Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Висков, Некоммутативное тождество для полиномов
Аппеля, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 307–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:46:33

НЕКОММУТАТИВНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ПОЛИНОМОВ АППЕЛЯ

О. В. Висков

Последовательность $\mathcal{A} = \{a_n(x), n \geq 0\}$ полиномов $a_n(x)$ называется *последовательностью полиномов Аппеля* [1], если, во-первых, степень полинома $a_n(x)$ равна n и, во-вторых, по отношению к операции дифференцирования эти полиномы ведут себя подобно степенным функциям, а именно:

$$\frac{da_n(x)}{dx} = na_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

Последовательность $\mathcal{A}$ полиномов $a_n(x)$ является последовательностью полиномов Аппеля тогда и только тогда, когда их (формальная) экспоненциальная производящая функция имеет вид [2]

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x) \frac{t^n}{n!} = A_{\mathcal{A}}(t) e^{xt}, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00492.

где $A_{\mathcal{A}}(t)$ – (формальный) степенной ряд, удовлетворяющий условию $A_{\mathcal{A}}(0) \neq 0$. С каждой последовательностью полиномов Аппеля связан линейный функционал $E_{\mathcal{A}}$, определяемый (скажем, в пространстве полиномов $\mathcal{F}[x]$, где $\mathcal{F}$ – заданное поле нулевой характеристики) соотношениями

$$E_{\mathcal{A}}[a_n(x)] = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases}$$

Известно [3], что этот линейный функционал может быть определен как усреднение по связанной с $\mathcal{A}$ функции $\alpha_{\mathcal{A}}(x)$ ограниченной вариации, имеющей все моменты.

ПРИМЕР 1. Последовательности $\mathcal{S} = \{(x-z)^n, n \geq 0\}$, где $z \in \mathcal{F}$, отвечает степенной ряд $A_{\mathcal{S}}(t) = e^{-tz}$ и вырожденное в точке z распределение, так что линейный функционал $E_{\mathcal{S}}[p(x)] = p(z)$.

ПРИМЕР 2. Последовательность $\mathcal{B} = \{B_n(x), n \geq 0\}$ полиномов Бернулли [4] характеризуется производящей функцией (1) с $A_{\mathcal{B}}(t) = t/(e^t - 1)$, а

$$E_{\mathcal{B}}[p(x)] = \int_0^1 p(x) dx.$$

ПРИМЕР 3. Последовательность $\mathcal{E} = \{E_n(x), n \geq 0\}$ полиномов Эйлера [5] отвечает симметричному биномиальному распределению и поэтому

$$A_{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{\text{ch } t}, \quad E_{\mathcal{E}}[p(x)] = \frac{f(-1) + f(1)}{2}.$$

ПРИМЕР 4. Последовательность $\mathcal{H} = \{H_n(x), n \geq 0\}$ полиномов Эрмита [6] – единственная в классе полиномов Аппеля последовательность ортогональных полиномов – соответствует стандартному нормальному распределению и поэтому

$$A_{\mathcal{H}}(t) = e^{-t^2/2}, \quad E_{\mathcal{H}}[p(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Пусть теперь a, b и c – элементы произвольной ассоциативной алгебры над $\mathcal{F}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям [7]

$$ab - ba = c, \quad ac = ca, \quad bc = cb, \quad (2)$$

определяющим алгебру Гейзенберга–Вейля [8]. Из (2) легко выводится (например, индуктивным рассуждением по степени полинома), что для произвольного $p(x) \in \mathcal{F}[x]$ справедливо равенство

$$p(a)b - bp(a) = c \frac{dp(a)}{da}. \quad (3)$$

Это соотношение, приписываемое физиками Дираку, было отмечено еще в середине прошлого века Ч. Грейвсом [7]. Именно это коммутационное равенство в сочетании с определяющим полиномы Аппеля соотношением (1) позволяет утверждать, что для произвольной последовательности полиномов Аппеля $\mathcal{A} = \{a_n(x), n \geq 0\}$ справедливо тождество

$$b \sum_{m=0}^n c^{n-m} a_m(a) \frac{b^m}{m!} = a_n(a) \frac{b^{n+1}}{n!}. \quad (4)$$

В самом деле, перебрасывая в левой части (4) стоящую перед суммой образующую b слева направо и используя (3) и (1), получаем “телескопическую” сумму, соседние члены которой (кроме последнего) взаимно уничтожаются.

Покажем, что это простое тождество лежит в основе многих на первый взгляд не связанных между собой аналитических фактов. В частности, на этом пути единообразно выводятся разложение Тейлора с остаточным членом в форме Коши, универсальный ряд Бернулли, формула суммирования Эйлера–Маклорена.

1. Начнем с доказательства простого комбинаторного тождества

$$\sum_{m=0}^n \binom{m+N}{m} = \binom{n+N+1}{n}, \quad (5)$$

справедливого для любого N . С этой целью рассмотрим кольцо $\mathcal{F}[x]$ полиномов от переменной x и реализуем символы a и b соответственно оператором дифференцирования $D = d/dx$ и оператором x умножения на независимую переменную, действующими в кольце $\mathcal{F}[x]$. Легко видеть, что при такой реализации коммутационные соотношения (2) выполняются, если в качестве c выбрать тождественный оператор. Тождество (4) в этом случае принимает вид

$$\sum_{m=0}^n a_n(D) \frac{x^m}{m!} = a_n(D) \frac{x^n}{n!}. \quad (6)$$

Полагая $a_n(x) = x^n$ и применяя обе части тождества (6) к x^N , приходим к (5).

2. Поменяем ролями рассмотренные в п. 1 операторы D и x , а именно, положим в (4) $a = x$, $b = D = d/dx$. Ясно, что при перестановке символов a и b символ c меняет лишь знак. Выбирая вновь $a_n(x) = x^n$ и применяя обе части полученного операторного равенства к $p(x)$, получим

$$\left(\sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{x^m}{m!} p^{(m)}(x) \right)' = \frac{x^n}{n!} p^{(n+1)}(x). \quad (7)$$

Интегрирование равенства (7) от 0 до x приводит к тождеству

$$p(0) = \sum_{m=0}^n \frac{(-x)^m}{m!} p^{(m)}(x) - \int_0^x \frac{(-\tau)^n}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau,$$

представляющему собой знаменитый “универсальный ряд” Бернулли [9] (с остаточным членом).

3. Фиксируем $y \in \mathcal{F}$ и считаем, что a – оператор умножения на $y - x$, b реализуется оператором дифференцирования $D = d/dx$. Ясно, что c в этой ситуации является, по-прежнему, тождественным оператором. При такой реализации тождество (4), примененное к $p(x)$, дает

$$\left(\sum_{m=0}^n \frac{a_m(y-x)}{m!} p^{(m)}(x) \right)' = \frac{a_n(y-x)}{n!} p^{(n+1)}(x) \quad (8)$$

для любой последовательности $\mathcal{A} = \{a_n(x), n \geq 0\}$ полиномов Аппеля. Интегрируя равенство (8) и производя простые замены, приходим к тождеству

$$\sum_{m=0}^n \frac{a_m(x)}{m!} p^{(m)}(y) - \sum_{m=0}^n \frac{a_m(y)}{m!} p^{(m)}(x) = \int_x^y \frac{a_n(x+y-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Применяя к равенству (9) линейный функционал $E_{\mathcal{A}}$, находим, что для любой последовательности $\mathcal{A} = \{a_n(x), n \geq 0\}$ полиномов Аппеля, справедливо представление

$$p(y) = \sum_{m=0}^n \frac{a_m(y)}{m!} E_{\mathcal{A}} p^{(m)}(x) + E_{\mathcal{A}} \int_x^y \frac{a_n(x+y-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Иное доказательство равенства (10), основанное на некоммутативном обобщении формулы для суммы геометрической прогрессии [10], можно найти в [11].

Рассмотрим частные случаи равенства (10).

Для последовательности $\mathcal{S}$ полиномов Аппеля (пример 1) тождество (10) дает разложение Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$p(y) = \sum_{m=0}^n \frac{(y-z)^m}{m!} p^{(m)}(z) + \int_z^y \frac{(z+y-\tau)^n}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau.$$

Для последовательности $\mathcal{B}$ полиномов Бернулли (пример 2) соотношение (10) после незначительных преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} p(y) &= \int_0^1 p(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^n \frac{B_m(y)}{m!} (p^{(m-1)}(1) - p^{(m-1)}(0)) \\ &\quad + \int_0^1 \int_x^y \frac{B_n(x+y-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau dx. \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $p(y) = \sum_{k=0}^{r-1} g(y+k)$, затем $y=0$, получим формулу суммирования Эйлера–Маклорена (ср. [4, гл. 4, § 3]):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} g(k) &= \int_0^r g(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^n \frac{B_m(0)}{m!} (g^{(m-1)}(r) - g^{(m-1)}(0)) \\ &\quad + \int_0^1 \int_x^0 \frac{B_n(x-\tau)}{n!} \sum_{k=0}^{r-1} g^{(n+1)}(k+\tau) d\tau dx. \end{aligned}$$

Для последовательности $\mathcal{E}$ полиномов Эйлера (пример 3) тождество (10) дает

$$\begin{aligned} 2p(y) &= \sum_{m=0}^n \frac{E_m(y)}{m!} (p^{(m)}(-1) + p^{(m)}(1)) + \int_{-1}^y \frac{E_n(y-1-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_1^y \frac{E_n(y+1-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для последовательности $\mathcal{H}$ полиномов Эрмита (пример 4) тождество (10) преобразуется к виду (иной способ доказательства см. в [10])

$$p(y) = \sum_{m=0}^n \frac{\text{He}_m(y)}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} p^{(m)}(x) \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^y \frac{\text{He}_n(x+y-\tau)}{n!} p^{(n+1)}(\tau) \varphi(x) d\tau dx, \quad (11)$$

где $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Стандартный вид разложения (11) по ортогональным полиномам следует из легко устанавливаемого (например, интегрированием по частям) равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{(m)}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \text{He}_m(x) \varphi(x) dx.$$

4. Приведем еще одно классическое следствие некоммутативного тождества (4). С этой целью реализуем символ b классическим разностным оператором ∇ , сопоставляющим функции $p(x)$ ее разность $\nabla[p(x)] = p(x) - p(x-1)$, а в качестве a выберем (при фиксированном $y \in \mathcal{F}$) оператор $(y-x)(1-\nabla)^{-1}$, который, как легко проверить, переводит $p(x)$ в $(y-x)p(x+1)$. Нетрудно убедиться, что в сделанных предположениях символ c , по-прежнему, тождественный оператор. Подставляя приведенные реализации символов a , b и c в (4) с $a_n(x) = x^n$ и применяя полученное тождество к $p(x)$, после несложных преобразований получим

$$\nabla \left(\sum_{m=0}^n \frac{(y-x)^m}{m!} \Delta^m p(x) \right) = \frac{(y-x)^n}{n!} \Delta^{n+1} p(x-1), \quad (12)$$

где Δ – классический разностный оператор, переводящий $p(x)$ в $p(x+1) - p(x)$, и

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_m = x(x-1) \cdots (x-m+1), \quad m = 1, 2, \dots$$

Суммируя (12) по x от $\alpha + 1$ до β и подставляя в полученное равенство $y = \alpha + \beta$, приходим к тождеству

$$\sum_{m=0}^n \frac{(\alpha)_m}{m!} \Delta^m p(\beta) - \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)_m}{m!} \Delta^m p(\alpha) = \sum_{k=\alpha}^{\beta-1} \frac{(\alpha + \beta - k - 1)_n}{n!} \Delta^{n+1} p(k),$$

частным случаем которого ($\alpha = 0$) является тождество Ньютона [4]

$$p(\beta) = \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)_m}{m!} \Delta^m p(0) + \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{(\beta - k - 1)_n}{n!} \Delta^{n+1} p(k).$$

Заметим, что повторяя приведенное рассуждение, заменив операторы ∇ и $(y - x)(1 - \nabla)^{-1}$ на Δ и $(y - x)(\Delta - 1)^{-1}$ соответственно, получим

$$p(\beta) = \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)^{(m)}}{m!} \nabla^m p(0) + \sum_{k=1}^{\beta-1} \frac{(\beta - k + 1)^{(n)}}{n!} \nabla^{n+1} p(k),$$

где

$$(\beta)^{(0)} = 1, \quad (\beta)^{(m)} = \beta(\beta+1) \cdots (\beta+m-1), \quad m = 1, 2, \dots$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell P. // Ann. Sci. École Norm. Sup. (2). 1880. V. 9. P. 119–144.
2. Boas R. P., Buck R. C., Creighton R. Polynomial Expansions of Analytical Functions. Berlin: Springer, 1964.
3. Thorne C. J. // Amer. Math. Monthly. 1945. V. 52. P. 191–193.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.
5. Бейтмен Т., Эрдейи Ф. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
6. Seré G. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
7. Graves C. // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1853–1857. V. 6. P. 144–152.
8. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
9. Сонин Н. Я. // Изв. Импер. АН. 1897. Т. 7. С. 337–353.
10. Висков О. В. // Тр. МИАН. 1986. Т. 177. С. 21–32.
11. Martin C. F., Shubov V. // Appl. Math. Comput. 1993. V. 53. P. 277–298.