Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Качуровский, Мартингально-эргодическая теорема,

Матем. заметки, 1998, том 64, выпуск 2, 311–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:44:32

МАРТИНГАЛЬНО-ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

А. Г. Качуровский

Давно известно любопытное совпадение поведения эргодических средних и (обращенных) мартингалов. Задача изучения этого явления ставилась и обсуждалась, например, С. Какутани [1] и Дж. Дубом [2]. Эта задача с различных позиций освещалась и решалась и в ряде других работ (см., например, [3]–[6]).

В настоящей работе вводится в рассмотрение естественный класс стохастических процессов – мартингально-эргодические процессы. Принадлежащие к этому классу последовательности случайных величин всегда сходятся и почти всюду, и по норме. Этот факт составляет основу мартингально-эргодической теоремы (теорема 1). Эргодические теоремы Биркгофа и фон Неймана, а также теоремы Дуба о сходимости прямого и обращенного мартингалов можно рассматривать как частные (вырожденные) случаи теоремы 1. Кроме того, максимальное и доминантное неравенства, хорошо известные для эргодических теорем и мартингалов, справедливы и для мартингально-эргодических последовательностей (теоремы 2 и 3).

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-418, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96060.

С физической точки зрения мартингально-эргодическую теорему можно рассматривать как эргодическую теорему с постепенным забыванием точками фазового пространства своих точных начальных координат.

1. Мартингально-эргодическая теорема. Пусть (Ω, F, λ) – вероятностное пространство, T – его автоморфизм, $f \in L_1(\Omega)$. Пусть $\{F_n\}_{1 \leq n \leq \infty}$ – монотонная последовательность σ -подалгебр $F, F_n \uparrow F_\infty$ (или $F_n \downarrow F_\infty$) при $n \rightarrow \infty$. Положим

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f \circ T^k, \quad f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f, \quad f_\infty^* = E(f^* | F_\infty).$$

Через $L \log L$ обозначим, как обычно, класс Зигмунда всех измеримых функций f , удовлетворяющих условию $\| |f| \log^+ |f| \|_1 < \infty$ (положим $0 \log^+ 0 = 0$; очевидно, $L \log L \supset L_p$ при любом $p > 1$).

ТЕОРЕМА 1. 1) Пусть $f \in L_p, p \in [1, \infty)$. Тогда $E(A_n f | F_n) \rightarrow f_\infty^*$ в L_p при $n \rightarrow \infty$, при этом $\|f_\infty^*\|_p \leq \|f\|_p$.

2) Пусть $f \in L \log L$. Тогда $E(A_n f | F_n) \rightarrow f_\infty^*$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$, при этом $E f_\infty^* = E f$, и если F_∞ T -инвариантно, то f_∞^* также T -инвариантно.

Если T эргодичен, то $f_\infty^* \equiv \text{const} = E f$ почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы 1 в вырожденном случае $F_n \equiv F$ совпадает с утверждениями эргодических теорем Биркгофа и фон Неймана. Вырожденный случай $T \equiv \text{id}$ дает утверждения теорем Дуба о сходимости прямого и обращенного мартингалов.

ЛЕММА 1. Пусть $\{f_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность случайных величин класса $L_p, p \in [1, \infty)$, и $f_n \rightarrow f^*$ в L_p при $n \rightarrow \infty$. Тогда $E(f_n | F_n) \rightarrow E(f^* | F_\infty)$ в L_p при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$\|E(f_n | F_n) - E(f^* | F_\infty)\|_p \leq \|E(f_n | F_n) - E(f^* | F_n)\|_p + \|E(f^* | F_n) - E(f^* | F_\infty)\|_p. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (1) равно $\|E(f_n - f^* | F_n)\|_p \leq \|f_n - f^*\|_p$, так как оператор условного математического ожидания сжимает в L_p [7]. Второе слагаемое тоже стремится к 0, так как $\{E(f^* | F_n)\}_{n \geq 1}$ – мартингал (прямой в случае $F_n \uparrow$ или обращенный в случае $F_n \downarrow$), сходящийся к $E(f^* | F_\infty)$ почти всюду и в L_p [2].

ЛЕММА 2. Пусть $\{f_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность случайных величин, $f_n \rightarrow f^*$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$, $h = \sup_n |f_n|$. Пусть $E h < \infty$. Тогда $E(f_n | F_n) \rightarrow E(f^* | F_\infty)$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $F_n \uparrow$ утверждение леммы 2 можно найти в [8, гл. 7, § 4, задача 3]. Соответственно и приводимое ниже доказательство также можно считать общеизвестным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $h_n = \sup_{m \geq n} |f_m - f^*|$. Очевидно,

$$|E(f_n | F_n) - E(f^* | F_\infty)| \leq |E(f_n | F_n) - E(f^* | F_n)| + |E(f^* | F_n) - E(f^* | F_\infty)|. \quad (2)$$

Второе слагаемое в правой части (2) сходится почти всюду к 0 по теореме о сходимости прямого (в случае $F_n \uparrow$) или обращенного (в случае $F_n \downarrow$) мартингала [2]. Первое слагаемое в правой части (2) равно

$$|E(f_n - f^* | F_n)| \leq E(|f_n - f^*| | F_n) \leq E(h_n | F_n).$$

Так как $h_n \downarrow 0$ почти всюду при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq h_n \leq 2h, E h < \infty$, то $\{E(h_n | F_n)\}_{n \geq 1}$ – неотрицательный супермартингал (в случае $F_n \uparrow$) или ограниченный в L_1 обращенный субмартингал (в случае $F_n \downarrow$), сходящиеся [2], [7] почти всюду при $n \rightarrow \infty$ (к $g \geq 0$). Осталось доказать, что $g \equiv 0$ почти всюду. Для этого достаточно показать, что $E(h_n | F_n) \rightarrow 0$ в L_1 .

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости $E h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $E h_n = E(E(h_n | F_n))$, то и $E(E(h_n | F_n)) \rightarrow 0$, что означает (в силу неотрицательности рассматриваемых случайных величин) сходимость $E(h_n | F_n)$ к 0 в L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение о сходимости по норме непосредственно следует из статистической эргодической теоремы фон Неймана и леммы 1. Неравенство $\|E(f^*|F_\infty)\|_p \leq \|f\|_p$ справедливо в силу сжатия в L_p оператора условного математического ожидания (неравенство $\|f^*\|_p \leq \|f\|_p$ общеизвестно).

Утверждение о сходимости почти всюду следует из эргодической теоремы Биркгофа, леммы 2 и доминантной эргодической теоремы [9], дающей для $f \in L \log L$ неравенство

$$E\left(\sup_n |A_n f|\right) \leq E\left(\sup_n A_n |f|\right) \leq \frac{e}{e-1} (1 + \| |f| \log^+ |f| \|_1).$$

Утверждения о предельной функции f_∞^* легко получаются из аналогичных свойств f^* и свойств оператора условного математического ожидания.

ЗАМЕЧАНИЕ (физический смысл теоремы 1). Пусть $C_n(x)$ – элемент разбиения F_n , в котором лежит точка x . Тогда $E(A_n f | F_n)(x)$ может быть рассмотрено как усреднение f по первым n T -итерациям множества $C_n(x)$. Если $F_n \downarrow$, то $C_n \uparrow$, и теорему 1 можно рассматривать как эргодическую теорему с постепенным забыванием точкой x своих точных начальных координат. Если $F_n \uparrow$, то $C_n \downarrow$, и возникает обратный эффект: точка начинает со временем все точнее припоминать свои начальные координаты.

Итак, мартингално-эргодическая теорема представляет определенный интерес с позиций изложенного в [10, гл. 9].

2. Доминантное и максимальное неравенства. В этом пункте рассматриваются только убывающие последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$, т.е. $F_n \downarrow$. Как хорошо известно, поведение эргодических средних совпадает с поведением именно *обращенного* мартингала.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_p$, $p > 1$. В условиях теоремы 1

$$\left\| \sup_n |E(A_n f | F_n)| \right\|_p \leq C_1 \|f\|_p, \quad C_1 = \left(\left(\frac{2p-1}{p-1} \right)^2 - 1 \right) \frac{p}{p-1}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L_p$, $p \geq 1$. В условиях теоремы 1

$$\lambda \left\{ \sup_n |E(A_n f | F_n)| \geq \varepsilon \right\} \leq C_2 \frac{\|f\|_p^p}{\varepsilon^p}, \quad C_2 = \left(\frac{4p-2}{p-1} \right)^p + 2^p.$$

Константы C_1 и C_2 в оценках из теорем 2 и 3 грубые; судя по аналогичным константам для мартингалов [8] и эргодической теоремы Биркгофа [9], должно быть достаточно $C_1 = p/(p-1)$ и $C_2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим $g_n = \sup_{m \geq n} |A_m f - f^*|$. Очевидно, $g_n \downarrow 0$ почти всюду, а по доминантной эргодической теореме [9]

$$\|g_1\|_p \leq \left\| \sup_n A_n |f| \right\|_p + \|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p + \|f\|_p. \quad (3)$$

Из очевидного разложения

$$E(A_n f | F_n) = E(A_n f - f^* | F_n) + E(f^* | F_n) \quad (4)$$

получаем неравенство

$$\sup_n |E(A_n f | F_n)| \leq \sup_n |E(A_n f - f^* | F_n)| + \sup_n |E(f^* | F_n)|,$$

откуда

$$\left\| \sup_n |E(A_n f | F_n)| \right\|_p \leq \left\| \sup_n E(g_n | F_n) \right\|_p + \left\| \sup_n |E(f^* | F_n)| \right\|_p. \quad (5)$$

Согласно доминантному неравенству [8] для неотрицательного (обращенного) субмартинала $\{E(g_n | F_n)\}_{n \geq 1}$ первое слагаемое правой части (5) не превосходит

$$\frac{p}{p-1} \|E(g_1 | F_1)\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|g_1\|_p \leq \frac{p}{p-1} \left(\frac{p}{p-1} \|f\|_p + \|f\|_p \right) \quad (6)$$

(первое неравенство этой цепочки следует из свойства сжатия в L_p оператора условного математического ожидания, второе – из (3)).

Аналогично, по доминантному неравенству [8] для (обращенного) мартингала $\{E(f^* | F_n)\}_{n \geq 1}$ второе слагаемое в (5) не превосходит

$$\frac{p}{p-1} \|E(f^* | F_1)\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p. \quad (7)$$

Складывая оценки (6) и (7), получаем утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 проводится по аналогичной схеме. Разложение (4) дает

$$\lambda \left\{ \sup_n |E(A_n f | F_n)| \geq \varepsilon \right\} \leq \lambda \left\{ \sup_n |E(A_n f - f^* | F_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} + \lambda \left\{ \sup_n |E(f^* | F_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (8)$$

Первое слагаемое в правой части (8) не превосходит $\lambda \{ \sup_n E(g_n | F_n) \geq \varepsilon/2 \}$, что по максимальному неравенству [11] для неотрицательного (обращенного) субмартинала $\{E(g_n | F_n)\}_{n \geq 1}$ оценивается сверху с учетом (3) через

$$\left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^p \|E(g_1 | F_1)\|_p^p \leq \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^p \|g_1\|_p^p \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p} \left(\frac{2p-1}{p-1} \right)^p \|f\|_p^p.$$

Соответственно второе слагаемое в правой части (8) по максимальному неравенству [8] для (обращенного) мартингала $\{E(f^* | F_n)\}_{n \geq 1}$ не превосходит

$$\left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^p \|E(f^* | F_1)\|_p^p \leq \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^p \|f^*\|_p^p \leq \frac{2^p}{\varepsilon^p} \|f\|_p^p,$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kakutani S. // Ergodic Theory. Proc. Intern. Congr. Math. (1950). V. 2. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1952. P. 128–142.
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
3. Jerison M. // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10. № 4. P. 531–539.
4. Rota G.-C. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1961. V. 252. № 14. P. 2064–2066.
5. Bishop E. // Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 1–13.
6. Vershik A. M. // Selecta Math. Soviet. 1982. V. 2. № 4. P. 311–330.
7. Neveu J. Discrete Parameter Martingales. Amsterdam: North-Holland, 1975.
8. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
9. Krengel U. Ergodic Theorems. Berlin–New York: de Gruyter, 1985.
10. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.
11. Лоев М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: agk@pdmi.ras.ru

Поступило
18.03.98