Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Л. Мелехина, Конструкция канонических координат на орбитах коприсоединенного представления тензорных расширений групп Ли, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1402>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:17:56

КОНСТРУКЦИЯ КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НА ОРБИТАХ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ РАСШИРЕНИЙ ГРУПП ЛИ

Т. Л. Мелехина

В настоящее время большой цикл работ посвящен построению канонических координат на симплектических многообразиях. Важный класс симплектических многообразий составляют орбиты коприсоединенного представления групп Ли, на которых реализуются многие важные гамильтоновы системы. В работе [1] для нахождения глобальных симплектических координат на орбитах максимальной размерности коприсоединенного представления Ad^* -nilпотентных групп Ли $\mathcal{T}$ использовались цепочки идеалов $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G$ таких, что $\dim G_i/G_{i-1} = 1$, и инварианты представления Ad^* групп Ли $\mathcal{T}_i$, отвечающих идеалам G_i , $i = 1, \dots, \dim G$, поднимались на G^* с помощью естественной проекции $p_i: G^* \rightarrow G_i^*$, где $\mathcal{T}$ – группа Ли, отвечающая алгебре Ли G . В итоге получались требуемые симплектические координаты. Канонические координаты на орбитах общего положения коприсоединенного представления Ad^* группы Ли верхнетреугольных невырожденных матриц четвертого порядка найдены в [2]. Авторы [3] предложили общий алгоритм построения канонических координат на орбитах, обладающих поляризацией.

Пусть A – коммутативное кольцо, G – алгебра Ли. Тогда их тензорное произведение $G \otimes A$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования $[g \otimes a, h \otimes b] = [g, h] \otimes ab$, где $g, h \in G$, $a, b \in A$. В случае, когда кольцо A является алгеброй с двойственностью Пуанкаре, в работе [4] В. В. Трофимов предложил алгоритм (t) , позволяющий продолжать функции с пространства G^* , сопряженного к алгебре Ли G , на пространство $(G \otimes A)^*$, сопряженное к алгебре Ли $G \otimes A$ (см. также [5] и [6]). В работе [7] показано, что эта конструкция может быть использована для построения канонических координат на орбитах коприсоединенного представления Ad^* группы Ли, отвечающей алгебре Ли $G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$, где G – произвольная алгебра Ли, на орбитах которой такая система координат явно указана. В работе [8] показано, что это утверждение остается справедливым для кольца $\mathbb{R}[x]/(x^3)$.

В настоящей работе доказано, что алгоритм (t) Трофимова, примененный к функциям, задающим канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления Ad^* группы Ли $\mathcal{T}$, дает канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления Ad^* группы Ли $\mathcal{T} \otimes K$, отвечающей алгебре Ли $G \otimes K$, где G – алгебра Ли группы Ли $\mathcal{T}$ и $K = \mathbb{R}[x]/(x^n)$. Для этого кольца описано действие алгоритма (t) в явном виде, что позволило продолжить его на более широкий класс функций по сравнению с работами [4], [5].

Пусть $K = \mathbb{R}[x]/(x^n)$, а G – произвольная алгебра Ли. Предположим, что $e_1, \dots, e_r$ – базис алгебры Ли G , $r = \dim G$. Тогда

$$e_1, \dots, e_r, e_1 \otimes \varepsilon, \dots, e_r \otimes \varepsilon, \dots, e_1 \otimes \varepsilon^{n-1}, \dots, e_r \otimes \varepsilon^{n-1}$$

– базис алгебры Ли $G \otimes K$, где $\varepsilon = \pi(x)$ и $\pi: \mathbb{R}[x] \rightarrow K$ – каноническая проекция. Координаты в пространстве $(G \otimes K)^*$ в базисе, дуальном к базису пространства $G \otimes K$, обозначим через $x_{i1}(0), x_{i2}(1), \dots, x_{in}(n-1)$, причем $x_{i1}(0)$ относится к базису $e^i \in G^*$, $x_{i2}(1)$ – к базису $e^{i2} \otimes \varepsilon \in (G \otimes \varepsilon)^*$, и т.д. $x_{in}(n-1)$ – к базису $e^{in} \otimes \varepsilon^{n-1} \in (G \otimes \varepsilon^{n-1})^*$, где $e^1, \dots, e^n$ – дуальный базис в G^* , т.е. $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Пусть C_{ij}^k – структурный тензор алгебры Ли G в базисе $e_1, \dots, e_n$ и

$$z_i = x_i(0)\varepsilon^{n-1} + x_i(1)\varepsilon^{n-2} + \dots + x_i(n-1).$$

Предположим, что функция $F(z)$ допускает разложение в ряд Тейлора. Тогда можно записать равенство

$$F(z) = F^{(0)}(z) + F^{(1)}(z)\varepsilon + \dots + F^{(n-1)}(z)\varepsilon^{n-1}$$

при условии, что $\varepsilon^n = 0$.

Алгоритм (t) Трофимова переводит функцию $F(z)$, определенную на пространстве G^* , в набор функций $F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)}$ (см., например, [6]).

ЛЕММА 1. *Функции $F^{(m)}$, $m = 0, \dots, n-1$, имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} F^{(m)}(z) = & \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(x_i(m))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} \prod_{i=i_1}^{i_m} x_i(m-1) \\ & + \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-1} F(x_i(m))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{m-1}}} \prod_{i=i_1}^{i_{m-2}} x_i(m-1) x_{i_{m-1}}(m-2) \\ & + \frac{1}{(m-4)!} \frac{\partial^{m-2} F(x_i(m))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{m-2}}} \left(\prod_{i=i_1}^{i_{m-3}} x_i(m-1) x_{i_{m-2}}(m-3) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(m-2)!} \prod_{i=i_1}^{i_{m-4}} x_i(m-1) x_{i_{m-3}}(m-2) x_{i_{m-2}}(m-2) \right) \\ & + \cdots + \frac{\partial F(x_i(m))}{\partial x_i} x_i(0). \end{aligned}$$

Обобщим алгоритм (t). Функции, приведенные в лемме 1, построены в предположении, что F разложима в ряд Тейлора. Имея явные выражения для $F^{(m)}$, мы можем определить $F^{(m)}$ для любых гладких функций F , заданных на пространстве G^* . По определению положим, что алгоритм (t) переводит функцию F в набор $F^{(0)}, \dots, F^{(m-1)}$ функций, описанных в лемме 1.

Имеет место основная теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$, определенные на пространстве G^* , дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления Ad^* группы Ли, отвечающей алгебре Ли G , т.е.*

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} P_1 = p_1^{(0)}, \quad \dots, \quad P_s = p_s^{(0)}, \quad P_{s+1} = p_1^{(1)}, \quad \dots, \\ P_{2s} = p_s^{(1)}, \quad \dots, \quad P_{s(n-1)+1} = p_1^{(n-1)}, \quad \dots, \quad P_{sn} = p_s^{(n-1)}, \\ Q_1 = q_1^{(n-1)}, \quad \dots, \quad Q_s = q_s^{(n-1)}, \quad \dots, \quad Q_{s(n-1)+1} = q_1^{(0)}, \quad \dots, \quad Q_{sn} = q_s^{(0)} \end{aligned}$$

на пространстве $(G \otimes K)^*$ дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления Ad^* группы Ли, отвечающей алгебре Ли $G \otimes K$, т.е.

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}.$$

Отметим в качестве следствия из теоремы 1 следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – неразложимая вещественная алгебра Ли, $\dim G = 3, 4, 5$, $G \not\cong \text{so}(3)$, либо G – неразложимая вещественная нильпотентная алгебра Ли, $\dim G = 6$. Используя алгоритм (t), можно в явном виде построить глобальную систему канонических координат на всех орбитах общего положения коприсоединенного представления Ad^* группы Ли, отвечающей алгебре Ли $((G \otimes K_1) \otimes K_2) \otimes \cdots \otimes K_s$, где $K_i = \mathbb{R}[x]/(x^{n_i})$.*

Явные выражения для функций, приведенных в лемме 1, получаются прямым вычислением с использованием формулы Тейлора. Для функций $F^{(m)}(w)$, где w – полный набор координат $x_i(j)$,

$i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, n-1$, выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial F^{(m)}(w)}{\partial x_i(0)} \left(\frac{1}{m!} \prod_{i=i_1}^{i_m} x_i(m-1) \frac{\partial^{(m)}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \left(C_{ij}^k w_k \frac{\partial F}{\partial w_j} \right) + \dots \right) \\
 & + \frac{\partial F^{(m)}(w)}{\partial x_i(1)} \left(\frac{1}{(m-1)!} \prod_{i=i_1}^{i_{m-1}} x_i(m-2) \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \left(C_{ij}^k w_k \frac{\partial F}{\partial w_j} \right) + \dots \right) + \dots \\
 & + \frac{\partial F^{(m)}(w)}{\partial x_i(m-1)} \left(C_{ij}^k w_m \frac{\partial F}{\partial w_j} \right) \\
 & = \left(\frac{1}{m!} C_{ij}^k w_k \frac{\partial}{\partial x_i(0)} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} x_i(0) \right) \frac{\partial^{(m)}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \left(\frac{\partial F}{\partial w_j} \prod_{i=i_1}^{i_m} x_i(m-1) \right) + \dots \right) \\
 & + \left(\frac{1}{(m-1)!} C_{ij}^k w_k \frac{\partial}{\partial x_i(1)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} x_i(m-1) x_j(1) \right) \right. \\
 & \quad \times \left. \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \left(\frac{\partial F}{\partial w_j} \prod_{i=i_1}^{i_{m-1}} x_i(m-1) \right) + \dots \right) + \dots \\
 & + \left(C_{ij}^k w_k \frac{\partial}{\partial x_i(m-1)} \left(\frac{\partial^{(m)} F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \prod_{i=i_1}^{i_m} x_i(m-1) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m-1}}} \prod_{i=i_1}^{i_{m-2}} x_i(m-1) x_{i_{m-1}}(m-2) + \dots \right) \frac{\partial F}{\partial w_j} \\
 & = C_{ij}^k w_k \frac{\partial}{\partial w_p} \left(w_p \frac{\partial F^{(n)}}{\partial w_i} \frac{\partial F^{(n)}}{\partial w_j} \right). \tag{1}
 \end{aligned}$$

Поскольку скобка Пуассона $\{f, h\}$ произвольных функций f, h , определенных на пространстве $(G \otimes K)^*$, имеет вид

$$\{f, h\} = C_{ij}^k w_k \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial h}{\partial w_j},$$

теорема 1 следует из равенства (1), примененного к функциям P_i и Q_j .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vergne M. // Bull. Soc. Math. France. 1972. V. 100. P. 301–335.
2. Новак Е. // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1993. Вып. 25. Ч. 2. С. 4–22.
3. Kamalin A. A., Perelomov A. M. // Comm. Math. Phys. 1985. V. 97. P. 553–568.
4. Трофимов В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1303–1331.
5. Браилов А. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 1. С. 47–51.
6. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
7. Трофимов В. В. // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 229–230.
8. Мордашева Т. Л. // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 193–194.