m-1},$$

откуда следует (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л. Д. // Тр. МИАН. 1995. Т. 210. С. 129–170.