Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Арестов, Наилучшее приближение одного класса функций многих переменных другим и родственные экстремальные задачи, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 323–340

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:10:05

УДК 517.518+517.983

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ДРУГИМ И РОДСТВЕННЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В. В. Арестов

В работе исследована взаимосвязь нескольких экстремальных задач для неограниченных линейных операторов типа свертки в пространствах $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 1$, $1 \leq \gamma \leq \infty$. Для задачи о вычислении модуля непрерывности оператора свертки A на классе функций Q , определенном вторым подобным оператором, и задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора A на классе Q линейными ограниченными операторами построены двойственные задачи в сопряженных пространствах, являющиеся соответственно задачами о наилучшем и наилучшем линейном приближении одного класса функций другим.

Библиография: 28 названий.

В данной работе исследуется взаимосвязь нескольких экстремальных задач для неограниченных линейных операторов типа свертки в пространствах $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 1$, $1 \leq \gamma \leq \infty$. Для задачи о вычислении модуля непрерывности оператора свертки A на классе функций Q , определенном вторым подобным оператором, и задачи Стечкина [1] о наилучшем приближении оператора A на классе Q линейными ограниченными операторами построены двойственные задачи в сопряженных пространствах, являющиеся соответственно задачами о наилучшем и наилучшем линейном приближении одного класса функций другим. Для операторов дифференцирования на классах функций одного переменного в пространствах $L_\gamma(I)$ на оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = [0, \infty)$ подобные результаты были получены ранее автором [2], а для периодических функций – Б. Е. Клоцем [3]. В настоящее время рассматриваемым здесь задачам посвящено большое число работ; обзор результатов по этой проблематике имеется в [4], [5].

1. Введение. Постановка задач. Пусть $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 1$, при $1 \leq \gamma < \infty$ есть пространство вещественных измеримых функций x на $\mathbb{R}^m$ с (конечной) нормой

$$\|x\|_\gamma = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |x(t)|^\gamma dt \right)^{1/\gamma},$$

а при $\gamma = \infty$ (если не оговорено что-то иное) – пространство $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ непрерывных на $\mathbb{R}^m$ функций, имеющих нулевой предел на бесконечности, с равномерной нормой $\|x\|_\infty = \|x\|_{C_0} = \max\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 94-4070.

Пусть, далее, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ есть пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$ (пространство основных или пробных функций), а $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ – соответствующее пространство обобщенных функций (см., например, [6]–[8]). Значение функционала (обобщенной функции) $\theta \in \mathcal{S}'$ на элементе $x \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, x \rangle$. *Сверткой* $\theta * x$ элементов $\theta \in \mathcal{S}'$ и $x \in \mathcal{S}$ называют функцию $y(\eta) = \langle \theta, \sigma_\eta x \rangle$, где операция $\sigma_\eta, \eta \in \mathbb{R}^m$, определена формулой $(\sigma_\eta x)(t) = x(\eta - t)$. Для $\theta \in \mathcal{S}'$ обозначим через $\check{\theta}$ функционал, который действует по формуле $\langle \check{\theta}, x \rangle = \langle \theta, \sigma_0 x \rangle = \langle \theta, \check{x} \rangle$, $\check{x}(t) = x(-t)$, $x \in \mathcal{S}$; таким образом, это есть операция замены знака аргумента обобщенной функции.

Ниже в работе обсуждается несколько экстремальных задач для линейных неограниченных операторов типа свертки (с некоторой обобщенной функцией), построенных по следующей единой схеме. С помощью элемента $\theta \in \mathcal{S}'$ определим на $\mathcal{S}$ оператор Θ и формально сопряженный оператор Θ^* формулами

$$\Theta x = \check{\theta} * x, \quad \Theta^* x = \theta * x, \quad x \in \mathcal{S}.$$

Всегда будет предполагаться выполненным условие, что $\theta * x \in \mathcal{S}$ для любой функции $x \in \mathcal{S}$, т.е. $\Theta \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ (или, то же самое, $\Theta^* \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$); это будет иметь место, например, в том случае, если θ имеет компактный носитель. Распространим оператор Θ на более широкое множество по схеме Соболева. Обозначим через $\Sigma = \Sigma(\mathbb{R}^m)$ множество измеримых, локально суммируемых функций на $\mathbb{R}^m$, для каждой из которых найдется показатель $\mu = \mu(x) \leq 0$ со свойством

$$\int |x(t)|(1 + |t|^2)^\mu dt < \infty;$$

здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывается. Ясно, что $\Sigma \subset \mathcal{S}'$. Относительно пары функций $x, y \in \Sigma$ будем считать, что x принадлежит области определения $D(\Theta)$ оператора Θ и $y = \Theta x$, если для любой функции $\phi \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$\int x \Theta^* \phi dt = \int y \phi dt. \quad (1)$$

Аналогичным образом можно осуществить продолжение оператора Θ^* . Нетрудно понять, что функция x принадлежит области определения $D(\Theta^*)$ оператора Θ^* в том и только том случае, если $\check{x} \in D(\Theta)$ и при этом $(\Theta^* x)(\eta) = (\Theta \check{x})(-\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^m$. Операторы Θ и Θ^* инвариантны относительно сдвигов соответственно на $D(\Theta)$ и $D(\Theta^*)$, т.е. обладают свойствами, что $\tau_\eta \Theta = \Theta \tau_\eta$ и $\tau_\eta \Theta^* = \Theta^* \tau_\eta$ при любом $\eta \in \mathbb{R}^m$, где τ_η – оператор сдвига, определенный (на множестве Σ) соотношением $(\tau_\eta x)(t) = x(t - \eta)$.

Пусть A и A^* есть пара (формально сопряженных) операторов с областями определения $D(A)$, $D(A^*)$, построенных по только что изложенной схеме с помощью элемента $a \in \mathcal{S}'$. Допустим, что B и B^* есть еще одна пара операторов с областями определения $D(B)$, $D(B^*)$, определенных тем же путем с помощью еще одного элемента $b \in \mathcal{S}'$. Предположим, что p, q, r, s – параметры, удовлетворяющие условиям $1 \leq p, q, r, s \leq \infty$. Введем пространства

$$W_p(B) = \{x \in D(B) : Bx \in L_p\}, \\ W_{r,p}(B) = L_r \cap W_p(B) = \{x \in L_r \cap D(B) : Bx \in L_p\}.$$

На множестве $W_{r,p}(B)$ выделим класс

$$Q = Q_{r,p}(B) = \{x \in W_{r,p}(B) : \|Bx\|_p \leq 1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_r^s$ множество линейных ограниченных операторов из L_r в L_s , и пусть $\mathcal{B}_r^s(N)$ есть множество операторов $T \in \mathcal{B}_r^s$, норма которых ограничена числом $N \geq 0$: $\|T\| = \|T\|_{L_r \rightarrow L_s} \leq N$.

Одной из обсуждаемых в данной работе задач является задача С.Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора A на классе Q в метрике пространства L_q множеством линейных ограниченных операторов $T \in \mathcal{B}_r^s(N)$, т.е. задача об исследовании величины

$$\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(A, B; r, s; p, q; N) = \inf\{U(T) : T \in \mathcal{B}_r^s(N)\}, \quad (2)$$

где

$$U(T) = \sup\{\|Ax - Tx\|_q : x \in Q_{r,p}(B)\};$$

при этом если $W_{r,p}(B) \not\subset D(A)$, то считаем, что $U(T) = \infty$ для любого оператора $T \in \mathcal{B}_r^s(N)$. В классическом варианте этой задачи [1] параметры s и q совпадают: $s = q$. В этом случае величину (2) будем обозначать через $E(N)$; таким образом, $E(N) = \mathcal{E}(A, B; r, q; p, q; N)$. Задача (2) довольно подробно исследована, в частности, выяснена ее взаимосвязь с другими экстремальными задачами, дано ее решение для конкретных операторов в классических функциональных пространствах (см. библиографию в [5]); ниже будут использоваться результаты работ автора [9]–[13], относящиеся к этой задаче. Функцию

$$\omega(\delta) = \sup\{\|Ax\|_q : x \in Q_{r,p}(B), \|x\|_r \leq \delta\} \quad (3)$$

переменного $\delta \in [0, \infty)$ называют *модулем непрерывности* оператора A на классе $Q = Q_{r,p}(B)$. Положим

$$\begin{aligned} R(N) &= \sup\{\omega(\delta) - N\delta : \delta \geq 0\} = \sup\{\|Ax\|_q - N\|x\|_r : x \in Q_{r,p}(B)\}, \\ \lambda(\delta) &= \inf\{E(N) + N\delta : N \geq 0\}. \end{aligned}$$

С.Б. Стечкин [1] заметил, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} E(N) &\geq R(N), \quad N \geq 0, \\ \omega(\delta) &\leq \lambda(\delta), \quad \delta \geq 0; \end{aligned} \quad (4)$$

если при этом существует элемент $x \in Q$ и линейный ограниченный оператор $T \in \mathcal{B}_r^q$ со свойствами

$$\|Ax\| = U(T) + \|T\| \cdot \|x\|,$$

то имеют место равенства

$$\omega(\|x\|) = \|Ax\|, \quad E(\|T\|) = U(T) = \|Ax\| - \|T\| \cdot \|x\|,$$

и, следовательно, оператор T является экстремальным в задаче $E(N)$ при $N = \|T\| = \|T\|_{L_r \rightarrow L_q}$, а элемент x – в задаче (3) при $\delta = \|x\|$. Это утверждение дает простую, но

часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности.

В настоящее время особенно полно изучены задачи (2) и (3) для операторов дифференцирования $D^k x = x^{(k)}$ порядка k на классе

$$Q = Q_{r,p}^n = \{x \in L_r : x^{(n)} \in L_p, \|x^{(n)}\|_p \leq 1\}$$

n раз дифференцируемых функций ($0 \leq k < n$) в пространствах $L_\gamma = L_\gamma(I)$, $1 \leq \gamma \leq \infty$, функций одного переменного на числовой оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = [0, \infty)$ (см. библиографию в [4], [5]). В этом случае

$$\begin{aligned} E(N) &= E_{n,k}(N) = \inf\{U(T) : \|T\|_{L_r \rightarrow L_q} \leq N\}, \\ U(T) &= \sup\{\|x^{(k)} - Tx\|_q : x \in Q_{r,p}^n\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что если выполнено условие $k + 1/r - 1/q > 0$, то имеет место равенство

$$E_{n,k}(N) = N^{-\gamma} E_{n,k}(1), \quad \gamma = \frac{n - k + 1/q - 1/p}{k + 1/r - 1/q}.$$

В данной ситуации функция (3) имеет вид

$$\omega(\delta) = \sup\{\|x^{(k)}\|_q : \|x\|_r \leq \delta, \|x^{(n)}\|_p \leq 1\};$$

при выполнении условия $n - 1/p + 1/r > 0$ для нее справедлива формула

$$\omega(\delta) = K\delta^\alpha, \quad K = \omega(1), \quad \alpha = \frac{n - k - 1/p + 1/q}{n - 1/p + 1/r}.$$

Величина $K = \omega(1)$ есть наименьшая (наилучшая) константа в известном неравенстве между нормами производных функций (неравенстве Колмогорова)

$$\|x^{(k)}\|_q \leq K \|x\|_r^\alpha \|x^{(n)}\|_p^\beta, \quad \alpha = \frac{n - k - 1/p + 1/q}{n - 1/p + 1/r}, \quad \beta = 1 - \alpha. \quad (6)$$

Если $k + 1/r - 1/q > 0$, то неравенство (4) Стечкина превращается в следующее соотношение между величиной $E_{n,k}(N)$ и наилучшей константой K в неравенстве (6):

$$E_{n,k}(N) \geq \beta \alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad N > 0.$$

Существует связь задач (3) и (2) с задачей приближения одного класса функций другим и с соответствующей задачей линейного приближения класса классом. Пусть p', q', r' – параметры, удовлетворяющие условиям $1 \leq p', q', r' \leq \infty$ и не связанные пока никак с параметрами p, q, r . С помощью элемента $h \in \mathcal{S}'$ определим по изложенной выше схеме еще один оператор H . В пространствах

$$W_{r'}(B) = \{\varphi \in D(B) : B\varphi \in L_{r'}\}, \quad W_{q'}(H) = \{\psi \in D(H) : H\psi \in L_{q'}\}$$

ВЫДЕЛИМ КЛАССЫ

$$\begin{aligned} Q_{r'}(B) &= \{\varphi \in W_{r'}(B) : \|B\varphi\|_{r'} \leq 1\}, \\ Q_2 &= NQ_{r'}(B) = \{\varphi \in W_{r'}(B) : \|B\varphi\|_{r'} \leq N\}, \\ Q_1 &= Q_{q'}(H) = \{\psi \in W_{q'}(H) : \|H\psi\|_{q'} \leq 1\}. \end{aligned}$$

Положим

$$F(N) = F(Q_1, Q_2)_{p'} = F(Q_{q'}(H), NQ_{r'}(B))_{p'} = \sup\{F(\psi, NQ_{r'}(B))_{p'} : \psi \in Q_{q'}(H)\}, \quad (7)$$

где

$$F(\psi, NQ_{r'}(B))_{p'} = \inf\{\|\psi - \varphi\|_{\tilde{L}_{p'}} : \varphi \in NQ_{r'}(B)\}.$$

Величину (7) называют *величиной наилучшего приближения* (или *наилучшим приближением*) в пространстве $L_{p'}$ класса $Q_1 = Q_{q'}(H)$ классом $Q_2 = NQ_{r'}(B)$. *Наилучшим линейным приближением* в $L_{p'}$ класса Q_1 классом Q_2 называют величину

$$G(N) = G(Q_1, Q_2)_{p'} = G(Q_{q'}(H), NQ_{r'}(B))_{p'} = \inf\{G(Q_{q'}(H); P)_{p'} : P \in \mathcal{P}(N)\}, \quad (8)$$

где

$$G(Q_{q'}(H); P)_{p'} = \sup\{\|\psi - P\psi\|_{p'} : \psi \in Q_{q'}(H)\},$$

и нижняя грань в (8) берется по множеству $\mathcal{P}(N)$ всех линейных отображений P класса Q_1 в класс Q_2 .

Связь задач (7), (8) с задачами (3), (2) была замечена впервые на семинаре С. Б. Стечкина в Свердловском отделении Математического института им В. А. Стеклова (ныне Институт математики и механики УрО РАН) в 1965–67 годах в связи с изучением задачи Стечкина (5) для операторов дифференцирования и неравенств Колмогорова (6) для классов функций одного переменного на оси и полуоси. Основное наблюдение состояло в том, что величину $G(N)$ наилучшего линейного приближения класса классом, а значит, и величину $F(N)$ наилучшего приближения класса классом можно оценить сверху через величину $E(N)$; полученные в этой проблематике результаты содержатся в работах [14]–[18]. Изложим суть этого подхода в применении к рассматриваемым нами задачам. Допустим, что выполнены предположения.

1) Параметры задач связаны условиями $p' = q$, $q' = p$, $r' = q$.

2) Оператор B является композицией оператора A и оператора H , т.е. $B = H \circ A$; точнее, имеют место соотношения

$$D(B) \subset D(A), \quad AD(B) \subset D(H), \quad HAx = Bx, \quad x \in D(B).$$

Это предположение в дальнейшем мы будем называть условием факторизации (Φ).

3) Множество $AW_p(B)$ является достаточно богатым подмножеством пространства $W_p(H)$; для простоты рассуждений ограничимся случаем

$$AW_p(B) = W_p(H). \quad (9)$$

4) В задаче (2) можно ограничиться множеством $\mathcal{B}'$ операторов $T \in \mathcal{B}_{p,q}$, которые определены, линейные и перестановочны с оператором B на множестве $W_p(B)$ (например, в задаче (2) существует экстремальный оператор T с такими свойствами). Более

того, для любого такого оператора $T \in \mathcal{B}'$ величина $\overline{U}(T) = \sup\{\|Ax - Tx\|_q : x \in Q_p(B)\}$ совпадает с величиной $U(T) = \sup\{\|Ax - Tx\|_q : x \in Q = Q_{p,p}(B)\}$.

При сделанных предположениях имеет место неравенство

$$G(N) = G(Q_p(H), NQ_q(B))_q \leq E(N) = \mathcal{E}(A, B; p, q; p, q; N), \quad (10)$$

а значит, и неравенство $F(N) \leq E(N)$. Действительно, оператору $T \in \mathcal{B}'$ сопоставим оператор $P \in \mathcal{P}(N)$, $N = \|T\|_{L_p \rightarrow L_q}$, по следующему правилу. В силу свойства (9) для любой функции $\psi \in W_p(H)$ существует функция $x \in W_p(B)$ такая, что $Ax = \psi$. Определим оператор P , положив $P\psi = Tx$, $\psi \in W_p(H)$. Имеем $BP\psi = BTx = TBx = TH\psi$. Поэтому $\|BP\psi\|_q \leq \|T\|_{L_p \rightarrow L_q} \|H\psi\|_p$ и, значит, $P \in \mathcal{P}(N)$, $N = \|T\|_{L_p \rightarrow L_q}$. Далее, находим

$$\|\psi - P\psi\|_q = \|Ax - Tx\|_q \leq \overline{U}(T) \|Bx\|_p = \overline{U}(T) \|H\psi\|_p,$$

а отсюда в силу четвертого предположения следует неравенство (10).

На самом деле естественной является иная связь введенных задач. А именно (при определенных условиях на операторы и правильных соотношениях между параметрами), задача приближения класса классом является двойственной для задачи (3), а линейная задача приближения класса классом является двойственной для задачи (2). Впервые этот факт был замечен автором для операторов дифференцирования D^k на оси и полуоси [2]; для периодических функций аналогичный результат получил Б. Е. Клоц [3].

Задачи приближения класса классом будут рассматриваться в сопряженных пространствах по отношению к задачам (3) и (2). С этого момента мы будем считать, что параметры задач связаны условиями (Г) сопряженности по Гельдеру, а точнее,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Возникает необходимость уточнить (изменить) определение некоторых классов функций. В случае $\gamma = \infty$ наряду с пространством $L_\infty = C_0$ будут рассматриваться еще два: пространство $\tilde{L}_\infty = \tilde{L}_\infty(\mathbb{R}^m)$ измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$ и пространство $C = C(\mathbb{R}^m)$ непрерывных ограниченных функций с равномерной нормой. Иногда для пространств $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$ при $1 \leq \gamma < \infty$ нам будет удобно использовать также обозначения $\tilde{L}_\gamma = \tilde{L}_\gamma(\mathbb{R}^m)$. Пусть $M = M(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (знакопеременных) σ -аддитивных конечных мер Лебега на $\mathbb{R}^m$; для обозначения вариации меры $\Xi \in M$ будет использоваться стандартное обозначение $\bigvee \Xi$. Пространство L_ρ^* ограниченных линейных функционалов на пространстве L_ρ в случае $1 \leq \rho < \infty$, как известно, совпадает с пространством $L_{\rho'}$, $1/\rho + 1/\rho' = 1$, если $1 < \rho < \infty$, и с пространством $\tilde{L}_\infty$, если $\rho = 1$ (т.е. с пространством $\tilde{L}_{\rho'}$ при всех $1 \leq \rho < \infty$), а точнее, функционал $\Upsilon \in L_\rho^*$ имеет вид

$$\Upsilon x = \int x(t) \xi(t) dt, \quad (11)$$

где $\xi \in \tilde{L}_{\rho'}$ и $\|\Upsilon\|_{L_\rho^*} = \|\xi\|_{\rho'}$. В случае $\rho = \infty$ пространство $L_\infty^* = C_0^*$ есть пространство мер $M = M(\mathbb{R}^m)$, и каждый функционал $\Upsilon \in C_0^*$ представляется в виде

$$\Upsilon x = \int x(t) d\Xi(t), \quad (12)$$

где $\Xi \in M$, при этом $\bigvee \Xi = \|\Upsilon\|_{C_0^*}$. Для обозначения интегралов в правых частях (11) и (12) будем использовать в дальнейшем соответственно обозначения $\langle x, \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle_\rho$ и $\langle x, d\Xi \rangle = \langle x, d\Xi \rangle_\infty$, так что

$$\begin{aligned}\langle x, \xi \rangle &= \langle x, \xi \rangle_\rho = \int x(t) \xi(t) dt, \quad 1 \leq \rho < \infty, \\ \langle x, d\Xi \rangle &= \langle x, d\Xi \rangle_\infty = \int x(t) d\Xi(t), \quad \rho = \infty.\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{L}_\gamma$, $1 \leq \gamma \leq \infty$, при $\gamma = \infty$ есть пространство $\tilde{L}_\infty$, при $1 < \gamma < \infty$ – пространство L_γ , (а значит, пространство $\tilde{L}_\gamma$ при $1 < \gamma \leq \infty$) и, наконец, при $\gamma = 1$ – пространство M . Для обозначения нормы элементов $x \in \mathcal{L}_\gamma$ будет использоваться обозначение $\|x\|_{\mathcal{L}_\gamma}$, а также обозначение $\|x\|_\gamma$; в частности, $\|\Xi\|_1 = \bigvee \Xi$, $\Xi \in M = \mathcal{L}_1$. В этих обозначениях имеем $L_\rho^* = \mathcal{L}_{\rho'}^*$, $1 \leq \rho \leq \infty$.

Расширим область определения рассматриваемых здесь операторов. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ есть пространство σ -аддитивных σ -конечных (знакопеременных) мер Лебега Ξ на $\mathbb{R}^m$, для каждой из которых найдется показатель $\mu = \mu(\Xi) \leq 0$ со свойством

$$\int (1 + |t|^2)^\mu d|\Xi|(t) < \infty,$$

где $|\Xi|$ – модуль меры Ξ , т.е. (неотрицательная) мера, заданная соотношением $|\Xi| = \Xi^+ - \Xi^-$, и Ξ^+, Ξ^- есть неотрицательная и неположительная составляющие меры Ξ . В дальнейшем нам удобно будет иногда меру $\Xi \in \mathcal{M}$ обозначать также через $\xi = d\Xi$. Ясно, что $M \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{S}'$. Для локально абсолютно непрерывной меры $\Xi \in \mathcal{M}$ ее производная ξ (относительно классической меры Лебега dt) принадлежит пространству Σ . Обратно, каждая функция $\xi \in \Sigma$ порождает естественным образом меру $\Xi \in \mathcal{M}$. В этом смысле $\Sigma \subset \mathcal{M}$. Пусть Θ – любой из операторов A, A^*, B, B^*, H, H^* . Если функция $x \in \Sigma$ и мера $\Xi \in \mathcal{M}$ таковы, что для любой функции $\phi \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$\int x(t)(\Theta^* \phi)(t) dt = \int \phi(t) d\Xi(t),$$

то будем считать, что x принадлежит области определения $\mathcal{D}(\Theta)$ оператора Θ и мера Ξ или, что то же самое, $\xi = d\Xi$ есть значение Θx оператора Θ на функции x .

Для пары пространств $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, каждое из которых есть либо одно из определенных выше функциональных пространств $\Sigma, L_\rho, \tilde{L}_\rho, C$, либо одно из пространств мер $\mathcal{M}, M$, обозначим через $\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}; \Theta)$ множество элементов (т.е. функций или мер) $x \in \mathcal{X}$, таких, что значение Θx оператора Θ на элементе x , определяемое по схеме Соболева, принадлежит $\mathcal{Y}$. Таким образом, только что введенное множество $\mathcal{D}(\Theta)$ есть $\mathcal{D}(\Sigma, \mathcal{M}; \Theta)$. Кроме того, в этих обозначениях, к примеру, имеем $D(\Theta) = \mathcal{D}(\Sigma, \Sigma; \Theta)$, $W_p(\Theta) = \mathcal{D}(\Sigma, L_p; \Theta)$, $W_{r,p}(\Theta) = \mathcal{D}(L_r, L_p; \Theta)$.

Введем пространства

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{r'}(B^*) &= \{\varphi \in \mathcal{D}(B^*) : B^* \varphi \in \mathcal{L}_{r'}\} = \mathcal{D}(\Sigma, \mathcal{L}_{r'}; B^*), \\ \mathcal{W}_{q'}(H^*) &= \{\psi \in \mathcal{D}(H^*) : H^* \psi \in \mathcal{L}_{q'}\} = \mathcal{D}(\Sigma, \mathcal{L}_{q'}; H^*)\end{aligned}$$

и выделим в них классы

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{r'}(B^*) &= \{\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*) : \|B^*\varphi\|_{r'} \leq 1\}, \\ \mathcal{Q}_2 &= N\mathcal{Q}_{r'}(B^*) = \{\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*) : \|B^*\varphi\|_{r'} \leq N\}, \\ \mathcal{Q}_1 &= \mathcal{Q}_{q'}(H^*) = \{\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*) : \|H^*\psi\|_{q'} \leq 1\}.\end{aligned}$$

Для элемента $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ положим

$$\mathcal{F}(\psi, N\mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} = \inf\{\|\psi - \varphi\|_{p'} : \varphi \in N\mathcal{Q}_{r'}(B^*)\}, \quad \psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*); \quad (13)$$

это есть наилучшее приближение в пространстве $\tilde{L}_{p'}$ функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ классом $\mathcal{Q}_2 = N\mathcal{Q}_{r'}(B^*)$. Тогда величина

$$\mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*), N\mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} = \sup\{\mathcal{F}(\psi, N\mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\} \quad (14)$$

есть наилучшее приближение в $\tilde{L}_{p'}$ класса $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{q'}(H^*)$ классом $\mathcal{Q}_2 = N\mathcal{Q}_{r'}(B^*)$. Обозначим далее через $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = \mathcal{P}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*), N\mathcal{Q}_{r'}(B^*))$ множество линейных отображений класса $\mathcal{Q}_1$ в класс $\mathcal{Q}_2$, а точнее, множество линейных отображений P пространства $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$ в пространство $\mathcal{W}_{r'}(B^*)$ со свойством

$$\|B^*P\psi\|_{r'} \leq N\|H^*\psi\|_{q'}, \quad \psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*),$$

или, что то же самое, $P\mathcal{Q}_{q'}(H^*) \subset N\mathcal{Q}_{r'}(B^*)$. Для оператора $P \in \mathcal{P}(N)$ положим

$$\mathcal{J}(P) = \mathcal{G}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*); P)_{p'} = \sup\{\|\psi - P\psi\|_{p'} : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\}.$$

Тогда величина

$$\mathcal{G}(N) = \mathcal{G}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)_{p'} = \mathcal{G}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*), N\mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} = \inf\{\mathcal{G}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*); P)_{p'} : P \in \mathcal{P}(N)\} \quad (15)$$

есть наилучшее линейное приближение в пространстве $\tilde{L}_{p'}$ класса $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{q'}(H^*)$ классом $\mathcal{Q}_2 = N\mathcal{Q}_{r'}(B^*)$. Вероятно, более естественно выглядят задачи исследования величин ${}^*\mathcal{F}(N)$ и ${}^*\mathcal{G}(N)$ соответственно наилучшего и наилучшего линейного приближения в пространстве $\tilde{L}_{p'}$ класса ${}^*\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_{q'}(H)$ классом ${}^*\mathcal{Q}_2 = N\mathcal{Q}_{r'}(B)$. Однако, нетрудно убедиться, что

$${}^*\mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(N), \quad {}^*\mathcal{G}(N) = \mathcal{G}(N),$$

и при этом, именно задачи $\mathcal{F}(N)$ и $\mathcal{G}(N)$ естественным образом возникнут в дальнейших наших рассуждениях.

Ниже при исследовании задач (в случае $p = \infty$) возникнет еще одно условие на оператор B . Область определения оператора B можно расширить до множества $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; B)$. А именно, относительно мер $X \in \mathcal{M}$ и $\Xi \in \mathcal{M}$ будем считать, что X принадлежит области определения $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; B)$ оператора B , и мера Ξ есть значение BX оператора B на функции X : $\Xi = BX$, если для любой функции $\phi \in \mathcal{S}$ имеет место равенство

$$\int (B^*\phi)(t) dX(t) = \int \phi(t) d\Xi(t).$$

Обозначим через (М) условие, которое состоит в том, что любая мера $\Xi \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; B)$ локально абсолютно непрерывна, и, как следствие, производная $d\Xi$ каждой такой меры относительно классической меры Лебега dt принадлежит Σ , т.е. $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; B) = \mathcal{D}(\Sigma, \mathcal{M}; B)$. Этим свойством обладает, к примеру, довольно широкий класс операторов дифференцирования с постоянными коэффициентами. Однако, в дальнейшем нам понадобится несколько более слабое по сравнению с (М) условие на оператор B и параметр ρ , $1 \leq \rho \leq \infty$, которое мы обозначим через (М, ρ): любая мера $\Xi \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{L}_\rho; B)$ локально абсолютно непрерывна, т.е. $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{L}_\rho; B) = \mathcal{D}(\Sigma, \mathcal{L}_\rho; B)$.

2. Вспомогательные утверждения. Пространство

$$W_{r,p} = W_{r,p}(B) = \{x \in L_r \cap \mathcal{D}(B) : Bx \in L_p\}$$

является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_{W_{r,p}} = \|x\|_r + \|Bx\|_p,$$

что легко следует из соотношения

$$\int x B^* \phi dt = \int \phi Bx dt, \quad \phi \in \mathcal{S},$$

определяющего элемент Bx , и предположения $B\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. Обозначим через $\mathring{W}_{r,p}(B)$ замыкание множества $\mathcal{S}$ в $W_{r,p}(B)$. Ясно, что $\mathring{W}_{r,p}(B) \subset W_{r,p}(B)$; это вложение может быть строгим (см. пример в [10]). В дальнейшем для нас важным будет являться случай, когда множество $\mathcal{S}$ плотно в $W_{r,p}(B)$, т.е. имеет место свойство

$$\mathring{W}_{r,p}(B) = W_{r,p}(B). \quad (16)$$

В настоящее время имеется много результатов, посвященных подобным вопросам (см. монографии [19]–[21] и обзор [5]). Следующее утверждение содержится в работах автора [12] и [10]. Для удобства формулировки этого утверждения и дальнейших ссылок введем условие на параметр p и оператор B , которое будет обозначаться через (B, p) .

Условие (B, p) состоит в том, что в случае $1 < p \leq \infty$ оператор B обладает свойством

$$\{g \in C_0, Bg = 0\} \implies g = 0,$$

а в случае $p = 1$ – свойством

$$\{g \in C, Bg = 0\} \implies g = 0. \quad (17)$$

ЛЕММА 1. Если выполнено условие (B, p) , то множество $\mathcal{S}$ плотно в $W_{r,p}(B)$, т.е. имеет место (16).

Как видно из следующего довольно простого утверждения, доказательство которого можно найти в [12], условие (B, p) обеспечивает также плотность множества $B\mathcal{S}$ в пространстве L_p .

ЛЕММА 2. Для того чтобы множество $B\mathcal{S}$ было плотно в L_p , необходимо и достаточно, чтобы оператор B обладал свойством

$$\{g \in L_{p'} \cap C_0, Bg = 0\} \implies g = 0,$$

если $p > 1$, и свойством (17), если $p = 1$.

Задачи (3) и (2) естественно изучать в том случае, когда выполнено следующее условие:

(E) имеет место вложение

$$W_{r,p}(B) \subset W_{r,q}(A), \quad (18)$$

и, более того, существует (конечная) константа K такая, что

$$\|Ax\|_q \leq K(\|x\|_r + \|Bx\|_p), \quad x \in W_{r,p}(B).$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это условие выполнено. Исследованию этого свойства посвящено много работ (см. монографии [19]–[21], работы [22], [23] и приведенную в них библиографию). Так известно [22], что при $m = 1$, т.е. на оси (а также и на полуоси $[0, \infty)$) для операторов дифференцирования порядка k и n , $0 \leq k < n$, за исключением некоторых вырожденных значений параметров, неравенство (18) или, что то же самое, неравенство (6) с конечной константой имеет место в том и только том случае, если выполняется условие

$$\frac{n-k}{r} + \frac{k}{p} \geq \frac{n}{q}.$$

ЛЕММА 3. *Допустим, что выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) и условие (E) . Тогда если для пары функций $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$, $\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*)$ разность $\chi = \psi - \varphi$ принадлежит пространству $\tilde{L}_{p'}$, то для любой функции $x \in W_{r,p}(B)$ справедливо представление*

$$\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - \langle x, B^* \varphi \rangle_r = \int (Bx)(t) \chi(t) dt. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $x \in \mathcal{S}$, а значит, и $Ax \in \mathcal{S}$. Исходя из определения функции $H^* \psi$ в силу предположения (Φ) получаем

$$\langle Ax, H^* \psi \rangle_q = \int (HAx)(t) \psi(t) dt = \int (Bx)(t) \psi(t) dt.$$

Кроме того, имеем

$$\langle x, B^* \varphi \rangle_r = \int (Bx)(t) \varphi(t) dt.$$

Эти соотношения дают представление (19) на функциях $x \in \mathcal{S}$.

Пусть теперь $x \in W_{r,p}(B)$. В силу предположений (B, p) существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ такая, что $\|x - x_n\|_{W_{r,p}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\|x - x_n\|_r \rightarrow 0$ и $\|Bx - Bx_n\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно условию (E) будет иметь место также свойство $\|Ax - Ax_n\|_q \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Записав (19) для функций x_n и перейдя в полученном соотношении к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим (19) для функции x . Лемма доказана.

Для функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и линейного ограниченного функционала $\Upsilon \in L_r^*$ рассмотрим величину

$$\nu(\psi, \Upsilon) = \sup\{\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - \Upsilon x : x \in Q_{r,p}(B)\}. \quad (20)$$

ЛЕММА 4. *Допустим, что выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) и в случае $p = \infty$ – условие (M, r') . Тогда если функция $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и функционал $\Upsilon \in L_r^*$, представленный в виде (11) при $1 \leq r < \infty$ и (12) при $r = \infty$, таковы, что $\nu(\psi, \Upsilon) < \infty$, то существует функция*

$$\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*) \quad (21)$$

со свойствами

$$B^* \varphi = \begin{cases} \xi & \text{при } 1 \leq r < \infty, \\ d\Xi & \text{при } r = \infty, \end{cases} \quad (22)$$

$$\|\psi - \varphi\|_{p'} = \nu(\psi, \Upsilon), \quad (23)$$

и для любой функции $x \in W_{r,p}(B)$ имеет место представление

$$\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - \Upsilon x = \langle Bx, \psi - \varphi \rangle_p. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{S}_p(B)$ множество функций $x \in \mathcal{S}$ с $\|Bx\|_p \leq 1$ и положим

$$\mu(\psi, \Upsilon) = \sup\{\langle Ax, H^*\psi \rangle_q - \Upsilon x : x \in \mathcal{S}_p(B)\}.$$

Поскольку $\mathcal{S}_p(B) \subset Q_{r,p}(B)$, то

$$\mu(\psi, \Upsilon) \leq \nu(\psi, \Upsilon) < \infty. \quad (25)$$

Покажем, что существует функция $\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*)$ со свойством (22) такая, что для функций $x \in \mathcal{S}$ имеет место представление (24), и выполняется равенство

$$\|\psi - \varphi\|_{p'} = \mu(\psi, \Upsilon),$$

аналогичное (23); этот факт мы будем называть в этом доказательстве утверждением леммы на множестве функций $\mathcal{S}$.

Применяя известные соображения Сарда (см., например, лемму 2 и ее применение в работе [24]), заключаем, что на множестве $\mathcal{S}$ имеет место представление

$$\langle Ax, H^*\psi \rangle_q - \Upsilon x = \Pi Bx, \quad x \in \mathcal{S}, \quad (26)$$

где Π – линейный функционал на линейном пространстве $Y = B\mathcal{S}$. По предположению $Y = B\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ и, тем более, $Y \subset L_p$; наделим Y нормой пространства L_p . Имеем $\|\Pi\|_{Y^*} = \mu(\psi, \Upsilon)$. Продолжим Π линейно с сохранением нормы с Y на все пространство L_p . Для функционала Π на L_p в зависимости от значения p будет иметь место представление

$$\Pi y = \langle y, \chi \rangle_p, \quad y \in L_p, \quad (27)$$

где

$$\chi \in \tilde{L}_{p'}, \quad \mu(\psi, \Upsilon) = \|\chi\|_{p'} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \quad (28)$$

$$\chi = dX, \quad X \in M, \quad \mu(\psi, \Upsilon) = \bigvee X \quad \text{при } p = \infty. \quad (29)$$

Поскольку $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и $x \in \mathcal{S}$, то

$$\langle Ax, H^*\psi \rangle_q = \int (HAx)(t)\psi(t) dt = \int (Bx)(t)\psi(t) dt. \quad (30)$$

Дальнейшие рассуждения будут проведены в зависимости от значений параметров r, p . Рассмотрим вначале случай $1 \leq r, p < \infty$. Из (26), (30), (27), (28) и (11) следует соотношение

$$\Upsilon x = \int x(t)\xi(t) dt = \int (\psi(t) - \chi(t))Bx(t) dt, \quad x \in \mathcal{S};$$

это соотношение означает, что разность $\varphi = \psi - \chi$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(B^*)$ оператора B^* и $\xi = B^*\varphi$, а следовательно, $\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*)$. При этом в силу (28)

$$\|\psi - \varphi\|_{p'} = \|\chi\|_{p'} = \mu(\psi, \Upsilon).$$

Соотношение (26) совпадает с (24) для $x \in \mathcal{S}$. Тем самым, мы проверили, что в случае $1 \leq r, p < \infty$ утверждение леммы на классе функций $\mathcal{S}$ выполняется.

Пусть теперь $r = \infty$, $1 \leq p < \infty$. В этом случае (26), (30), (27), (28) и (12) дают соотношение

$$\Upsilon x = \int x(t) d\Xi(t) = \int (\psi(t) - \chi(t)) Bx(t) dt, \quad x \in \mathcal{S},$$

которое означает, что разность $\varphi = \psi - \chi$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(B^*)$ оператора B^* и $d\Xi = B^*\varphi$. Отсюда, как и выше, заключаем, что и в случае $r = \infty$, $1 \leq p < \infty$ имеет место утверждение леммы на функциях $x \in \mathcal{S}$.

Нам осталось рассмотреть значения параметров $p = \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Обозначим при $1 \leq r < \infty$ через Ξ локально абсолютно непрерывную меру, производная которой есть функция ξ из представления (11) функционала Υ . Тогда (в рассматриваемом случае $p = \infty$, $1 \leq r \leq \infty$) соотношения (26), (30), (27), (29), (11) и (12) дают представление

$$\Upsilon x = \int x(t) d\Xi(t) = \int Bx(t) d(\Psi(t) - X(t)), \quad x \in \mathcal{S}, \quad (31)$$

где Ψ есть локально абсолютно непрерывная мера, производной которой является функция ψ . Соотношение (31) означает, что мера $\Phi = \Psi - X$ принадлежит множеству $\mathcal{D}(\mathcal{M}, L_r^*; B^*)$ и $\Xi = B^*\Phi$. В силу предположения (M, r') мера Φ локально абсолютно непрерывна; обозначим ее производную через φ . Мера $X = \Psi - \Phi$ как разность локально абсолютно непрерывных мер будет также локально абсолютно непрерывна. В силу (29) производная χ меры X суммируема и

$$\mu(\psi, \Upsilon) = \bigvee X = \|\chi\|_1 = \|\psi - \varphi\|_1.$$

Таким образом, утверждения леммы на множестве $\mathcal{S}$ справедливы для всех значений параметров. В условиях леммы 4 выполняются и условия леммы 3 на параметры и операторы. Кроме того, функции ψ , φ и $\chi = \psi - \varphi$ также удовлетворяют условиям леммы 3. Согласно лемме 3 на множестве $W_{r,p}(B)$ имеет место представление (24). Из этого представления следует, что

$$\nu(\psi, \Upsilon) = \sup\{\langle Ax, H^*\psi \rangle_q - \Upsilon x : x \in Q_{r,p}(B)\} \leq \|\chi\|_{p'} = \|\psi - \varphi\|_{p'} = \mu(\psi, \Upsilon).$$

В силу (25) это влечет свойство (23).

Убедимся, что в условиях леммы для любой функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ функция φ со свойствами (21)–(23) единственная. Предположим, что для некоторой функции ψ нашлись две функции φ_1, φ_2 со свойствами (21)–(23). Тогда их разность $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ принадлежит пространству $\mathcal{D}(\tilde{L}_{p'}, \mathcal{L}_{r'}; B^*)$ и является решением однородного уравнения $B^*\varphi = 0$. В силу определения (1) отсюда следует, что

$$\int (B\zeta)(t) \varphi(t) dt = 0, \quad \zeta \in \mathcal{S}. \quad (32)$$

Согласно лемме 2 условие (B, p) влечет плотность множества $B\mathcal{S}$ в пространстве L_p . Поэтому из (32) следует, что $\varphi = 0$. Лемма 4 полностью доказана.

Для функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ положим

$$\sigma(\psi, N) = \inf\{\nu(\psi, \Upsilon) : \Upsilon \in L_r^*, \|\Upsilon\| \leq N\}, \quad (33)$$

где величина $\nu(\psi, \Upsilon)$ определена формулой (20). Сейчас мы покажем, что $\sigma(\psi, N)$ совпадает с величиной

$$\mathcal{F}(\psi, N) = \mathcal{F}(\psi, N \mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} = \inf\{\|\psi - \varphi\|_{p'} : \varphi \in N \mathcal{Q}_{r'}(B^*)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда для любой функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(B^*)$ имеет место равенство

$$\sigma(\psi, N) = \mathcal{F}(\psi, N \mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'}. \quad (34)$$

Действительно, неравенство $\sigma(\psi, N) \leq \mathcal{F}(\psi, N)$ вытекает из леммы 3. Обратное неравенство $\mathcal{F}(\psi, N) \leq \sigma(\psi, N)$ следует из леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из доказательства лемм 3, 4 и следствия 1, кроме равенства (34) можно утверждать, что каждому экстремальному функционалу Υ задачи (33) соответствует функция $\varphi \in N \mathcal{Q}_{r'}(B^*)$, для которой $\|\psi - \varphi\|_{p'} = \mathcal{F}(\psi, N)$, и, обратно, каждая такая функция порождает экстремальный функционал.

3. Двойственность задач о вычислении модуля непрерывности оператора и наилучшего приближения класса классом. В этом пункте мы будем использовать следующий известный результат В.Н. Габушина [25] о наилучшем приближении линейных неограниченных функционалов линейными ограниченными.

ЛЕММА 5. Пусть X есть банахово пространство, Λ – линейный (не обязательно ограниченный) функционал на X , $\mathcal{K}$ – центрально симметричное выпуклое множество, принадлежащее области определения функционала Λ . Тогда при любом $N > 0$ для величины

$$e(N) = \inf_{\|\Upsilon\|_{X^*} \leq N} \sup_{x \in K} (\Lambda x - \Upsilon x)$$

имеет место равенство

$$e(N) = \sup_{x \in \mathcal{K}} (\Lambda x - N\|x\|_X).$$

В приводимых ниже утверждениях на оператор H будет наложено еще одно ограничение (H, ρ) : множество $HW_\rho(H)$ плотно в пространстве L_ρ .

Ясно, что условие (H, ρ) будет выполнено, если множество $H\mathcal{S}$ будет плотно в L_ρ ; поэтому лемма 3 дает достаточные условия выполнения свойства (H, ρ) .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) , условие (H, q') и в случае $p = \infty$ – условие (M, r') . Тогда при любом $N > 0$ задачи (3) и (14) связаны равенством $R(N) = \mathcal{F}(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\sigma(N) = \sup\{\sigma(\psi, N) : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\},$$

где величина $\sigma(\psi, N)$ определена формулами (33), (20). В силу (34) имеем

$$\begin{aligned} \sigma(N) &= \sup\{\sigma(\psi, N) : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\} \\ &= \sup\{\mathcal{F}(\psi, N \mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'} : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\} = \mathcal{F}(N). \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно лемме 5 справедливо равенство

$$\sigma(\psi, N) = \sup\{\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - N\|x\|_r : x \in Q_{r,p}(B)\}.$$

Отсюда

$$\sigma(N) = \sup_{x \in Q_{r,p}(B)} \sup_{\psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)} \{\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - N \|x\|_r\}.$$

Далее, условие (H, q') приводит к тому, что

$$\sup\{\langle Ax, H^* \psi \rangle_q : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\} = \|Ax\|_q,$$

а это дает, окончательно, соотношение

$$\sigma(N) = \sup\{\|Ax\|_q - N \|x\|_r : x \in Q_{r,p}(B)\} = R(N).$$

Теорема 1 доказана.

4. Двойственность задачи Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными и задачи о линейном приближении класса классов.

ЛЕММА 6. Для любых значений параметров p, q, r ($1 \leq p, q, r \leq \infty$), если выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) и в случае $p = \infty$ — условие (M, r') , то задачи (3) и (14) связаны неравенством

$$\mathcal{G}(N) \leq E(N). \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $E(N) < \infty$. Допустим, что для линейного ограниченного оператора $T \in \mathcal{B}_r^q(N)$ величина $U(T)$ конечна. Функции $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ сопоставим функционал $\Upsilon = \Upsilon_\psi$ по формуле

$$\Upsilon x = \Upsilon_\psi x = \langle Tx, H^* \psi \rangle_q.$$

Видно, что Υ_ψ есть линейный ограниченный функционал на L_r , т.е. $\Upsilon_\psi \in L_r^*$ и к тому же

$$\begin{aligned} \|\Upsilon_\psi\|_{L_r^*} &\leq \|H^* \psi\|_{q'} N, \\ \sup\{\langle Ax, H^* \psi \rangle_q - \Upsilon_\psi x : x \in Q_{r,p}\} &= \sup\{\langle Ax - Tx, H^* \psi \rangle_q : x \in Q_{r,p}\} \\ &\leq U(T) \|H^* \psi\|_{q'}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4 существует функция $\varphi \in \mathcal{W}_{r'}(B^*)$ со свойствами (11), (12), (22), (23). Отсюда будет следовать, что она обладает свойствами

$$\|\psi - \varphi\|_{p'} \leq U(T) \|H^* \psi\|_{q'}, \quad \|B^* \varphi\|_{r'} \leq N \|H^* \psi\|_{q'}. \quad (36)$$

Функция φ функцией ψ определяется однозначно и, таким образом, $\varphi = P\psi$, где P есть некоторое (однозначное) отображение пространства $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$ в пространство $\mathcal{W}_{r'}(B^*)$. Как следствие (36) для величины

$$\mathcal{J}(P) = \mathcal{G}(\mathcal{Q}_{q'}(H^*); P)_{p'} = \sup\{\|\psi - P\psi\|_{p'} : \psi \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)\}$$

имеет место оценка

$$\mathcal{J}(P) \leq U(T). \quad (37)$$

Убедимся, что P является линейным отображением пространства $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$ в пространство $\mathcal{W}_{r'}(B^*)$. Пусть ψ_1, ψ_2 есть две функции из $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и c_1, c_2 – две вещественные константы. Введем функцию $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$; эта функция также принадлежит пространству $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$. Положим $\varphi_1 = P\psi_1, \varphi_2 = P\psi_2, \varphi = P\psi, \tilde{\varphi} = \varphi - (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = P\psi - (c_1P\psi_1 + c_2P\psi_2)$. Функция $\tilde{\varphi}$ принадлежит пространству $\tilde{L}_{p'}$ и удовлетворяет уравнению $B^*\tilde{\varphi} = 0$. Отсюда, также как при доказательстве леммы 4, заключаем, что $\tilde{\varphi} = 0$. А этот факт означает, что оператор P является линейным и, значит, $P \in \mathcal{P}(N)$. Из (37) следует теперь неравенство (35). Лемма доказана.

В следующем утверждении будет доказано неравенство, обратное (35), хотя и при более сильных в сравнении с леммой 6 ограничениях.

ЛЕММА 7. *Допустим, что $1 < q < \infty, 1 \leq p, r \leq \infty$, выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) , условие (H, q') и в случае $p = \infty$ – условие (M, r') . Тогда при любом $N > 0$ имеет место неравенство*

$$E(N) \leq \mathcal{G}(N). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathcal{G}(N) < \infty$, и оператор $P \in \mathcal{P}(N)$ обладает свойством $\mathcal{J}(P) < \infty$. Тот факт, что $P \in \mathcal{P}(N)$ означает, что P есть линейное отображение пространства $\mathcal{W}_{q'}(H^*)$ в пространство $\mathcal{W}_{r'}(B^*)$ со свойством

$$\|B^*P\psi\|_{r'} \leq N\|H^*\psi\|_{q'}, \quad \psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*).$$

Отсюда следует, что функция $\varphi = B^*P\psi$ однозначно определяется функцией $H^*\psi$, $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$, т.е. $\varphi = B^*P\psi$ есть значение некоторого (однозначного) отображения $\mathcal{T}$ на функции $H^*\psi$. Нетрудно понять, что $\mathcal{T}$ есть линейный ограниченный оператор из пространства $\mathcal{H} = H^*\mathcal{W}_{q'}(H^*) = \{H^*\psi : \psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)\}$, наделенного нормой пространства $\mathcal{L}_{q'} = L_{q'}$, в пространство $\mathcal{L}_{r'}$ и при этом $\|\mathcal{T}\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_{r'}} \leq N$. В силу предположения (H, q') множество $\mathcal{H}$ плотно в пространстве $L_{q'}$. Поэтому оператор $\mathcal{T}$ можно продолжить с $\mathcal{H}$ на $L_{q'}$ по непрерывности (и, значит, с сохранением нормы). Обозначим это продолжение тем же символом $\mathcal{T}$.

Пусть $T = \mathcal{T}^*$ есть оператор, сопряженный оператору $\mathcal{T}$. Тогда T есть линейный ограниченный оператор из пространства $\mathcal{L}_{r'}^*$ в пространство $L_q^* = L_q$ (напомним предположение $1 < q < \infty$). Мы будем рассматривать оператор T лишь на подпространстве $L_r \subset \mathcal{L}_{r'}^*$. Для нормы оператора T справедлива оценка

$$\|T\| = \|T\|_{L_r \rightarrow L_q} \leq \|T\|_{\mathcal{L}_{r'}^* \rightarrow L_q} = \|\mathcal{T}\|_{L_{q'} \rightarrow \mathcal{L}_{r'}} \leq N.$$

Далее, в силу определения оператора T для любых функций $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и $x \in L_r$ имеем

$$\langle x, B^*P\psi \rangle_r = \langle x, \mathcal{T}H^*\psi \rangle_r = \langle Tx, H^*\psi \rangle_q,$$

а значит, если $\psi \in \mathcal{W}_{q'}(H^*)$ и $x \in W_{r,p}$, то

$$\langle Ax - Tx, H^*\psi \rangle_q = \langle Ax, H^*\psi \rangle_q - \langle Tx, H^*\psi \rangle_q = \langle Ax, H^*\psi \rangle_q - \langle x, B^*P\psi \rangle_r.$$

Пара функций ψ и $\varphi = B^*P\psi$ удовлетворяют условиям леммы 3. В силу этой леммы для функций $x \in W_{r,p}$ справедливо соотношение

$$\langle Ax - Tx, H^*\psi \rangle_q = \langle Bx, \psi - \varphi \rangle_p.$$

Отсюда следует, что

$$|\langle Ax - Tx, H^*\psi \rangle_q| \leq \|Bx\|_p \|\psi - \varphi\|_{p'}.$$

Используя предположение (H, q') , заключаем, что имеет место оценка $U(T) \leq \mathcal{J}(P)$. А это оценка влечет неравенство (38). Лемма доказана.

Объединяя последние две леммы, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Допустим, что $1 < q < \infty$, $1 \leq p, r \leq \infty$, выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) , условие (H, q') и в случае $p = \infty$ — условие (M, r') . Тогда задачи (3) и (14) связаны равенством $E(N) = \mathcal{G}(N)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При доказательстве последней теоремы, а точнее, в доказательствах двух последних лемм (по крайней мере в случае $1 < q < \infty$) между множествами операторов $P \in \mathcal{P}(N)$ и $T \in \mathcal{B}_r^q(N)$, для которых соответствующие уклонения $\mathcal{J}(P)$ и $U(T)$ конечны, установлено взаимно однозначное соответствие: $B^*(P\psi) = \mathcal{T}H^*\psi$, где $\mathcal{T}$ — оператор, сопряженный для оператора T ; при этом $U(T) = \mathcal{J}(P)$. Отсюда следует, что если один из операторов P или T является экстремальным, то экстремальным будет и второй (в соответствующей задаче).

5. Связь задач в случае $q = \infty$. Если элемент $\theta \in \mathcal{S}'$ таков, что $\theta * \phi \in \mathcal{S}$ или, то же самое, $\check{\theta} * \phi \in \mathcal{S}$ для любой функции $\phi \in \mathcal{S}$, то можно говорить о свертке $\zeta * \theta$ элементов $\zeta \in \mathcal{S}'$ и θ , определив ее соотношением $\langle \zeta * \theta, \phi \rangle = \langle \zeta, \check{\theta} * \phi \rangle$, $\phi \in \mathcal{S}$. Напомним, что по предположению этим свойством обладают элементы $a, b, h \in \mathcal{S}'$, определяющие операторы A, B, H и им сопряженные операторы A^*, B^*, H^* .

Допустим, что существует фундаментальная функция ϑ оператора H^* , т.е. существует элемент $\vartheta \in \mathcal{S}'$, такой, что свертка $\vartheta * h$ есть δ -функция. В этом случае для любой функции $\phi \in \mathcal{S}$ имеем $\vartheta * b * \phi = \vartheta * h * a * \phi = \vartheta * h * A^* \phi = A^* \phi = a * \phi$, а значит, справедливо представление $a = \vartheta * b$. К примеру, если существует фундаментальная функция κ оператора B^* , то перечисленными свойствами обладает функция $\vartheta = a * \kappa = A^* \kappa$.

Предположим, что, к тому же, функция ϑ является классической функцией, а точнее, $\vartheta \in \Sigma$. Тогда, очевидно, имеем $\vartheta \in \mathcal{W}_1(H^*)$ и $H^*\vartheta$ есть атомная мера, сосредоточенная в точке $t = 0$, вариация которой равна 1; таким образом, $\vartheta \in \mathcal{Q}_1(H^*)$. Рассмотрим величину (см. обозначение (13))

$$\varepsilon(N) = \varepsilon(\vartheta; r, p; N) = \inf \{ \|\vartheta - \varphi\|_{\tilde{L}_{p'}} : \varphi \in \mathcal{Q}_{r'}(B^*) \} = \mathcal{F}(\vartheta, N \mathcal{Q}_{r'}(B^*))_{p'}; \quad (39)$$

это есть наилучшее приближение в $\tilde{L}_{p'}$ функции ϑ множеством $N \mathcal{Q}_{r'}(B^*)$. Величина, более общая, чем (39), в связи с задачей (2) изучалась в работе автора [12]; в теореме 2 работы [12] содержится, в частности, следующее утверждение.

ЛЕММА 8. Если $q = \infty$, $1 \leq p, r \leq \infty$, выполнено условие факторизации (Φ) и условие (B, p) , то имеет место равенство

$$E(N) = \varepsilon(N). \quad (40)$$

Следующее утверждение дополняет теоремы 1 и 2 в случае $q = \infty$. Последнее равенство в (41) ниже означает, что функция $\vartheta \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)$ является, в данной ситуации, максимальной в задаче (14), т.е. на ней в (14) достигается верхняя грань. Первое равенство в (41) есть результат В. Н. Габушина [25] и является следствием приведенной выше леммы 5.

ТЕОРЕМА 3. Если $q = \infty$, $1 \leq p, r \leq \infty$, выполнено условие факторизации (Φ) , условие (B, p) , условие (E) и в случае $p = \infty$ – условие (M, r') , то имеют место равенства

$$E(N) = R(N) = \mathcal{G}(N) = \mathcal{F}(N) = \varepsilon(N). \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\vartheta \in \mathcal{Q}_{q'}(H^*)$, исходя из определений (14), (15), используя неравенства (35) и равенство (40), будем иметь следующую цепочку соотношений:

$$\varepsilon(N) \leq \mathcal{F}(N) \leq \mathcal{G}(N) \leq E(N) = \varepsilon(N).$$

А это влечет все утверждения теоремы 3.

6. Заключительные замечания. Рассматриваемое в данной работе множество неограниченных линейных операторов A и B типа свертки содержит важный класс дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В настоящее время наиболее полно задачи (2), (3), (13), (15) изучены для операторов дифференцирования $Ax = x^{(k)}$, $Bx = x^{(n)}$, $0 \leq k < n$, в пространствах функций одного переменного на оси (и полуоси); для функций многих переменных они изучены в существенно меньшей степени (см. библиографию в [4], [5]). Безусловно, в пространствах функций многих переменных все четыре задачи представляют большой интерес в случае, когда A и B есть степени (итерации)

$$A = \Delta^k, \quad B = \Delta^n, \quad 0 \leq k < n,$$

оператора Лапласа

$$\Delta x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 x}{\partial t_j^2}.$$

Имеется ряд случаев, когда обсуждаемые в этой работе задачи для классов функций многих переменных могут быть решены точно. Так, без труда переносятся на многомерный случай одномерные результаты работ Субботина, Тайкова [16] для значений параметров $p = q = r = 2$ и Тайкова [26] для $q = \infty$, $p = r = 2$, в которых исследованы задачи (5), неравенство (6) (в работе [26]), а также соответствующие задачи приближения одного класса дифференцируемых функций другим классом более гладких функций. В работах [9], [10], [12] имеется ряд точных многомерных результатов, относящихся к задаче (2), полученных с помощью соображений инвариантности. В последнее время появился ряд интересных результатов о точном решении задач, близких к задачам (2), (3), на классах функций многих переменных, в которых в полной мере проявляется многомерность задач (см. работы [5], [27], [28] и содержащуюся там библиографию). Полученные в данной работе результаты позволяют в ряде новых случаев получить решение задач (13) и (15) как следствие соответствующих результатов для задач (2), (3).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 137–148.
- [2] Арестов В. В. О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 3–28.
- [3] Клоц Б. Е. Приближения дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 1. С. 21–32.
- [4] Арестов В. В., Габущин В. Н. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995. № 11. С. 42–68.
- [5] Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 89–124.
- [6] Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
- [7] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [8] Larsen R. An Introduction to the Theory of Multipliers. Berlin: Springer, 1971.
- [9] Арестов В. В. Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 43–70.
- [10] Арестов В. В. Приближение операторов типа свертки линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 3–19.
- [11] Арестов В. В. Приближение инвариантных операторов // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 1. С. 9–29.
- [12] Арестов В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 3–20.
- [13] Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 3–20.
- [14] Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.
- [15] Субботин Ю. Н. Наилучшее приближение класса функций другим классом // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 495–504.
- [16] Субботин Ю. Н., Тайков Л. В. Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 2. С. 257–264.
- [17] Арестов В. В., Габущин В. Н. О приближении классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 2. С. 105–112.
- [18] Субботин Ю. Н. Связь сплайн-приближений с задачей приближения класса классом // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 5. С. 501–510.
- [19] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [20] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [21] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [22] Габущин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 291–298.
- [23] Тимошин О. А. О наилучшем приближении дифференциальных операторов с частными производными // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 78–87.
- [24] Арестов В. В. Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 29–42.
- [25] Габущин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем. заметки. 1970. Т. 8. № 5. С. 551–562.
- [26] Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Матем. заметки. 1968. Т. 4. № 2. С. 233–238.
- [27] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 73–106.
- [28] Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A. Exact inequalities of Kolmogorov type for multivariable functions and their applications // East J. Approx. 1997. V. 3. № 2. P. 155–186.