Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Феликсон, Кубы Ламберта, порождающие дискретные группы отражений, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 277–286

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:37:12

УДК 512.817.72+514.174.5

КУБЫ ЛАМБЕРТА, ПОРОЖДАЮЩИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ОТРАЖЕНИЙ

А. А. Феликсон

Кубом Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ называется куб, все двугранные углы которого прямые, за исключением углов α, β и γ при трех ребрах, никакие два из которых не лежат в одной плоскости. В данной работе мы классифицируем кубы Ламберта в S^3 , $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{H}^3$ такие, что группа G_Q , порожденная отражениями относительно граней куба Q , дискретна.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть P – выпуклый многогранник в трехмерном сферическом пространстве S^3 , евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ или гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Рассмотрим группу G_P , порожденную отражениями в гранях многогранника P . Будем называть G_P *группой отражений, порожденной многогранником P* . Задача состоит в перечислении многогранников, порождающих дискретные группы отражений.

Несмотря на более чем вековую историю вопроса, ответ известен только для многогранников простейших комбинаторных типов. В 1873 г. Шварц [1] перечислил треугольники на сфере, порождающие дискретные группы отражений. В 1998 г. Клименко и Сакума [2] решили задачу для гиперболических треугольников. В [3]–[5] задача решена для гиперболических четырехугольников, ограниченных гиперболических пирамид и треугольных призм, а также для гиперболических симплексов.

В данной работе задача решена для кубов Ламберта в S^3 , $\mathbb{E}^3$ и $\mathbb{H}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кубом Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ называется многогранник, комбинаторно эквивалентный кубу, все двугранные углы которого прямые, за исключением углов α, β и γ при трех ребрах, никакие два из которых не лежат в одной плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многогранник P называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π .

В п. 1 доказано, что сферический куб Ламберта P порождает дискретную группу отражений тогда и только тогда, когда $P = Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$. В пп. 2 и 3 доказано, что куб Ламберта в евклидовом или гиперболическом пространстве порождает дискретную группу отражений тогда и только тогда, когда P является многогранником Кокстера.

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда Швейцарии, грант № 20-61379.00.

Основные свойства и обозначения. Предположим, что P является многогранником Кокстера. Тогда группа G_P дискретна и P является ее фундаментальной областью.

Предположим, что многогранник P не кокстеровский и группа G_P дискретна. Тогда существует конечное число таких элементов $\gamma \in G_P$, что многогранник γP пересекается с многогранником P . При этом зеркала группы G_P разбивают P на конечное число частей (плоскость называется *зеркалом* группы G_P , если G_P содержит отражение относительно данной плоскости).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Кокстеровским разбиением* выпуклого многогранника называется такое его разбиение на конечное число многогранников Кокстера, что любые два многогранника разбиения, имеющие общую грань, симметричны друг другу относительно нее.

Многогранники разбиения называются *фундаментальными многогранниками* кокстеровского разбиения.

Легко видеть, что любой некокстеровский многогранник P , порождающий дискретную группу отражений, допускает нетривиальное кокстеровское разбиение. Пусть F – фундаментальный многогранник этого разбиения. Тогда группу G_P можно описать как группу G_F , порожденную многогранником Кокстера F .

Далее в настоящей работе рассматриваются лишь многогранники P , для которых группа отражений G_P дискретна.

Многогранники Кокстера будем представлять с помощью их *схемы Кокстера*: вершины $v_1, \dots, v_k$ схемы соответствуют граням $f_1, \dots, f_k$ многогранника, вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $k - 2$, если двугранный угол между гранями f_i и f_j равен π/k (если грани f_i и f_j взаимно ортогональны, то вершины v_i и v_j не соединены).

Для сферических тетраэдров Кокстера мы используем стандартные обозначения (см. рис. 1)

Рис. 1. Сферические тетраэдры Кокстера

1. Сферические кубы Ламберта. В данном пункте доказана

ТЕОРЕМА 1. *Сферический куб Ламберта P порождает дискретную группу отражений тогда и только тогда, когда $P = Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$.*

Сферический многогранник Кокстера, не содержащий двух противоположных точек сферы S^3 , является тетраэдром. Поэтому группа отражений G_P , порожденная кубом P , является в то же время группой отражений G_T , порожденной некоторым сферическим тетраэдром Кокстера T . Ясно, что каждая грань куба P лежит на некотором зеркале группы G_T .

Будем говорить, что многогранник T *разбивает* многогранник P (или P *разбивается* многогранником T), если группа отражений G_P является подгруппой группы отражений G_T .

ЛЕММА 1. *Пусть T – сферический тетраэдр Кокстера. Предположим, T разбивает куб. Тогда схема Кокстера $\bar{T}$ тетраэдра T связна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{T}$ не связна. Тогда либо в $\bar{T}$ есть вершина, не соединенная ни с какой другой вершиной, либо $\bar{T} = G_2^{(m)} + G_2^{(n)}$.

Предположим, что в $\bar{T}$ есть вершина v , не соединенная ни с какой другой вершиной. Пусть v соответствует грани f тетраэдра T и A – вершина тетраэдра T , противолежащая грани f . Тогда грань f перпендикулярна остальным граням тетраэдра. Поэтому любое зеркало группы G_T , не содержащее грани f , проходит через точку A . Отсюда следует, что любой простой многогранник, который разбивается симплексом T , имеет не более четырех граней. Это невозможно, поскольку T разбивает куб.

Предположим, что $\bar{T} = G_2^{(m)} + G_2^{(n)}$. Пусть $\bar{l}_1$ – пересечение пары не ортогональных друг другу граней тетраэдра T и l_1 – прямая, содержащая ребро $\bar{l}_1$. Пусть $\bar{l}_2$ и l_2 – ребро и прямая, соответствующие второй паре взаимно не ортогональных граней. Легко видеть, что любое зеркало группы G_T содержит либо l_1 , либо l_2 . Поэтому любой многогранник, который разбивается тетраэдром T , имеет не более четырех граней и, следовательно, не может быть кубом.

Отсюда следует, что если T разбивает куб, то T является одним из тетраэдров A_4 , B_4 , D_4 , F_4 или H_4 .

ЛЕММА 2. Пусть t – треугольник с углами $(\pi/2, \pi/2, \pi/3)$ или $(\pi/2, \pi/3, \pi/3)$. Тогда t не разбивает правильного прямоугольного треугольника p .

Пусть t – треугольник с углами $(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ или $(\pi/2, \pi/3, \pi/3)$. Тогда t не разбивает треугольника p с углами $(\pi/2, \pi/2, 2\pi/3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно показать, что G_p не является подгруппой в G_t . Подгруппы, порожденные отражениями в сферических группах, порожденных отражениями, перечислены Кокстером (см. [6]).

ЛЕММА 3. Пусть $T = A_4$ или $T = D_4$. Тогда T не разбивает куба Ламберта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что T разбивает куб Ламберта P . Тогда P допускает кокстеровское разбиение с фундаментальным тетраэдром T . Пусть A – вершина куба P , в которой сходятся три взаимно перпендикулярных грани. Пусть s – малая сфера с центром в A . Тогда пересечение s и P является правильным прямоугольным треугольником p . Пусть T_1 – фундаментальный тетраэдр, лежащий в P и имеющий вершину A . Тогда пересечение s и T_1 является треугольником t_1 и t_1 разбивает правильный прямоугольный треугольник p .

Пусть $T = A_4$. Из первой части леммы 2 следует, что t_1 не разбивает правильных прямоугольных треугольников. Противоречие доказывает лемму для случая $T = A_4$.

Пусть $T = D_4$. Тогда один из двугранных углов куба P равен $2\pi/3$ (иначе P является сферическим кубом Кокстера, что невозможно). Поэтому куб Ламберта P имеет такую вершину A , что пересечение P с маленькой сферой с центром в A является треугольником $(\pi/2, \pi/2, 2\pi/3)$. Это противоречит второй части леммы 2.

Таким образом, любой куб Ламберта, порождающий дискретную группу отражений, разбивается одним из тетраэдров B_4 , F_4 или H_4 . Поскольку G_{B_4} является подгруппой группы G_{F_4} , достаточно перечислить кубы Ламберта, которые разбиваются тетраэдрами F_4 и H_4 .

ЛЕММА 4. Тетраэдр F_4 разбивает ровно один куб Ламберта, а именно куб $Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим S^3 как единичную сферу в $\mathbb{E}^4$. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – ортонормированный базис в $\mathbb{E}^4$. Пусть Δ – система корней с группой Вейля G_{F_4} . Тогда

$$\Delta = \left\{ \pm e_i, \pm e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}.$$

Любое зеркало группы G_{F_4} соответствует вектору в Δ , ортогональному к этому зеркалу.

Куб Ламберта P можно представить как пересечение единичной сферы и шестигранного конуса, все грани которого проходят через начало координат. Поэтому P определяется внешними нормальными $f_1, f_2, \dots, f_6$ к граням конуса, т.е. набором из шести векторов, лежащих в Δ . Обозначим через $f_i = 0$ грань конуса с вектором нормали f_i , $i = 1, 2, \dots, 6$.

Для того чтобы шесть векторов определяли комбинаторный куб, эти векторы должны удовлетворять следующим условиям:

- (1) вектор f_i не пропорционален f_j при $i \neq j$;
- (2) система неравенств $(f_i, x) < 0$, $i = 1, \dots, 6$, имеет решение – иначе нет многогранника, соответствующего векторам f_i (здесь x – вектор, а $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение);
- (3) пусть $f_1 = 0$ – грань конуса, противоположная грани $f_4 = 0$; тогда система

$$\begin{cases} (f_1, x) = 0, \\ (f_4, x) = 0, \\ (f_i, x) < 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq 4 \end{cases}$$

не имеет решений (иначе грани $f_1 = 0$ и $f_4 = 0$ пересекаются на единичной сфере и не соответствуют противоположащим граням куба).

Для того чтобы полученный куб был кубом Ламберта, векторы должны удовлетворять дополнительному условию:

- (4) $(f_i, f_j) = 0$, если пара (i, j) отлична от $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$ (мы считаем, что грань $f_1 = 0$ противоположна грани $f_4 = 0$, грань $f_2 = 0$ противоположна грани $f_5 = 0$, а грань $f_3 = 0$ – грани $f_6 = 0$).

Для доказательства леммы достаточно проверить эти условия для каждой шестерки векторов из Δ . Проверка проведена с помощью перебора. При этом найдена ровно одна (с точностью до симметрии) шестерка векторов, удовлетворяющая всем условиям:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, & f_4 &= \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 - e_3 - e_4), \\ f_2 &= e_2, & f_5 &= -e_2 - e_4, \\ f_3 &= e_3 - e_4, & f_6 &= e_1 - e_3. \end{aligned}$$

Куб Ламберта, определяемый этими векторами, равен $Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$. Группа, порожденная этим кубом, совпадает с G_{F_4} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для уменьшения перебора можно зафиксировать три взаимно ортогональных вектора f_1, f_2 и f_3 . С точностью до симметрии существует только четыре таких тройки векторов:

- 1) e_1, e_2, e_3 ;
- 2) $e_1, e_2, e_3 - e_4$;
- 3) $e_1, e_2 - e_3, e_2 + e_3$;
- 4) $e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4$.

ЛЕММА 5. *Тетраэдр H_4 не разбивает кубов Ламберта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4. Рассмотрим S^3 как единичную сферу в $\mathbb{E}^4$. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – ортонормированный базис $\mathbb{E}^4$. Пусть Δ – множество единичных векторов, ортогональных зеркалам группы G_{H_4} (в данном случае Δ не является системой корней). С точностью до движения $\mathbb{E}^4$ множество Δ состоит из следующих 120 векторов:

$$\begin{aligned} & \pm(1, 0, 0, 0), \quad \pm(0, 1, 0, 0), \quad \pm(0, 0, 1, 0), \quad \pm(0, 0, 0, 1), \quad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), \\ & \frac{1}{4}(\pm 2, \pm x, \pm y, 0), \quad \frac{1}{4}(\pm x, \pm y, \pm 2, 0), \quad \frac{1}{4}(\pm y, \pm 2, \pm x, 0), \quad \frac{1}{4}(\pm x, \pm 2, 0, \pm y), \\ & \frac{1}{4}(\pm y, \pm x, 0, \pm 2), \quad \frac{1}{4}(\pm 2, \pm y, 0, \pm x), \quad \frac{1}{4}(\pm 2, 0, \pm x, \pm y), \quad \frac{1}{4}(\pm x, 0, \pm y, \pm 2), \\ & \frac{1}{4}(\pm y, 0, \pm 2, \pm x), \quad \frac{1}{4}(0, \pm x, \pm 2, \pm y), \quad \frac{1}{4}(0, \pm y, \pm x, \pm 2), \quad \frac{1}{4}(0, \pm 2, \pm y, \pm x), \end{aligned}$$

где $x = 1 + \sqrt{5}$, $y = 1 - \sqrt{5}$.

Для доказательства леммы достаточно проверить, что не существует шестерки векторов $f_1, \dots, f_6 \in \Delta$, удовлетворяющей условиям (1)–(4) из доказательства леммы 4.

Любые три взаимно ортогональных вектора из Δ совпадают с $\{e_1, e_2, e_3\}$ с точностью до движения из G_{H_4} . Несложно проверить с помощью условия (4), что куб Ламберта можно задать только с помощью следующих шестерок векторов $\{f_1, \dots, f_6\}$:

$$\begin{aligned} & \{\varepsilon_1 e_1, \varepsilon_2 e_2, \varepsilon_3 e_3, (x, 2, 0, y), \varepsilon_5(0, -y, x, 2), \varepsilon_6(y, 0, 2, -x)\}, \\ & \{\varepsilon_1 e_1, \varepsilon_2 e_2, \varepsilon_3 e_3, (y, x, 0, 2), \varepsilon_5(0, 2, y, -x), \varepsilon_6(2, 0, -x, -y)\}, \\ & \{\varepsilon_1 e_1, \varepsilon_2 e_2, \varepsilon_3 e_3, (2, y, 0, x), \varepsilon_5(0, x, 2, -y), \varepsilon_6(x, 0, -y, -2)\}, \\ & \{\varepsilon_1 e_1, \varepsilon_2 e_2, \varepsilon_3 e_3, (y, x, 0, 2), \varepsilon_5(0, y, x, 2), \varepsilon_6(x, 0, y, 2)\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ и $(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4$.

Никакая из этих шестерок не удовлетворяет условиям (2) и (3).

Леммы 3–5 доказывают теорему 1.

2. Евклидовы кубы Ламберта. Пусть P – куб Ламберта в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ и f – грань куба P . Из определения куба Ламберта следует, что f имеет не менее трех прямых углов. Поскольку четырехугольник f евклидов, все его углы прямые. Таким образом, все плоские углы куба P прямые, а следовательно, прямыми являются и все двугранные углы. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть P – куб Ламберта в $\mathbb{E}^3$ и G_P – группа отражений, порожденная кубом P . Тогда $P = Q(\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ и G_P дискретна.

3. Гиперболические кубы Ламберта. Пусть P – куб Ламберта в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. В данном пункте доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть P – куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$ и G_P – группа отражений, порожденная кубом P . Группа G_P дискретна тогда и только тогда, когда куб Ламберта P является многогранником Кокстера (т.е. $P = Q(\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3)$, где $k_i \geq 3$, $i = 1, 2, 3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что куб P является многогранником Кокстера. Тогда группа G_P дискретна и P является ее фундаментальной областью. Гиперболический куб Ламберта $P = Q(\pi/k_1, \pi/k_2, \pi/k_3)$ существует тогда и только тогда, когда $k_1, k_2, k_3 \geq 3$ (см. [7]). Таким образом, в случае кокстеровских кубов Ламберта теорема 3 очевидна.

В дальнейшем мы считаем, что куб P не является кокстеровским, но группа G_P дискретна. В этом случае P допускает кокстеровское разбиение с некоторым фундаментальным многогранником F .

Следующая лемма доказана в [4].

ЛЕММА 6. Пусть P – ограниченный многогранник в $\mathbb{H}^3$, допускающий кокстеровское разбиение с фундаментальным многогранником F . Если P – пирамида, то F – тетраэдр. Если P – треугольная призма, то F – либо тетраэдр, либо треугольная призма.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Пусть $A, B, C, D, A', B', C', D'$ – вершины куба P . Поскольку P – куб Ламберта, все его ребра, кроме трех, образованы двумя взаимно ортогональными гранями. Пусть $AA', B'C'$ и CD – оставшиеся три ребра (см. рис. 2).

Рис. 2. Куб Ламберта

ЛЕММА 7. Пусть P – некокстеровский куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$, допускающий кокстеровское разбиение. Тогда фундаментальный многогранник F этого разбиения является либо тетраэдром, либо треугольной призмой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку куб P не является кокстеровским, существует зеркало, разрезающее куб и проходящее через $AA', B'C'$ или CD . Пусть μ – зеркало, проходящее через AA' . Зеркало μ режет P на два многогранника. Если хотя бы один из них является треугольной призмой (см. рис. 3а), то лемма следует из леммы 6.

Рис. 3. Зеркала в кубе

Допустим, что ни одна из этих частей не является треугольной призмой (см. рис. 3b). Предположим, что существует зеркало μ' , разрезающее куб и проходящее через $B'C'$ или CD . Предположим, что μ' не отсекает от P треугольной призмы. Тогда μ и μ' делят P на четыре части, хотя бы одна из которых является либо тетраэдром, либо треугольной призмой (см. рис. 4). В этом случае лемма доказана.

Рис. 4. Вершины тетраэдра и треугольной призмы (они обозначены жирными точками)

Предположим, что нет зеркала, проходящего через $B'C'$ или CD и разрезающего куб. Тогда μ разрезает куб, как показано на рис. 3b. Рассмотрим многогранник $A'AKLMB'BC$. Рассмотрим множество Ω многогранников P_i , удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1) P_i лежит в $A'AKLMB'BC$;
- 2) все, кроме одной, грани многогранника P_i являются гранями многогранника P ; оставшаяся грань Π является зеркалом;
- 3) точки B, B' и C – вершины P_i .

Множество Ω не пусто ($A'AKLMB'BC \in \Omega$), Ω содержит конечное число многогранников. Следовательно, существует хотя бы один *минимальный* многогранник $P_0 \in \Omega$, т.е. многогранник, не содержащий других многогранников $P_i \in \Omega$. Обозначим вершины многогранника P_0 , как показано на рис. 3с. Предположим, что существует зеркало μ'' , разрезающее P_0 и проходящее через ребро $A'_0A_0, A_0K_0, K_0L_0, L_0M_0$ или $M_0A'_0$. Тогда либо многогранник P_0 вопреки предположению не является минимальным, либо μ'' отсекает от P тетраэдр или треугольную призму. В последнем случае лемма следует из леммы 6.

Предположим, что нет зеркала μ'' , разрезающего P_0 и проходящего через ребро $A'_0A_0, A_0K_0, K_0L_0, L_0M_0$ или $M_0A'_0$. Ранее мы предположили, что нет зеркала μ' , разрезающего P и проходящего через $B'C'$ или CD . Двугранные углы при остальных ребрах многогранника P_0 прямые, поскольку P – куб Ламберта. Таким образом, многогранник

P_0 является кокстеровским, и следовательно, остроугольным. Грани K_0L_0C и A'_0M_0B многогранника P_0 не пересекаются, но продолжения этих граней имеют общую прямую CD . Это противоречит остроугольности гиперболического многогранника P_0 (см. [8]).

ЛЕММА 8. Пусть P – некокстеровский куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$, допускающий кокстеровское разбиение. Тогда фундаментальный многогранник F этого разбиения является тетраэдром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что F – треугольная призма. Пусть α и β – основания призмы F . Рассмотрим цепочку фундаментальных призм F_i , лежащих внутри P , такую, что F_i и F_{i+1} имеют общее основание. Пусть $\bar{\alpha}_i$ и $\bar{\beta}_i$ – плоскости, содержащие основания призмы F_i . Никакие две из этих плоскостей не пересекаются, поскольку призма F кокстеровская, и следовательно, остроугольная. Поэтому цепочка ограничена двумя взаимно противоположащими гранями куба P .

С помощью таких цепочек несложно показать, что две грани куба P разбиты на треугольники (причем эти разбиения являются кокстеровскими). Оставшиеся четыре грани замощены четырехугольниками одним из способов, показанных на рис. 5 (иначе существует цепочка призм, ограниченная двумя смежными гранями куба). Более подробные аргументы можно найти, например, в [4].

Рис. 5. Возможные разбиения граней куба

Пусть $ABCD$ и $A'B'C'D'$ – грани куба P , разрезанные на треугольники. Поскольку P – куб Ламберта, оставшиеся грани не разрезаны (иначе получился бы гиперболический четырехугольник с четырьмя прямыми углами). Поэтому нет зеркал, разрезающих P и проходящих через $B'C'$ или CD . Поскольку куб P не кокстеровский, существует зеркало, разрезающее куб и проходящее через AA' . Угол $\angle BAC$ грани $ABCD$ разрезан этим зеркалом. Остальные углы грани $ABCD$ прямые. Из [3] следует, что существует ровно два кокстеровских разбиения четырехугольника Ламберта с разрезанным острым углом. Эти разбиения показаны на рис. 6. Таким образом, разбиение грани $ABCD$ симметрично относительно AC , а грани $A'B'C'D'$ – относительно $A'C'$. Ясно, что в этом случае куб P симметричен относительно плоскости $AA'C'C$.

Рассмотрим грань $AA'B'B$. Поскольку P – куб Ламберта, $\angle BA'A = \angle AA'B = \angle ABB' = \pi/2$. Угол $\angle BB'A$ симметричен прямому углу $\angle DD'A$ относительно $AA'C'C$. Следовательно, все углы четырехугольника $AA'B'B$ прямые, что невозможно.

В $\mathbb{H}^3$ существует ровно девять ограниченных тетраэдров Кокстера. Список этих тетраэдров и обозначения приведены на рис. 7.

ЛЕММА 9. Пусть P – некокстеровский куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$, допускающий кокстеровское разбиение с фундаментальным тетраэдром F . Тогда $F = T_6$ или $F = T_7$.

Рис. 6. Кокстеровские разбиения четырехугольников Ламберта

Рис. 7. Ограниченные гиперболические тетраэдры Кокстера. Схемы Кокстера и обозначения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку куб P не кокстеровский, существует зеркало μ , разрезающее куб и проходящее через AA' , $B'C'$ или CD . Будем считать, что μ содержит AA' . Рассмотрим грань $ABCD$. Угол $\angle BAD$ равен $l\pi/k$, где $l, k \in \mathbb{Z}$ и $l \geq 2$. Остальные углы грани $ABCD$ прямые. Поскольку четырехугольник $ABCD$ гиперболический, сумма его углов меньше, чем 2π . Следовательно, $l/k < 1/2$. Так как π/k – двугранный угол тетраэдра F , число k является одним из чисел 2, 3, 4 и 5. Поэтому $l\pi/k = 2\pi/5$, и один из двугранных углов тетраэдра F равен $\pi/5$.

Рассмотрим малую сферу s с центром в точке A . Пересечение s с кубом P является треугольником t с углами $2\pi/5$, $\pi/2$, $\pi/2$. Ограничение кокстеровского разбиения куба P на сферический треугольник t является кокстеровским разбиением треугольника t . Группа отражений, порожденная правильным прямоугольным треугольником t , не является подгруппой группы отражений, порожденной треугольником $(\pi/2, \pi/3, \pi/5)$ (см. [6]). Поэтому t разбит на две копии треугольника $(\pi/5, \pi/2, \pi/2)$. Следовательно, пересечение s с F является треугольником $(\pi/5, \pi/2, \pi/2)$, что возможно, только если $F = T_6$ или $F = T_7$.

ЛЕММА 10. Некокстеровский куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$ не допускает кокстеровского разбиения с фундаментальным тетраэдром T_6 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некокстеровский куб Ламберта P допускает кокстеровское разбиение с фундаментальным тетраэдром T_6 . Тогда некоторая грань f куба P имеет углы $2\pi/5$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$. Площадь этой грани равна $S_f = \pi(2 - 2\pi/5 - 3\pi/2) = \pi/10$.

Несложно проверить, что любой плоский угол любой грани тетраэдра T_6 либо меньше, чем $\pi/4$, либо является прямым. Пусть α – грань T_6 с углом $\pi/5$. Площадь грани α равна $S_\alpha = (\pi - \pi/2 - \pi/5 - \varphi) = 3\pi/10 - \varphi$, где $\varphi < \pi/4$. Таким образом, $S_\alpha > \pi/20$.

Поскольку грань f куба P имеет угол $2\pi/5$, f содержит не менее двух образов гра-

ни α . Это невозможно, поскольку $S_f < 2S_\alpha$.

ЛЕММА 11. *Некокстеровский куб Ламберта в $\mathbb{H}^3$ не допускает кокстеровского разбиения с фундаментальным тетраэдром T_7 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некокстеровский куб Ламберта P допускает кокстеровское разбиение с фундаментальным тетраэдром T_7 . Пусть AA' – ребро куба P , двугранный угол при котором равен $2\pi/5$. Тогда грань $ABCD$ имеет углы $2\pi/5$, $\pi/2$, $\pi/2$, $\pi/2$. Площадь этой грани равна $S_{ABCD} = \pi(2 - 2/5 - 3/2) = \pi/10$.

Рассмотрим ограничение кокстеровского разбиения на грань $ABCD$. Это замощение треугольниками, равными граням тетраэдра T_7 . Не менее двух треугольников в этом замощении имеют угол $\pi/5$. Оставшиеся углы этих треугольников равны $\pi/2$ и $\pi/4$ (плоские углы тетраэдра T_7 легко вычислить в модели Клейна). Площадь треугольника $(\pi/5, \pi/2, \pi/4)$ равна $\pi(1 - 1/2 - 1/4 - 1/5) = \pi/20$. Поэтому $ABCD$ содержит ровно два треугольника, и существует зеркало, проходящее через точки A' , A , C . По аналогичным причинам это зеркало проходит через C' . Отсюда следует, что куб Ламберта P симметричен относительно плоскости $A'ACC'$, что невозможно (см. конец доказательства леммы 8).

Леммы 10 и 11 завершают доказательство теоремы 3.

Работа написана в университете г. Фрибур, Швейцария. Автор благодарит проф. Р. Келлерхалс и университет за гостеприимство. Автор благодарит проф. А. Д. Медных за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Schwarz H. A. Über diejenige Fälle in welchen die Gaussische Reihe eine algebraische Function ihres elementes destellt // Crelle's J. 1873. V. 75. P. 292–335.
- [2] Klimenko E., Sakuma M. Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(H^2)$ containing orientation-reversing elements // Geom. Dedicata. 1998. V. 72. P. 247–282.
- [3] Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic polygons // Europ. J. Combinatorics. 1998. V. 19. P. 801–817.
- [4] Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic pyramids and triangular prisms. math.MG/0212195.
- [5] Феликсон А. Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 134–156.
- [6] Coxeter H. S. M. Finite groups generated by reflections, and their subgroups generated by reflections // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934. V. 30. P. 466–482.
- [7] Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 3. С. 445–478.
- [8] Андреев Е. М. О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 4. С. 521–527.

Независимый Московский университет
E-mail: felikson@mcme.ru

Поступило
21.06.2002
Исправленный вариант
03.12.2002