Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Взаимодействие классических фермионов с бозонами, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 315–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:03:38

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ С БОЗОНАМИ

В. П. Маслов

Рассмотрим вторично квантованный гамильтониан вида

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & -i \sum_{s=1}^2 \iint dx dp \hat{C}^+(x, p, s) p \frac{\partial}{\partial x} \hat{C}^-(x, p, s) + \sum_m \omega(m) \hat{b}_m^+ \hat{b}_m^- \\
 & + \frac{i}{2} \sum_{s_1, s_2=1}^2 \iiint dx_1 dp_1 dx_2 dp_2 \hat{C}^+(x_1, p_1, s_1) \hat{C}^+(x_2, p_2, s_2) \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} \right. \\
 & + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial V}{\partial p_1}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \\
 & \left. - \frac{\partial V}{\partial p_2}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \hat{C}^-(x_1, p_1, s_1) \hat{C}^-(x_2, p_2, s_2) \\
 & + \sum_m \sum_{s=1}^2 \iint dx dp (\hat{b}_m^+ e^{-imx} A(p, m) \hat{C}^+(x, p, s) \hat{C}^-(x, p, s) \\
 & + \hat{b}_m^- e^{imx} A^*(p, m) \hat{C}^+(x, p, s) \hat{C}^-(x, p, s)), \tag{1}
 \end{aligned}$$

где $V(x_1 - x_2, p_1, p_2) \in C^\infty$, $V(x_1 - x_2, p_1, p_2) = V(x_2 - x_1, p_2, p_1)$; $m = 2\pi n/L$, n – трехмерный целочисленный вектор, L – сторона трехмерного тора, на котором находится система; операторы $\hat{C}^\pm(x, p, s)$ удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
 \{\hat{C}^-(x_1, p_1, s_1), \hat{C}^+(x_2, p_2, s_2)\} &= \delta(x_1 - x_2) \delta(p_1 - p_2) \delta_{s_1 s_2}, \\
 \{\hat{C}^\pm(x_1, p_1, s_1), \hat{C}^\pm(x_2, p_2, s_2)\} &= 0;
 \end{aligned}$$

операторы $\hat{b}^\pm$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
 [\hat{b}_m^-, \hat{b}_n^+] &= \delta_{nm}, \quad [\hat{b}_m^\pm, \hat{b}_n^\pm] = 0, \\
 [\hat{b}_m^\pm, \hat{C}^\pm(x, p, s)] &= [\hat{b}_m^\mp, \hat{C}^\pm(x, p, s)] = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Гамильтониан (1) отвечает системе классических фермионов и квантовых бозонов, которые взаимодействуют между собой. Собственные функции оператора (1), которым отвечает четное число фермионов N , выражаются через собственные функции следующего вторично квантованного оператора:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{H}} = & \sum_{s_1=1}^2 \cdots \sum_{s_N=1}^2 \int \cdots \int dx_1 dp_1 \cdots dx_N dp_N \\
 & \times \hat{B}^+(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \cdots \hat{B}^+(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N)
 \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

$$\begin{aligned}
& \times \left(-i \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_m \omega(m) \widehat{b}_m^+ \widehat{b}_m^- + i \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_j} (x_j - x_k, p_j, p_k) \frac{\partial}{\partial p_j} \right. \right. \\
& + \frac{\partial V}{\partial x_k} (x_j - x_k, p_j, p_k) \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial V}{\partial p_j} (x_j - x_k, p_j, p_k) \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial V}{\partial p_k} (x_j - x_k, p_j, p_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big) \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_m \left(\widehat{b}_m^+ e^{-imx_j} A(p_j, m) + \widehat{b}_m^- e^{imx_j} A^*(p_j, m) \right) \Big) \\
& \times \text{Asymm}_{x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N} \widehat{B}^-(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \cdots \widehat{B}^-(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N),
\end{aligned} \tag{3}$$

где операторы $\widehat{b}_m^\pm$ удовлетворяют соотношениям (2), операторы $\widehat{B}^\pm(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
& [\widehat{B}^-(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2), \widehat{B}^+(x'_1, p'_1, s'_1; x'_2, p'_2, s'_2)] \\
& = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(p_1 - p'_1) \delta(p_2 - p'_2) \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2}, \\
& [\widehat{B}^\pm(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2), \widehat{B}^\pm(x'_1, p'_1, s'_1; x'_2, p'_2, s'_2)] = 0, \\
& [\widehat{b}_m^\pm, \widehat{B}^\pm(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)] = [\widehat{b}_m^\pm, \widehat{B}^\mp(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)] = 0.
\end{aligned}$$

В квазиклассическом пределе, когда коммутаторы между операторами малы, оператору (3) отвечает бесконечномерная система Гамильтона. Следуя предыдущим работам [2]–[5], просуммируем по числу частиц N эти уравнения. Получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned}
0 = & -i \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} (x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial}{\partial p_1} \right. \\
& + \frac{\partial V}{\partial x'} (x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial}{\partial p'} - \frac{\partial V}{\partial p_1} (x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial p'} (x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial}{\partial x'} \Big) \\
& \times \left(G(\overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s'; \overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s') G(\overset{1}{x_1}, \overset{1}{p_1}, s_1; x_2, p_2, s_2) - G(\overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s'; x_2, p_2, s_2) G(\overset{1}{x_1}, \overset{1}{p_1}, s_1; \overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s') \right. \\
& + R^*(\overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s'; \overset{1}{x_1}, \overset{1}{p_1}, s_1) R(\overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s'; x_2, p_2, s_2) \Big) \\
& + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} (x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial V}{\partial x'} (x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial}{\partial p'} \right. \\
& - \frac{\partial V}{\partial p_2} (x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial p'} (x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial}{\partial x'} \Big) \\
& \times \left(G(\overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s'; \overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s') G(x_1, p_1, s_1; \overset{2}{x_2}, \overset{2}{p_2}, s_2) - G(\overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s'; \overset{1}{x_2}, \overset{1}{p_2}, s_2) G(x_1, p_1, s_1; \overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s') \right. \\
& + R^*(\overset{3}{x'}, \overset{3}{p'}, s'; x_1, p_1, s_1) R(\overset{1}{x'}, \overset{1}{p'}, s'; x_2, p_2, s_2) \Big) \\
& + \sum_m \left(\varphi_m^* (e^{-imx_2} A(p_2, m) - e^{-imx_1} A(p_1, m)) \right. \\
& + \varphi_m (e^{imx_2} A^*(p_2, m) - e^{imx_1} A^*(p_1, m)) \Big) G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & -i \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) + i \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_1} \right. \\
 & + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial V}{\partial p_1}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial p_2}(x_1 - x_2, p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \Big) \\
 & + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial^2}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial x'}(x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial^2}{\partial p'} \right. \\
 & - \frac{\partial V}{\partial p_1}(x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial^2}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial p'}(x_1 - x', p_1, p') \frac{\partial^2}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial^2}{\partial p_2} \\
 & + \frac{\partial V}{\partial x'}(x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial^2}{\partial p'} - \frac{\partial V}{\partial p_2}(x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial^2}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial p'}(x_2 - x', p_2, p') \frac{\partial^2}{\partial x'} \Big) \\
 & \times \left(G(x', p', s'; x', p', s') G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) - G(x', p', s'; x_1, p_1, s_1) R(x', p', s'; x_2, p_2, s_2) \right. \\
 & \left. + G(x', p', s'; x_2, p_2, s_2) R(x', p', s'; x_1, p_1, s_1) \right) \\
 & + \sum_m \left(\varphi_m^* (e^{-imx_2} A(p_2, m) + e^{-imx_1} A(p_1, m)) \right. \\
 & \left. + \varphi_m (e^{imx_2} A^*(p_2, m) + e^{imx_1} A^*(p_1, m)) \right) R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2), \\
 0 = & \omega(m) \varphi_m + \sum_{s=1}^2 \iint dx dp e^{-imx} A(p, m) G(x, p, s; x, p, s),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где индексы над операторами обозначают порядок действия [1]. Рассмотрим решения системы уравнений (4) следующего типа: $R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) = 0$, $G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ зависит от взаимодействия между фермионами и бозонами таким образом, что при $A(p, m) = 0$

$$G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) = \delta(x_1 - x_2) \delta(p_1 - p_2) \delta_{s_1 s_2} \frac{1}{e^{E(x_1, p_1)/\theta} + 1},$$

где θ – температура, функция $E(x, p)$ является решением уравнения вида

$$E(x, p) = \frac{p^2}{2} + \iint dy dk V(x - y, p, k) \frac{1}{e^{E(y, k)/\theta} + 1}.$$

Такие решения отвечают температурному состоянию системы классических “холостых” фермионов. Фазовый переход в “парное” состояние происходит при температуре, при которой от рассмотренных решений отвечают решения уравнений (4) с $R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \neq 0$, т.е. когда у уравнения в вариациях для уравнений (4) появляется в некотором смысле “нетривиальное” решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
2. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 3.
3. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 627–629.
4. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 145–146.
5. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 6. № 4.