Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин, О нормальных формах в окрестности двумерных резонансных торов для многомерного ангармонического осциллятора, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 701–713

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:30:47

УДК 517.958

О НОРМАЛЬНЫХ ФОРМАХ В ОКРЕСТНОСТИ ДВУМЕРНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ТОРОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

С. Ю. Доброхотов, М. А. Потеряхин

В работе рассматривается задача построения нормальной формы в окрестности двумерного инвариантного изотропного тора для многомерного ангармонического осциллятора. Построена нормальная форма четвертого порядка по переменным типа гармонического осциллятора. Показано, что наличие резонансов приводит к неполиномиальной зависимости нормальной формы от переменных типа действия.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В работе рассматривается задача построения нормальной формы в окрестности инвариантных многообразий для $(n + 2)$ -мерного ангармонического осциллятора, задаваемого гамильтонианом вида

$$H = \frac{P_1^2 + \omega_1^2 Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2 + \omega_2^2 Q_2^2}{2} + \frac{1}{2} \langle r, \Gamma(Q_1, Q_2) r \rangle, \quad r = {}^t(q, p) \in \mathbb{R}_{qp}^{2n}, \quad (1)$$

$\Gamma - (2n \times 2n)$ -матрица с элементами, гладко зависящими от Q_1, Q_2 ; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение, а левый верхний индекс ^{t} – транспонирование. Частоты (ω_1, ω_2) являются постоянными и могут быть как несоизмеримыми, так и соизмеримыми, причем второй случай представляет для нас больший интерес.

Соответствующая (1) гамильтонова система, очевидно, допускает инвариантное многообразие, задаваемое условием $r = 0$. Динамика на этом многообразии задается гамильтонианом двумерного гармонического осциллятора

$$H_{\text{osc}} = \frac{P_1^2 + \omega_1^2 Q_1^2}{2} + \frac{P_2^2 + \omega_2^2 Q_2^2}{2} \quad (2)$$

и хорошо известна. Полная система, отвечающая (1), как правило, является неинтегрируемой. Мы хотим изучить вопрос о поведении ее решений в окрестности указанного инвариантного многообразия $r = 0$. Известно, что для реализации этой цели одним из наиболее подходящих инструментов является аппарат нормальных форм (см. [1]–[7]), который в подходящих координатах с некоторой точностью и при некоторых условиях на соответствующие частоты позволяет заменить исходный гамильтониан H на более простой, часто порождающий уже интегрируемую гамильтонову систему. Траектории

последней приближенно описывают динамику в окрестности соответствующего многообразия. Такой “приближенный” гамильтониан называется *нормальной формой*.

Как правило, подходящими переменными для построения нормальных форм оказываются переменные типа действие–угол и гармонического осциллятора, а нормальная форма имеет в нерезонансном случае вид полинома по переменным действия, отвечающим за “отклонения” траекторий от исходного инвариантного многообразия. Процедура построения нормальной формы называется *нормализацией*. Важную роль при проведении нормализации играют условия типа соизмеримости или несоизмеримости частот движения на инвариантном многообразии и решений системы уравнений в вариациях в его окрестностях.

Для рассматриваемого гамильтониана динамика на инвариантном многообразии $r = 0$ в случае несоизмеримых частот ω_1 и ω_2 задается почти периодическими траекториями, заметающими двумерные торы. Эти торы расслаивают четырехмерное фазовое пространство с координатами (Q_1, Q_2, P_1, P_2) .

В дальнейшем при построении нормальных форм будут использоваться последовательные преобразования переменных. Переменные действие–угол для двумерного гармонического осциллятора задаются хорошо известными формулами

$$Q_j = \sqrt{\frac{2I_j^{(1)}}{\omega_j}} \cos \varphi_j^{(1)}, \quad P_j = \sqrt{2\omega_j I_j^{(1)}} \sin \varphi_j^{(1)}, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

а соответствующие двумерные торы определяются равенствами

$$I_1^{(1)} = \text{const}, \quad I_2^{(1)} = \text{const}. \quad (4)$$

Переменные соответствующего преобразования мы будем помечать его номером в скобках. В случае несоизмеримости частот ω_1 и ω_2 эти торы выбираются однозначно. Поднимая их в исходное $(2n+2)$ -мерное фазовое пространство, мы получаем двумерные изотропные торы $\Lambda^2(I^{(1)})$, инвариантные относительно фазового потока g_H^t , порожденного уже полным гамильтонианом H . В переменных $(\varphi^{(1)}, I^{(1)}, r)$ они задаются равенствами (4) и $r = 0$. Траектории на торах $\Lambda^2(I^{(1)})$ порождают систему в вариациях:

$$\frac{d}{dt}r = \hat{J}I^{(1)}r, \quad \varphi^{(1)} = \omega t + \varphi_0^{(1)}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1)}(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, I_1^{(1)}, I_2^{(2)})$. Зафиксируем некоторые $I_1^{(1)}, I_2^{(2)} \geq 0$. В случае несоизмеримости частот коэффициенты в системе (5), очевидно, являются почти периодическими функциями t . Напомним, что система (5) называется *приводимой* (см. [3]–[5], [7]), если преобразованием вида $r = V(\varphi^{(1)}, I^{(1)})\zeta$, где $V - 2\pi$ -периодическая функция по углам $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$, эта система приводится к виду $\dot{\zeta} = \widehat{M}\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}^{2n}$; $\widehat{M}$ – матрица размера $2n \times 2n$, зависящая от $I^{(1)}$ и не зависящая от $\varphi^{(1)}$.

Если приводимая система (5) устойчива, то матрицу $\widehat{M}$ можно считать диагональной, на диагонали которой стоят чисто мнимые показатели Флоке $i\beta$. Тогда существует преобразование от переменных $r = {}^t(Q, P)$ к “нормальным” координатам или координатам “типа гармонического осциллятора” $\zeta = (\xi, \bar{\xi})$ (черта означает комплексное сопряжение) [8]–[10]:

$$r = V(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, I_1^{(j)}, I_2^{(j)})\xi + \bar{V}(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, I_1^{(j)}, I_2^{(j)})\bar{\xi}, \quad V = {}^t(Z, W), \quad (6)$$

где Z, W – гладкие матричнозначные функции $Z(\varphi^{(j)}, I^{(j)}), W(\varphi^{(j)}, I^{(j)})$, 2π -периодические по углам $(\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)})$, и для которых выполнены следующие свойства: $Z_l \overline{W}_m - W_l \overline{Z}_m = 2i\delta_{lm}$, $l, m = 1, \dots, n$. В этих переменных система (5) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

β_k – показатели Флоке, $k = 1, \dots, n$, зависящие от $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}$.

Заметим, что переход к переменным $\varphi^{(1)}, I^{(1)}, \xi, \bar{\xi}$ в гамильтоновой системе, отвечающей гамильтониану (1), оказывается не каноническим; каноничность будет достигнута путем введения поправок к переменным действия $I^{(1)}$ (см. раздел 2, [4], [9]).

Если система (5) приводима и устойчива, то на основе результатов [1]–[6], [9], [11] можно показать, что в окрестности изотропного тора, фиксируемого значениями $(I_1^{(1)} = I_1^0, I_2^{(1)} = I_2^0, r = 0)$, при некоторых дополнительных условиях типа нерезонансности на частоты (ω, β) можно построить преобразования к переменным типа действие–угол и гармонического осциллятора. Пусть после k замен переменных построено преобразование $(\varphi^{(1)}, I^{(1)}, \xi, \bar{\xi}) \rightarrow (\varphi^{(k)}, I^{(k)}, \xi^{(k)}, \bar{\xi}^{(k)})$ и $\Delta I = I^{(k)} - I^0$, т.е. ΔI – суммарная поправка к действию после k преобразований. Тогда при некоторых условиях типа нерезонансности частот согласно [4], [9] гамильтониан (1) принимает вид

$$H = \langle \omega, (I^0 + \Delta I) \rangle + \langle \beta, \rho \rangle + \sum_{i+j=2, j \geq 1}^N \mathcal{H}_{ij}(I^0) \Delta I^i \rho^j + O(|\rho|^{1/2}(|\Delta I| + |\rho|)^N), \quad (8)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \rho = \xi^{(k)} \bar{\xi}^{(k)}$. Число N может быть выбрано достаточно большим; при условиях типа аналитичности невязку можно сделать экспоненциально малой. При этом заметим, что вычисления конкретных выражений для $\mathcal{H}_{ij}$ могут представлять определенные трудности даже для достаточно небольших N . С другой стороны, с точки зрения приложений (например, для квантовых спектральных задач [9], [12]) в (8) бывает интересно явно вычислить коэффициенты для $N = 1$ и $N = 2$.

В этой работе нас в основном интересует построение формул, аналогичных (8), в резонансном случае – в случае соизмеримых частот ω_1 и ω_2 : $\omega_1/\omega_2 = m_1/m_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Этот случай довольно сильно отличается от нерезонансного: все траектории двумерного гармонического осциллятора являются замкнутыми кривыми – хорошо известными фигурами Лиссажу, а в подходящих переменных гамильтониан H_{osc} зависит только от одного действия (считаем, что от $I_1^{(2)}$):

$$H_{\text{osc}} = \omega_0 I_1^{(2)}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_1}{m_1} = \frac{\omega_2}{m_2}.$$

Один из вариантов выбора таких подходящих переменных на основе уже построенных переменных $(\varphi^{(1)}, I^{(1)})$ определяется следующими формулами:

$$\begin{cases} I_1^{(2)} = m_1 I_1^{(1)} + m_2 I_2^{(1)}, & \varphi_1^{(2)} = n_1 \varphi_1^{(1)} + n_2 \varphi_2^{(1)}, \\ I_2^{(2)} = n_2 I_1^{(1)} - n_1 I_2^{(1)}, & \varphi_2^{(2)} = m_2 \varphi_1^{(1)} - m_1 \varphi_2^{(1)}, \end{cases} \quad (9)$$

где $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 1$, $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ (их существование гарантируется соответствующими утверждениями теории чисел). Выбор (n_1, n_2) не является единственным и мы фиксируем его каким-либо образом. Важно подчеркнуть, что частота ω_0 (как и частоты ω_1 и ω_2) постоянна и не зависит от переменных действия, что делает рассматриваемую задачу отличной от резонансных задач, в которых появляются траектории Пуанкаре (см. теорему 4.8 из [3]).

В резонансном случае торы (4) остаются инвариантными относительно фазового потока g_H^t и фазовое пространство полной системы по-прежнему может быть расслоено на двумерные торы, но теперь выбор таких торов уже не однозначен. Это связано с тем, что инвариантные многообразия, движение на которых задается гамильтонианом $H_{\text{осс}}$, могут быть “склеены” из набора одномерных замкнутых траекторий, задаваемых значениями $(\varphi_2^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)})$. В частности, из замкнутых траекторий можно получать различные двумерные торы, задавая при фиксированном значении $I_1^{(2)} = I_1^0$ различные способы “склейки” наборов таких траекторий. Один из возможных способов задания тора – построить функцию F в $\mathbb{R}_{Q,P}^4$, находящуюся в инволюции с гамильтонианом $H_{\text{осс}}$. В переменных $(\varphi^{(2)}, I^{(2)})$ такая функция, очевидно, не зависит от $\varphi_1^{(2)}$ и тогда соответствующие двумерные торы задаются равенствами $F(\varphi_2^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}) = \text{const}$, $I_1^{(2)} = \text{const}$ при условии, что последние равенства задают компактные множества. Указанная функция F может зависеть и от других параметров. На построенных торах можно ввести новые переменные действие–угол $(\psi_1, \psi_2, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$. В этих переменных функция F будет зависеть только от $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$.

Вернемся к системе уравнений в вариациях (5). Теперь переменные $\varphi_2^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}$ входят в нее как параметры и, в отличие от нерезонансного случая, она является системой с периодическими коэффициентами. Поэтому для нее применима теория Флоке–Ляпунова (см., например, [10]). Условие приводимости выполнено автоматически, но теперь матрица $\widehat{M}$ уже зависит и от угла $\varphi_2^{(2)}$. В случае устойчивости системы в вариациях мы можем построить преобразования типа (6) и привести ее к виду (7) с показателями Флоке, зависящими от $I^{(2)}$ и, вообще говоря, от угла $\varphi_2^{(2)}$.

Мы хотим построить нормальную форму для резонансного случая. Основной результат данной работы состоит в том, что в резонансном случае нормальная форма гамильтониана в подходящих переменных при выполнении некоторых условий в окрестности некоторого инвариантного тора $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1^0$, $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2^0$ будет иметь структуру, отличную от полиномиальной по ΔI и ρ . Именно, для $N = 2$

$$H = \omega_0 \mathcal{J}_1 + \sum_{i=1}^2 \mathcal{H}_i(\mathcal{J}, \alpha) |\rho|^i + O(|\mathcal{J} - \mathcal{J}^0|^3 + |\rho|^{5/2}), \quad (10)$$

где $|\rho| = \sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i = \rho_i / |\rho|$.

Множество задач с резонансными значениями параметров относительно невелико. Тем не менее, к таким ситуациям часто приводит рассмотрение реальных многомерных квантомеханических задач. С другой стороны, если даже в исходной задаче частоты являются несоизмеримыми, но построение соответствующих решений проводится с помощью компьютера, то частоты в машинном представлении являются рациональными, т.е. всегда будут резонансными.

Заметим, что, как правило, методы построения нормальных форм опираются на тот факт, что для исходной задачи уже построены канонические переменные типа действие–угол. Существование таких переменных в окрестности изотропного тора следует

из теоремы Дарбу–Вейнштейна (см. [13]); ясно также, что они могут быть введены различными способами. Однако вопрос о построении явных формул для них часто оказывается нетривиальным и в конкретных задачах решается по-разному. В данной работе используются явные универсальные формулы, полученные в недавней работе [9], справедливые в окрестности индивидуальных изотропных торов.

Отметим, что в задачах с маломерными инвариантными множествами (их размерность $k < n$ (в нашем случае $k = 2 < n + 2$)) существуют критические значения размерностей как инвариантного подпространства, так и системы уравнений в вариациях $(n - k)$ (в нашем случае $n + 2 - k$). Ситуация может существенно меняться при переходе от одних значений к другим. Например, для гамильтониана вида (1) при $n = 1$ можно показать, что нормальная форма в окрестности некоторого инвариантного тора и в резонансном случае будет иметь вид полинома, аналогичный (8), а при $n \geq 2$ – уже нет.

2. “Почти” нормальная форма четвертого порядка. Пусть при фиксированном $I_1^{(2)} = \text{const}$ мы выбрали некоторую функцию $F(\varphi_2^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)})$, находящуюся в инволюции с $H_{\text{осс}}$, зафиксировав тем самым выбор инвариантного двумерного тора. Как уже было сказано во введении, для этого тора всегда можно построить переменные типа действие–угол: $(\varphi^{(2)}, I^{(2)}) \rightarrow (\varphi^{(3)}, I^{(3)})$. В этих переменных функция $F(\varphi_2^{(2)}, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}) = F^{(3)}(I_1^{(3)}, I_2^{(3)})$. Зафиксировав значения $I_1^{(3)}$ и $I_2^{(3)}$, мы получаем некоторый индивидуальный тор Λ . Полный гамильтониан (1) имеет форму

$$H^{(3)} = \omega_0 I_1^{(3)} + \frac{1}{2} \langle r, \Gamma^{(3)}(\varphi^{(3)}, I^{(3)}) r \rangle, \quad (11)$$

где $\Gamma^{(3)}(\varphi^{(3)}, I^{(3)})$ – гладкая 2π -периодическая функция по переменным $(\varphi_1^{(3)}, \varphi_2^{(3)})$.

Теперь вернемся в исходное $(2n + 2)$ -мерное пространство. Согласно [9] каноническая замена переменных, задаваемая с помощью формул

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi_1^{(3)} = \varphi_1^{(4)}, & \varphi_2^{(3)} = \varphi_2^{(4)}, \\ I_1^{(3)} = I_1^{(4)} + \Delta I_1^{(4)} + g_1, & I_2^{(3)} = I_2^{(4)} + \Delta I_2^{(4)} + g_2, \\ r = V(\varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}, I_1^{(4)}, I_2^{(4)}) \xi^{(4)} + \overline{V}(\varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}, I_1^{(4)}, I_2^{(4)}) \bar{\xi}^{(4)}, \\ g_m = g_m(\varphi_1^{(4)}, \varphi_2^{(4)}, \xi^{(4)}, I_1^{(4)}, I_2^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)}) \end{cases} \\ & \equiv \frac{1}{4i} \left\langle V \xi^{(4)} + \overline{V} \bar{\xi}^{(4)}, \hat{J} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_m} \xi^{(4)} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial \varphi_m} \bar{\xi}^{(4)} \right) \right\rangle, \quad m = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

в окрестности индивидуального тора Λ приводит гамильтониан (11) к виду

$$\begin{aligned} H &= \omega_0 (I_1^0 + \Delta I_1^{(4)}) + \sum_{k=1}^n \beta_k (\varphi_2^{(4)}, I_1^0, I_2^0) \xi_k^{(4)} \bar{\xi}_k^{(4)} \\ &+ \frac{1}{4i} \sum_{m=1}^2 H_m^\Gamma (\Delta I_m^{(4)} + g_m) + O(|\xi^{(4)}|^5 + |\Delta I^{(4)}|^3), \\ H_m^\Gamma (\varphi^{(4)}, I^0, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)}) &= \left\langle V \xi^{(4)} + \overline{V} \bar{\xi}^{(4)}, \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m^{(4)}} (V \xi^{(4)} + \overline{V} \bar{\xi}^{(4)}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, мы построили для гамильтониана полной системы (11) нормальную форму 2-го порядка, зависящую от угла $\varphi_2^{(4)}$. Теперь необходимо построить нормальную форму для членов четвертой степени по переменным $(\xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)})$ и смешанных произведений членов первого порядка по $\Delta I_m^{(4)}$ и второго – по $(\xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)})$, которая тоже может зависеть от $\varphi_2^{(4)}$.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие равенства.*

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\left\langle \bar{V}, \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} V \right\rangle + \left\langle V, \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} \bar{V} \right\rangle \right) d\varphi_1 = -\frac{\partial B}{\partial I_m}, \quad m = 1, 2, \quad (14)$$

где матрицы V и B определены формулами (6) и (7) соответственно.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} = \frac{\partial \Gamma(\varphi, I_1, I_2)}{\partial I_m} \Big|_{I_1=I_1^0, I_2=I_2^0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в уравнение (5) выражение (6), продифференцируем по I_m и выпишем по-отдельности члены при ξ и $\bar{\xi}$, сгруппировав их таким образом, чтобы производные по I_m от V стояли в левой части:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + B - \hat{J}\Gamma \right) \frac{\partial V}{\partial I_m} &= -\frac{\partial B}{\partial I_m} V + \hat{J} \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} V, \\ \left(\frac{d}{dt} - B - \hat{J}\Gamma \right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial I_m} &= \frac{\partial B}{\partial I_m} \bar{V} + \hat{J} \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} \bar{V}. \end{aligned}$$

Умножим обе части первого уравнения на $-{}^t\bar{V} \hat{J}$, второе на ${}^tV \hat{J}$, и вычтем из первого второе. Последующее интегрирование полученного равенства от 0 до 2π по переменной φ_1 приводит к (14).

Следующее утверждение дает нормальную форму четвертого порядка гамильтониана (13) в окрестности тора Λ .

ЛЕММА 2. *Пусть при $\varphi_2^{(4)} \in [0, 2\pi]$ и некоторых фиксированных значениях $I_1^{(4)} = I_1^0$, $I_2^{(4)} = I_2^0$ выполнены условия*

$$i\omega_0 l + (\nu_{k_1} \beta_{k_1} - \nu_{k_2} \beta_{k_2}) \neq 0, \quad |\nu| = 2, \quad (15)$$

$$i\omega_0 l + (\nu_{k_1} \beta_{k_1} + \nu_{k_2} \beta_{k_2} - \nu_{k_3} \beta_{k_3} - \nu_{k_4} \beta_{k_4}) \neq 0, \quad |\nu| = 4, \quad (16)$$

где $|\nu| = \sum_{k=1}^n \nu_k$, $\nu_k \geq 0$, $k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, \dots, n$, $\nu_k, k, l \in \mathbb{Z}$. Тогда в окрестности инвариантного двумерного тора Λ , заданного значениями I_1^0 и F , существует

каноническая замена переменных $(\varphi_2^{(4)}, I_1^{(4)}, I_2^{(4)}, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)}) \rightarrow (\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \xi, \bar{\xi})$, которая приводит гамильтониан (13) к виду

$$\begin{aligned} H = & \omega_0 \mathcal{I}_1 + \sum_{k=1}^n \beta_k(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) \xi_k \bar{\xi}_k \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{kl}(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) \cdot (\xi_k \bar{\xi}_k)(\xi_l \bar{\xi}_l) + O(|\xi|^5 + |\mathcal{I} - I^0|^3), \\ \gamma_{kl}(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) \equiv & -\frac{1}{32\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^2 \left(\sum_{i=2}^3 \sum_{j=2}^3 (\hat{A}_{mkk}^i \hat{G}_{mll}^j + \hat{A}_{mll}^i \hat{G}_{mkk}^j \right. \\ & + (-1)^{i+j} (\hat{A}_{mkl}^i \hat{G}_{mll}^j + \hat{A}_{mll}^i \hat{G}_{mkl}^j)) \\ & \left. + \sum_{i=1}^4 (\hat{A}_{mkl}^i \hat{G}_{kl}^{5-i} + \hat{A}_{mll}^i \hat{G}_{mll}^{5-i} + \hat{A}_{mkl}^i \hat{G}_{mll}^{5-i} + \hat{A}_{mll}^i \hat{G}_{mkl}^{5-i}) \right) d\varphi_1, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_m^1 &= {}^t V \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} V, & \hat{A}_m^2 &= {}^t V \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} \bar{V}, & \hat{A}_m^3 &= {}^t \bar{V} \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} V, & \hat{A}_m^4 &= {}^t \bar{V} \frac{\partial \Gamma}{\partial I_m} \bar{V}, \\ \hat{G}_m^1 &= {}^t V \hat{J} V_{\varphi_m}, & \hat{G}_m^2 &= {}^t V \hat{J} \bar{V}_{\varphi_m}, & \hat{G}_m^3 &= {}^t \bar{V} \hat{J} V_{\varphi_m}, & \hat{G}_m^4 &= {}^t \bar{V} \hat{J} \bar{V}_{\varphi_m} \end{aligned}$$

– матрицы размера $n \times n$.

Доказательство этой леммы проводится с помощью стандартной для теории нормальных форм процедуры. Для полноты изложения мы приводим его в разделе 5.

3. Усреднение по углу. Гамильтониан исходной системы приведен к форме, которая содержит угловую переменную φ_2 . Это связано с наличием резонансного соотношения для частот. Поэтому, как было указано во введении, для устранения зависимости формы (17) от φ_2 построим функцию $F(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, находящуюся в инволюции с гамильтонианом двумерного осциллятора $H_{\text{ос}}$.

Описанная выше процедура построения формы (17) зависит только от факта существования индивидуального тора и выполнения условий (15), (16). Поэтому теперь мы можем воспользоваться полученным выражением (17) для нахождения подходящего тора Λ . Так как переменная φ_2 входит только в возмущение, мы возьмем в качестве функции F следующее выражение:

$$F(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, (\xi \bar{\xi})) = \sum_{k=3}^{n+2} \beta_k \xi_l \bar{\xi}_k + \sum_{k=3}^{n+2} \sum_{l=3}^{n+2} \gamma_{kl} (\xi_k \bar{\xi}_k)(\xi_l \bar{\xi}_l), \quad (18)$$

$\beta_l = \beta_l(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, $\gamma_{kl} = \gamma_{kl}(\varphi_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$, считая при этом, что значения $\mathcal{I}_1$ и произведения $(\xi_k \bar{\xi}_k)$ являются фиксированными. Теперь мы покажем, что с помощью некоторого канонического преобразования можно построить новые переменные действие–угол $(\varphi, \mathcal{I}) \rightarrow (\psi, J)$, в которых функция F не будет зависеть от угловой переменной mod $O((\xi + \bar{\xi})^6)$, а значит нормальная форма (17) не будет зависеть от угла по крайней мере mod $O((\xi + \bar{\xi})^5)$. Сначала сделаем каноническую замену переменных $(\xi_l, \bar{\xi}_l) \rightarrow (\theta_l, \rho_l)$:

$\xi_l = \sqrt{\rho_l/2}e^{i\theta_l}$, $\bar{\xi}_l = \sqrt{\rho_l/2}e^{-i\theta_l}$, $l = 1, \dots, n$. Так как значения переменной $\mathcal{J}_1$ и ρ_l , $l = 1, \dots, n$, фиксированны, равенство $F = \text{const}$ задает инвариантный тор (“склеенный” из замкнутых траекторий).

Функция F задает одномерную гамильтонову систему в переменных $(\varphi_2, \mathcal{J}_2)$. Умножим и разделим правую часть (18) на $\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2}$ и положим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k = \rho_k/\rho$, $k = 1, \dots, n$. В окрестности выбранного инвариантного тора значения ρ_k являются малыми; следовательно, мы можем считать ρ малым параметром. Гамильтониан F в новых обозначениях принимает вид

$$F^{(1)} \equiv \frac{F}{\rho} = F_0^{(1)}(\varphi_2, I_1^0, \mathcal{J}_2, \alpha) + \rho F_1^{(1)}(\varphi_2, I_1^0, \mathcal{J}_2, \alpha), \quad (19)$$

$F_0^{(1)} \equiv i \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k$, $F_1^{(1)} \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} \alpha_k \alpha_l$. Здесь мы снова используем верхний индекс в скобках для обозначения номера замены переменных. Для приведения гамильтониана (19) к нормальной форме можно воспользоваться обычными методами усреднения [1], [2], [4], [5]. Для этого введем новые канонические переменные действие–угол традиционным способом:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{J}_2 d\varphi_2 \big|_{F_0^{(1)}(\varphi_2, I_1^0, \mathcal{J}_2)} = \text{const}, \\ \psi_2 &= \frac{\partial}{\partial J_2} \int_0^\varphi \mathcal{J}_2(J_2) d\tau \big|_{F_0^{(1)}(\varphi_2, I_1^0, \mathcal{J}_2(J_2))} = \text{const}. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда гамильтониан (19) принимает вид

$$F^{(2)} = F_0^{(2)}(I_1^0, J_2, \Delta I_2^{(2)}, \alpha) + \rho F_1^{(2)}(\psi_2, I_1^0, J_2, \alpha). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае зависимость $F_0^{(2)}$ от параметров α_k носит нерегулярный характер. В противном случае, каноническое преобразование, задаваемое формулами (20) уничтожало бы зависимость от ψ_2 во всех β_l , $l = 1, \dots, n$, одновременно при переходе от угла φ_2 к ψ_2 .

Так как $\beta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, а ρ_k не равны нулю одновременно, то $\partial F_0^{(2)}/\partial J_2 \neq 0$. Тогда существует каноническое преобразование $(\psi_2, J_2) \rightarrow (\psi_2^{(1)}, J_2^{(1)})$, приводящее $F^{(2)}$ к виду

$$F^{(3)} = F_0^{(3)}(I_1^0, J_2^{(1)}, \alpha) + \rho F_1^{(3)}(I_1^0, J_2^{(1)}, \alpha) + O(\rho^2), \quad (22)$$

где $F_1^{(3)} = (1/(2\pi)) \int_0^{2\pi} F_1^{(2)}(\psi_2, I_1^0, J_2^{(1)}, \alpha) d\psi_2$.

Таким образом, мы получили комбинацию канонических преобразований, которая уничтожает зависимость от угла φ_2 в (19) до членов порядка $O(\rho^2)$. Переобозначим $\psi_2^{(1)} = \varphi_2$, $J_2^{(1)} = I_2$.

ТЕОРЕМА 1. В окрестности двумерного тора в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{\varphi, I^0}^4$, заданного фиксированным значением $I_1^{(2)} = I_1^0$ (см. (9)) и условием $F(\varphi_2, I_1^0, I_2, \rho^0) = \text{const}$, где F задана формулой (18) при некоторых фиксированных значениях ρ_l^0 , $l = 1, \dots, n$, гамильтониан (1) приводится к виду (10) при условии, что для всех точек этого тора выполнены условия нерезонансности (15), (16).

4. Четырехмерный ангармонический осциллятор. В формуле (17) мы ограничиваемся четвертым порядком по переменным $(\xi, \bar{\xi})$. Поэтому набор резонансных соотношений конечен. В силу непрерывности функций β_k , $k = 1, \dots, n$, соответствующие множества резонансных точек $(\psi_2^{(1)}, J_2^{(1)})$ могут образовывать либо замкнутые, либо не замкнутые 2π -периодические по $\psi_2^{(1)}$ кривые. Соответственно, множество нерезонансных точек лежит между этими кривыми и будет открытым. Указанная процедура “склейки” тора и последующего усреднения по нему возможна только в том случае, если линии уровня в формулах (20) не пересекаются и не касаются с резонансными кривыми. Несмотря на конечность набора резонансных соотношений, это требование может существенно уменьшить число торов, для которых возможно построение нормальной формы (10). Более того, может так случиться, что условия (15), (16) будут справедливы лишь для интегрируемых случаев (например, для гармонического осциллятора). Пример, рассмотренный ниже, показывает, что условия (15), (16) могут быть выполнены, а нормальная форма (10) может быть построена для нетривиальных ситуаций.

Рассмотрим четырехмерный ангармонический осциллятор с гамильтонианом, задаваемым формулой (11), где

$$\Gamma(\varphi, I) = \begin{pmatrix} \omega_3^2(1 + 2\varepsilon f_3(\varphi, I)/\omega_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_4^2(1 + 2\varepsilon f_4(\varphi, I)/\omega_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

ε предполагается малой фиксированной константой, f_3, f_4 – аналитические 2π -периодические по углам функции. Например, в рассматриваемом ниже примере функции f_3 и f_4 получены из частот $\Omega_i^2(Q_1, Q_2) = \omega_i(Q_1^2 + Q_2^2)/2$, $i = 3, 4$, при помощи преобразований (3), (9).

Согласно теории Флоке–Ляпунова [10] матрица показателей Флоке B из (7) может быть представлена в виде

$$B(\varphi_2, I_1, I_2) = \begin{pmatrix} \omega_3 + \varepsilon \langle f_3 \rangle + O(\varepsilon^2) & 0 \\ 0 & \omega_4 + \varepsilon \langle f_4 \rangle + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$\langle f_i \rangle \equiv \langle f_i(\varphi_2, I_1, I_2) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2) d\varphi_1, \quad i = 3, 4.$$

Функции β_3 и β_4 при $\varepsilon > 0$ являются функциями (φ_2, I_1, I_2) , 2π -периодическими по φ_2 . Переменная I_1 фиксирована значением энергии системы, поэтому произвол остался в выборе (φ_2, I_2) .

На первом этапе не будем принимать в рассмотрение слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$. При $\varepsilon = 0$ показатели Флоке β_3 и β_4 равны частотам ω_3 и ω_4 соответственно. Тогда множества резонансных значений (β_3, β_4) образуют прямые на плоскости (ω_3, ω_4) . В силу замкнутости области определения β_3 и β_4 значения β_3 и β_4 ограничены сверху и снизу. Согласно формуле (24) эти ограничения определяются минимумами и максимумами функций $\langle f_3 \rangle$ и $\langle f_4 \rangle$. Введем следующее обозначение: $\langle \hat{f}_i \rangle = \max_{(\varphi_2, I_2)} |\langle f_i \rangle|$. Справедливы следующие оценки: $\beta_3 - \omega_3^0 \in [-\varepsilon \langle \hat{f}_3 \rangle, \varepsilon \langle \hat{f}_3 \rangle]$ и $\beta_4 - \omega_4^0 \in [-\varepsilon \langle \hat{f}_4 \rangle, \varepsilon \langle \hat{f}_4 \rangle]$. В

процессе построения нормальной формы, не зависящей от угла φ_2 , значения показателей Флоке останутся в этих интервалах. Пусть R – радиус окрестности нерезонансной точки (ω_3^0, ω_4^0) , точки которой также являются нерезонансными. Тогда при

$$\varepsilon < \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{R}{\sqrt{\langle \hat{f}_3 \rangle^2 + \langle \hat{f}_4 \rangle^2}}$$

значения (β_3, β_4) принадлежат нерезонансной окрестности точки (ω_3^0, ω_4^0) .

Теперь примем во внимание слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$. В соответствии со стандартной теорией возмущений в силу непрерывности всех функций следует, что если соотношения выполнены при некотором ε_0 , то наличие поправок следующих порядков по ε_0 приведет к сужению окрестности на величину порядка $O(\varepsilon_0^2)$. Таким образом, мы показали существование некоторой нерезонансной окрестности точки (ω_3^0, ω_4^0) , а значит и торов, порождающих форму (17), не зависящую от угла φ_2 .

Проиллюстрируем сказанное примером численного построения соответствующей нормальной формы для четырехмерного ангармонического осциллятора (23) с функциями $f_i = 2\omega_i(n_1 I_1 + m_2 I_2)/\omega_1 + 2\omega_i(n_2 I_1 - m_1 I_2)/\omega_2$, $i = 3, 4$. На рис. 1 представлены линии уровня функции F , определенной в (18), а также резонансные кривые.

Рис. 1. Линии уровня и резонансные кривые

Номерами $\langle 1.1 \rangle$ – $\langle 1.3 \rangle$ обозначены кривые соответствующие фиксированным значениям $\rho = (1.5, 0.5)$, а $\langle 2.1 \rangle$ – $\langle 2.3 \rangle$ – значениям $\rho = (0.5, 1.5)$. Номерами $\langle * - 1 \rangle$ – $\langle * - 2 \rangle$ обозначены резонансные кривые. Как видно из рис. 1, имеются пересечения с резонансной кривой только для кривой $\langle 2.3 \rangle$. Это означает, что для этой кривой описанная процедура “склейки” тора не справедлива.

На рис. 2 представлены проекции двумерных инвариантных торов в четырехмерном фазовом пространстве гармонического осциллятора, “склеенных” с помощью кривых $\langle 1.2 \rangle$ и $\langle 2.2 \rangle$, на конфигурационное пространство двумерного гармонического осциллятора. Видно, что проекции торов, соответствующих “близким” значениям параметра I_2 ,

Рис. 2. Проекция инвариантного тора

имеют “искривленные” края, форма которых довольно существенно различается. В нерезонансном случае такие проекции “одинаковые” прямоугольники, всюду плотно покрываемые незамкнутыми траекториями.

В заключение этого раздела отметим, что при построении нормальных форм более высокого порядка число резонансных соотношений увеличивается и, соответственно, множество инвариантных торов, построенных с помощью предложенной процедуры, может уменьшаться. Более того, при $N \rightarrow \infty$ это множество вообще может исчезнуть. Однако с точки зрения приложения к спектральным задачам квантовой механики интерес представляет возможность построения инвариантных торов и нормальных форм для конечных N . Полезные следствия возникают уже при $N = 4$. Собственно, рассматриваемые здесь вопросы возникли при построении асимптотических собственных значений и функций операторов Шрёдингера (см. также [12], [14], [16], [17]).

5. Вычисление коэффициентов нормальной формы четвертого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Коэффициенты γ_{kl} получаются в результате стандартной процедуры нормализации [4], [5], основанной на использовании производящей функции и равенства (14). Для того, чтобы привести гамильтониан (13) к виду (17), воспользуемся производящей функцией, что автоматически обеспечит каноничность преобразования, и выведем необходимые и достаточные условия существования этого преобразования.

Рассмотрим производящую функцию S в следующем виде:

$$S = \varphi^{(4)} \Delta I^{(5)} + \xi^{(4)} \bar{\xi}^{(5)} + S_2 + S_4,$$

$$S_2 = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \sum_{|\nu|=2} S_{mlk_1k_2\nu_{k_1}\nu_{k_2}}^2 \cdot \Delta I_m^{(5)} (\xi_{k_1}^{(4)})^{\nu_{k_1}} (\bar{\xi}_{k_2}^{(5)})^{\nu_{k_2}} e^{il\varphi_1^{(4)}}, \quad (25)$$

$$S_4 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_3=1}^n \sum_{k_4=1}^n \sum_{|\nu|=4} S_{lk_1k_2k_3k_4\nu_{k_1}\nu_{k_2}\nu_{k_3}\nu_{k_4}}^4 \times (\xi_{k_1}^{(4)})^{\nu_{k_1}} (\xi_{k_2}^{(4)})^{\nu_{k_2}} (\bar{\xi}_{k_3}^{(5)})^{\nu_{k_3}} (\bar{\xi}_{k_4}^{(5)})^{\nu_{k_4}} e^{il\varphi_1^{(4)}}, \quad (26)$$

где

$$|\nu| = \sum_{k=1}^n \nu_k, \quad \nu_k \geq 0, \quad S_{mlk_1k_2\nu_{k_1}\nu_{k_2}}^2 = S_{mlk_1k_2\nu_{k_1}\nu_{k_2}}^2(\varphi_2^{(4)}, I^0), \\ S_{lk_1k_2k_3k_4\nu_{k_1}\nu_{k_2}\nu_{k_3}\nu_{k_4}}^4 = S_{lk_1k_2k_3k_4\nu_{k_1}\nu_{k_2}\nu_{k_3}\nu_{k_4}}^4(\varphi_2^{(4)}, I^0).$$

Тогда переменные $(\varphi^{(5)}, \Delta I^{(4)}, \xi^{(5)}, \bar{\xi}^{(4)})$ выражаются следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi^{(5)} = \varphi^{(4)}, \\ \Delta I_m^{(4)} = \Delta I_m^{(5)} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_m^{(4)}} + \frac{\partial S_4}{\partial \varphi_m^{(4)}} + O((\xi^{(4)} + \bar{\xi}^{(5)})^4 + (\Delta I^{(5)})^5), \quad m = 1, 2, \\ \bar{\xi}^{(4)} = \bar{\xi}^{(5)} + \frac{\partial S_2}{\partial \xi^{(4)}} + \frac{\partial S_4}{\partial \xi^{(4)}} + O((\xi^{(4)} + \bar{\xi}^{(5)})^4 + (\Delta I^{(5)})^5), \\ \xi^{(5)} = \xi^{(4)} + \frac{\partial S_2}{\partial \bar{\xi}^{(5)}} + \frac{\partial S_4}{\partial \bar{\xi}^{(5)}} + O((\xi^{(4)} + \bar{\xi}^{(5)})^4 + (\Delta I^{(5)})^5). \end{cases} \quad (27)$$

После подстановки в гамильтонианы (13), (17), мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_1^{(4)}} + \left(\left\langle B\xi^{(4)}, \frac{\partial}{\partial \xi^{(4)}} \right\rangle - \left\langle B\bar{\xi}^{(5)}, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{(5)}} \right\rangle \right) S_2 \\ = \sum_{m=1}^2 \left(\left\langle \xi^{(4)}, \frac{\partial B}{\partial I_m^{(5)}} \bar{\xi}^{(5)} \right\rangle - H_m^\Gamma(\varphi^4, I^0, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(5)}) \right) \Delta I_m^{(5)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial S_4}{\partial \varphi_1^{(4)}} + \left(\left\langle B\xi^{(4)}, \frac{\partial}{\partial \xi^{(4)}} \right\rangle - \left\langle B\bar{\xi}^{(5)}, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{(5)}} \right\rangle \right) S_4 \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} (\xi_k^{(4)} \bar{\xi}_k^{(5)}) (\xi_l^{(4)} \bar{\xi}_l^{(5)}) - \frac{1}{4i} \sum_{m=1}^2 H_m^\Gamma(\varphi^4, I^0, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(5)}) g_m. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя представления (25) и (26), мы приравняем слагаемые одинаковой степени по переменным $\Delta I_1^{(5)}, \Delta I_2^{(5)}, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(5)}$. Предположим, что выполнены условия разрешимости для уравнений (28), (29). Так как по условию на нашем индивидуальном торе выполнены условия (15), (16), используя формулу (14) из леммы 1, мы решаем систему (28), (29) и находим производящую функцию S . Подставляя ее в (27) и разрешая полученную систему относительно переменных $\varphi^{(5)}, \Delta I^{(5)}, \xi^{(5)}, \bar{\xi}^{(5)}$, получаем каноническое преобразование $(\varphi^{(4)}, \Delta I^{(4)}, \xi^{(4)}, \bar{\xi}^{(4)}) \rightarrow (\varphi^{(5)}, \Delta I^{(5)}, \xi^{(5)}, \bar{\xi}^{(5)})$, приводящее гамильтониан (13) к виду

$$\begin{aligned} H = \omega_0(I_1^0 + \Delta I_1^{(5)}) + \sum_{k=1}^n \beta_k \xi_k^{(5)} \bar{\xi}_k^{(5)} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^2 \mu_{mk} \Delta I_m \xi_k^{(5)} \bar{\xi}_k^{(5)} \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} \cdot (\xi_k^{(5)} \bar{\xi}_k^{(5)}) (\xi_l^{(5)} \bar{\xi}_l^{(5)}) \right) + O(|\xi^{(5)}|^5 + |\Delta I^{(5)}|^3), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\beta_k = \beta_k(\varphi_2^{(5)}, I_1^{(5)}, I_2^{(5)})$, $\mu_{mk} = \mu_{mk}(\varphi_2^{(5)}, I_1^0, I_2^0) \equiv \partial \beta_k(\varphi_2^{(5)}, I_1^0, I_2^0) / \partial I_m$, $\gamma_{kl} = \gamma_{kl}(\varphi_2^{(5)}, I_1^{(5)}, I_2^{(5)})$ определена в условиях леммы.

Заметим, что все произведенные замены переменных были каноническими в некоторой окрестности индивидуального тора, заданного (I_1^0, I_2^0) . Полученная в результате форма гамильтониана (30) с точностью до членов порядка $O(|\xi^{(5)}|^5 + |\Delta I^{(5)}|^3)$ описывает исходный гамильтониан в указанной окрестности. Введем теперь переменные $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ следующим образом: $\mathcal{J}_1 = I_1^0 + \Delta I_1^{(5)}$, $\mathcal{J}_2 = I_2^0 + \Delta I_2^{(5)}$. Подставим в (30) и воспользуемся формулой $f(x_0) + \partial f / \partial x \cdot \Delta x + O(|\Delta x|^3) = f(x_0 + \Delta x) + O(|\Delta x|^3)$ при $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$. Если теперь опустить индексы шага приведения у переменных, композиция последовательных канонических преобразований (12), (27) при выполнении условий (15), (16) обеспечивает приведение гамильтониана (13) к виду (17). Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
- [2] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [3] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems // Lecture Note in Math. V. 1645. Berlin: Springer, 1996.
- [4] Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел: плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990.
- [5] Джакалья Г.Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
- [6] Jorba A., Llave R. de la, Zou M. Linstedt series for lower dimensional tori of hamiltonian systems with three or more degrees of freedom // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. (S Agaro, Spain, June 1995) / ed. C. Simo, 1995.
- [7] Rüssmann H. Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. V. 6. № 2. P. 119–204.
- [8] Белов В.В., Доброхотов О.С., Доброхотов С.Ю. Изотропные торы, комплексный росток и индекс Маслова, нормальные формы и квазимоды в многомерных спектральных задачах // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 483–514.
- [9] Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Максимов В.А. Явные формулы для обобщенных переменных действие–угол в окрестности изотропного тора и их применение // ТМФ. 2003. Т. 135. № 3. С. 378–408.
- [10] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.
- [11] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории колебаний. М.: Наука, 1974.
- [12] Карасев М.В. Квантовая редукция на орбиты алгебр // Препринт ИТФ-87-157Р. Киев: Ин-т теор. физ. АН УССР, 1988.
- [13] Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия. Ижевск: РХД, 2000.
- [14] Dobrokhotov S. Yu., Shafarevich A. I Quantum selection of isotropic partially integrable Hamiltonian systems in quasiclassical approximation // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 5. № 2. P. 267–272.
- [15] Доброхотов С.Ю., Оливэ В.М. Замкнутые траектории и двумерные торы в квантовой проблеме для трехмерного ангармонического осциллятора // Тр. ММО. 1997. Т. 51. С. 3–87.
- [16] Dobrokhotov S. Yu., Olive Martinez V., Shafarevich A. I Closed trajectories and two-dimensional tori in the quantum problem for a three-dimensional resonant anharmonic oscillator // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 133–138.
- [17] Карасев М.В. Новые глобальные асимптотики и аномалии в задачах квантования адиабатических инвариантов // Функцион. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 2. С. 24–36.