Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Банах, Об одном кардинальном групповом инварианте, связанном с разбиениями абелевых групп, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 341–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:14:33

УДК 519.4

ОБ ОДНОМ КАРДИНАЛЬНОМ ГРУППОВОМ ИНВАРИАНТЕ, СВЯЗАННОМ С РАЗБИЕНИЯМИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Т. О. Банах

Для каждой абелевой группы G вводится кардинальный инвариант $\chi(G)$ и исследуются его свойства. В частном случае группы $G = \mathbb{Z}^n$ кардинал $\chi(\mathbb{Z}^n)$ равен минимальной мощности существенного подмножества в $\mathbb{Z}^n$, т.е. такого подмножества $A \subset \mathbb{Z}^n$, что для любой раскраски группы $\mathbb{Z}^n$ в n цветов существует бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторой точки α из A . Доказывается оценка $n(n+1)/2 \leq \chi(\mathbb{Z}^n) < 2^n$ для всех n , а также равенство $\chi(\mathbb{Z}^n) = n(n+1)/2$ для $n \leq 3$. Полностью описана структура существенных подмножеств мощности $\chi(\mathbb{Z}^n)$ в $\mathbb{Z}^n$ для $n \leq 3$.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] доказано, что для любого разбиения $\mathbb{Z}^n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ группы $\mathbb{Z}^n$ на n подмножеств существует такая точка $a \in \mathbb{Z}^n$ и бесконечное симметричное множество $S \subset \mathbb{Z}^n$, $S = -S$, что $a + S \subset A_i$ для некоторого i . И. В. Протасов отметил, что для случая $n = 2$ точка a может быть выбрана из любого наперед заданного подмножества $A \subset \mathbb{Z}^n$, содержащего $n + 1$ аффинно независимые точки, и выдвинул гипотезу, что этот факт справедлив для любого n . В данной заметке мы покажем, что эта гипотеза Протасова неверна.

Мы посмотрим на проблему с несколько более общей точки зрения и для абелевых групп G определим кардинальный групповой инвариант $\chi(G)$. Все группы, рассматриваемые в этой статье, предполагаются абелевыми. Напомним определение *кардинала* $\nu(G)$, введенного И. В. Протасовым в [2]. Для группы G $\nu(G)$ есть минимальная мощность такого покрытия $\mathcal{U}$ группы, что пересечение $U \cap (2g - U)$ конечно для любых $g \in G$ и $U \in \mathcal{U}$ (отметим, что условие конечности пересечения $U \cap (2g - U)$ эквивалентно тому, что $g + S \not\subset U$ для любого бесконечного симметричного подмножества $S \subset G$, $S = -S$). В [1] кардинал $\nu(G)$ вычислен для всех абелевых групп, причем

$$\nu(G) = \begin{cases} r_0(G) + 1, & \text{если группа } G \text{ конечно порождена,} \\ r_0(G) + 2, & \text{если } G \text{ — счетная бесконечно порожденная группа с } |[G]_2| < \aleph_0, \\ \max\{|[G]_2|, \log |G|\}, & \text{если } G \text{ несчетна, либо } |[G]_2| \geq \aleph_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $r_0(G)$ — свободный ранг группы G (см. [3]), $[G]_2 = \{g \in G : 2g = 0\}$ — подгруппа элементов порядка 2 группы G и $\log |G| = \min\{\gamma : 2^\gamma \geq |G|\}$. В частности, $\nu(\mathbb{Z}^n) = n + 1$ для $n \in \mathbb{N}$.

Из определения кардинала $\nu(G)$ следует, что для любого покрытия $\mathcal{U}$ группы G мощности $|\mathcal{U}| < \nu(G)$ существует такая точка $g \in G$ и множество $U \in \mathcal{U}$, что пересечение $U \cap (2g - U)$ бесконечно. Назовем подмножество A группы G *существенным*, если для

любого покрытия $\mathcal{U}$ группы G мощности $|\mathcal{U}| < \nu(G)$ существует такая точка $a \in A$ и множество $U \in \mathcal{U}$, что пересечение $U \cap (2a - U)$ бесконечно. Для группы G определим *кардинал* $\chi(G)$ как минимальную мощность существенного подмножества группы G (определение корректно, поскольку множество G всегда существенно в G). Отметим, что группа G конечна тогда и лишь тогда, когда $\chi(G) = 0$ (в этом случае существенным является пустое множество).

В связи с приведенными выше определениями возникают следующие общие проблемы:

- А) описать структуру существенных подмножеств группы G ;
- Б) вычислить кардинал $\chi(G)$ для конкретных групп;
- В) для подгруппы $H \subset G$ установить соотношения между кардинальными числами $\chi(G)$, $\chi(H)$ и $\chi(G/H)$.

Вопрос А) по-видимому сложен и на данный момент исчерпывающий ответ на него известен только для групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$: подмножество группы $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Z}^2$) существенно тогда и только тогда, когда оно непусто (соответственно содержит три аффинно независимые точки).

Несколько лучше обстоит ситуация с вопросами Б) и В). Ниже через s обозначается мощность континуума.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – абелева группа мощности $|G| \leq s$. Тогда

- 1) $\chi(G) = 0$ в том и только том случае, когда группа G конечна;
- 2) $\chi(G) = 1$ в том и только том случае, когда либо $\nu(G) = 2$, либо $|[G]_2| \geq \aleph_0$;
- 3) если группа G конечно порождена, то $\chi(G) = \chi(\mathbb{Z}^{r_0(G)})$;
- 4) если G – бесконечно порожденная группа с $\nu(G) > 2$ и $|[G]_2| < \aleph_0$, то $\chi(G) = \aleph_0$.

Таким образом, для конечно-порожденных абелевых групп G вычисление кардинала $\chi(G)$ сводится к нахождению числа $\chi(\mathbb{Z}^n)$ для некоторого n . В этом плане мы располагаем следующей информацией.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$

- 1) $\chi(\mathbb{Z}^n) \leq \chi(\mathbb{Z}^{n+1})$;
- 2) $n(n+1)/2 \leq \chi(\mathbb{Z}^n) < 2^n$;
- 3) $\chi(\mathbb{Z}^n) = n(n+1)/2$, если $n \leq 3$.

Отметим, что из теоремы 2 следует, что существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^3$ должно содержать как минимум шесть точек. Следовательно, гипотеза Протасова неверна.

Из формулы (1) и теорем 1, 2 непосредственно вытекает следующее утверждение, касающееся проблемы В).

ТЕОРЕМА 3. Если G – группа мощности $|G| \leq s$ с конечным числом элементов порядка 2, то для любой ее подгруппы $H \subset G$ имеют место неравенства $\chi(H) \leq \chi(G)$ и $\chi(G/H) \leq \chi(G)$.

Отметим, что условие конечности подгруппы $[G]_2$ существенно, поскольку для группы $G = \mathbb{Z}_2^\omega \oplus \mathbb{Z}^\omega$ и ее подгрупп $H = \mathbb{Z}^\omega$ и $H' = \mathbb{Z}_2^\omega$ имеем $\aleph_0 = \chi(H) = \chi(G/H') \not\leq \chi(G) = 1$.

Вернемся теперь к вопросу А) об описании структуры существенных подмножеств групп. Назовем подмножество A группы G *минимальным существенным подмножеством*, если A не содержит собственных существенных подмножеств. Очевидно, что

каждое конечное существенное множество содержит некоторое минимальное существенное подмножество, и что каждое конечное существенное подмножество мощности $\chi(G)$ минимально.

Треугольником в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы называем любое множество, состоящее из трех аффинно независимых точек; *октаэдром* в $\mathbb{R}^n$ называется любое шестиеlementное подмножество вида $\{a \pm e_1, a \pm e_2, a \pm e_3\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$ – некоторая точка и e_1, e_2, e_3 – три линейно независимых вектора в $\mathbb{R}^n$. Далее мы отождествляем $\mathbb{Z}^n$ с подмножеством $\mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *треугольники, и только они, являются минимальными существенными подмножествами группы $\mathbb{Z}^2$;*
- 2) *каждое существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^2$ содержит треугольник;*
- 3) *октаэдры и только они являются минимальными существенными подмножествами мощности $\leq 6 = \chi(\mathbb{Z}^3)$ группы $\mathbb{Z}^3$;*
- 4) *существуют минимальные существенные конечные подмножества группы $\mathbb{Z}^3$, не являющиеся октаэдрами.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Если G – конечно порожденная группа, то $\chi(G) = \chi(\mathbb{Z}^{r_0(G)})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно основной структурной теореме для конечно порожденных абелевых групп [3, 15.2] группа G изоморфна прямой сумме $\mathbb{Z}^{r_0(G)} \oplus K$ для некоторой конечной группы K . Далее мы отождествляем группу G с $\mathbb{Z}^{r_0(G)} \oplus K$. Неравенство $\chi(G) \leq \chi(\mathbb{Z}^{r_0(G)})$ очевидно, поскольку каждое существенное подмножество в $\mathbb{Z}^{r_0(G)}$ существенно в $\mathbb{Z}^{r_0(G)} \oplus K$ (здесь используется тот факт, что $\nu(G) = \nu(\mathbb{Z}^{r_0(G)})$). Докажем обратное неравенство. Пусть A – существенное подмножество мощности $|A| = \chi(G)$ в $G = \mathbb{Z}^{r_0(G)} \oplus K$. Мы утверждаем, что проекция $\text{pr}(A)$ множества A на $\mathbb{Z}^{r_0(G)}$ существенна в $\mathbb{Z}^{r_0(G)}$. Пусть $\mathcal{U}$ – любое покрытие группы $\mathbb{Z}^{r_0(G)}$ мощности $|\mathcal{U}| < \nu(\mathbb{Z}^{r_0(G)}) = r_0(G) + 1$. Тогда $\mathcal{U} \times K = \{U \times K \mid U \in \mathcal{U}\}$ – покрытие группы G мощности $|\mathcal{U} \times K| < \nu(G)$. Поскольку $A \subset G$ – существенное подмножество, существует такая точка $a \in A$ и множество $U \in \mathcal{U}$, что пересечение $U \times K \cap (2a - U \times K)$ бесконечно. Поскольку группа K конечна и $U \times K \cap (2a - U \times K) \subset (U \cap (2 \text{pr}(a) - U)) \times K$, мы заключаем, что пересечение $U \cap (2 \text{pr}(a) - U)$ тоже бесконечно. Иными словами, $\text{pr}(A)$ – существенное подмножество $\mathbb{Z}^{r_0(G)}$ и, следовательно, $\chi(\mathbb{Z}^{r_0(G)}) \leq \chi(G)$.

ЛЕММА 2. *Пусть G – бесконечно порожденная абелева группа мощности $|G| \leq c$ с $\nu(G) > 2$ и $|[G]_2| < \aleph_0$ и H – конечно порожденная подгруппа в G . Тогда подмножество H несущественно в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (1) следует, что $\nu(H) < \nu(G)$. Тогда из определения кардинала $\nu(H)$ и неравенств $\nu(H) < \nu(G)$ и $\nu(G) > 2$ следует существование такого покрытия $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ группы H , что $2 \leq |\mathcal{U}| < \nu(G)$ и для любых $h \in H$ и $U \in \mathcal{U}$ пересечение $U \cap (2h - U)$ конечно. Пусть $[G/H]_2$ – множество элементов порядка 2 факторгруппы G/H . Тогда множество всех остальных элементов группы G/H можно представить в виде $(G/H) \setminus [G/H]_2 = -R \cup R$, где $R \subset G/H$ – такое множество, что $-R \cup R = \emptyset$. Пусть s – любое сечение проекции $\pi: G \rightarrow G/H$, т.е. такое отображение $s: G/H \rightarrow G$, что $\pi \circ s = \text{id}$. Определим покрытие $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ группы G , полагая

$$V_1 = (s(R) + H) \cup (s([G/H]_2) + U_1), \quad V_2 = (s(-R) + H) \cup (s([G/H]_2) + U_2), \\ V_i = s([G/H]_2) + U_i, \quad 2 < i \leq n.$$

Несложно проверить, что для любого $h \in H$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ пересечение $V_i \cap (2h - V_i)$ конечно. Поскольку $|\mathcal{V}| = |\mathcal{U}| < \nu(G)$, множество H несущественно в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение 3) очевидным образом следует из леммы 1. Докажем утверждение 4). Пусть G – бесконечно порожденная группа с $\nu(G) > 2$ и $|[G]_2| < \aleph_0$. По формуле (1) $\nu(G) \leq \aleph_0$ и по лемме 2 $\chi(G) \geq \aleph_0$. Для доказательства обратного неравенства зафиксируем счетную бесконечно-порожденную подгруппу $H \subset G$ с $r_0(H) = \min\{\aleph_0, r_0(G)\}$. Покажем, что множество H существенно в G . Пусть $\mathcal{U}$ – покрытие группы G мощности $|\mathcal{U}| < \nu(G)$. Тогда $\mathcal{U} \cap H = \{U \cap H \mid U \in \mathcal{U}\}$ – покрытие группы H мощности $|\mathcal{U} \cap H| \leq |\mathcal{U}|$. По формуле (1) $\nu(G) = \min\{\aleph_0, r_0(G) + 2\} = \min\{\aleph_0, r_0(H) + 2\} = \nu(H)$. Поскольку $|\mathcal{U} \cap H| < \nu(G) = \nu(H)$, по определению кардинала $\nu(H)$ существует точка $h \in H$ и множество $U \in \mathcal{U}$ такие, что пересечение $(H \cap U) \cap (2h - H \cap U)$ бесконечно. Но тогда пересечение $U \cap (2h - U)$ тоже бесконечно. Таким образом, счетное множество H существенно в G . Следовательно, $\chi(G) \leq \aleph_0$.

Утверждение 1) следует из определения кардиналов $\nu(G)$ и $\chi(G)$. Наконец, утверждение 2) легко выводится из утверждений 1), 3), 4) и очевидного неравенства $\chi(\mathbb{Z}^n) > 1$ для $n > 1$.

Доказательство теоремы 2 разобьем на ряд лемм.

Для вектора ℓ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ через $\ell^\perp$ обозначается гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, проходящая через 0 и перпендикулярная вектору ℓ .

ЛЕММА 3. Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ мощности $|A| < n(n+1)/2$ и любого конечного множества $B \subset \mathbb{R}^n$ существует разбиение $\mathbb{R}^n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ и вектор $\ell \in \mathbb{R}^n$ такие, что

- i) для любых $a \in A$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ пересечение $A_i \cap (2a - A_i)$ ограничено;
- ii) для любых $b \in B$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ проекция множества $A_i \cap (2b - A_i)$ на гиперплоскость $\ell^\perp$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ лемма очевидна. Предположим, что лемма 3 верна для всех $k \leq n$. Покажем, что она верна для $k = n + 1$. Зафиксируем множество $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ мощности $|A| < (n+1)(n+2)/2$ и конечное подмножество $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Без ограничения общности можно считать, что $|A| = (n+1)(n+2)/2 - 1$. Обозначим через $\text{conv}(A)$ выпуклую оболочку множества A в $\mathbb{R}^{n+1}$. Для выпуклого многогранника $\text{conv}(A)$ нетрудно найти опорную гиперплоскость s , содержащую не менее $n+2$ точек множества A . Тогда за пределами гиперплоскости s останется менее $(n+1)(n+2)/2 - (n+2) = n(n+1)/2$ точек множества A . Сделав соответствующее ортогональное аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, мы можем считать, что гиперплоскость s совпадает с подпространством $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, а множество $A \setminus s$ содержится в полупространстве $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 0\}$. Обозначим через $\text{pr}_n: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n = s$ проекцию на первые n координат и положим $A' = \text{pr}_n(A \setminus s)$ и $B' = \text{pr}_n(A \cup B)$. Согласно индуктивному предположению существует разбиение $\mathbb{R}^n = A'_1 \cup \dots \cup A'_n$ и вектор $\ell \in \mathbb{R}^n$ такие, что

- i') для любых $a \in A'$ и $1 \leq i \leq n$ пересечение $A'_i \cap (2a - A'_i)$ ограничено;
- ii') для любых $b \in B'$ и $1 \leq i \leq n$ проекция множества $A'_i \cap (2b - A'_i)$ на гиперплоскость $\ell^\perp \subset \mathbb{R}^n$ ограничена.

Без ограничения общности $\ell = (0, \dots, 0, 1, 0)$ и $\ell^\perp = \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n = x_{n+1} = 0\}$. Обозначим через $\text{pr}_{n-1}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} = \ell^\perp$ (ортогональную)

проекцию на первые $n - 1$ координат. Из условия ii') следует существование такого числа $R > 0$, что

$$\bigcup_{\substack{b \in B' \\ 1 \leq i \leq n}} \text{pr}_{n-1}(A'_i \cap (2b - A'_i)) \subset [-R, R]^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Обозначим через $\text{pr}_\ell: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot \ell$ проекцию на n -ю координату и положим $m = \min_{b \in B'} \text{pr}_\ell(b)$. Искомое разбиение $\mathbb{R}^{n+1} = A_0 \cup \dots \cup A_n$ определим следующим образом:

$$A_0 = [-R, R]^{n-1} \times (-\infty, m) \times \{0\} \cup \bigcup_{t > 0} [-R - t, R + t]^{n-1} \times \mathbb{R} \times \{t\},$$

$$A_i = (A'_i \times \mathbb{R}) \setminus A_0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Можно проверить, что это разбиение и вектор ℓ удовлетворяют условиям i), ii) леммы 3.

ЛЕММА 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $n(n+1)/2 \leq \chi(\mathbb{Z}^n) < 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $n(n+1)/2 \leq \chi(\mathbb{Z}^n)$ очевидным образом следует из леммы 3. Для доказательства неравенства $\chi(\mathbb{Z}^n) < 2^n$ покажем, что множество $E = \{0, 1\}^n \setminus \{1\}^n$ существенно в $\mathbb{Z}^n$. Предположим, что это не так. Тогда существует разбиение $\mathbb{Z}^n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ такое, что для любых $a \in E$ и $1 \leq i \leq n$ пересечение $A_i \cap (2a - A_i)$ конечно. Пусть R – положительное четное число такое, что

$$\bigcup_{\substack{a \in E \\ 1 \leq i \leq n}} A_i \cap (2a - A_i) \subset (-R, R)^n. \quad (2)$$

Обозначим через K n -мерный куб $[-R, R]^n \subset \mathbb{R}^n$ и через ∂K его границу. Разобьем куб K на n -мерные кубики вида $x + [0, 2]^n$, где $x \in (2\mathbb{Z})^n$. Далее, каждый такой кубик триангулируем так, чтобы вершины каждого симплекса этой триангуляции принадлежали множеству $(2\mathbb{Z})^n$ и были линейно упорядочены относительно естественного частичного порядка “ $\leq$ ” на $(2\mathbb{Z})^n$ (отметим, что такая триангуляция единственна). Таким образом, мы определяем некую триангуляцию T куба K .

Обозначим через Δ $(n-1)$ -мерный симплекс с вершинами $v_1, \dots, v_n$. Построим кусочно-линейное отображение $f: K \rightarrow \Delta$, определив его в вершинах триангуляции формулой $f(v) = v_i$, где i выбирается из условия $v \in A_i$.

Зафиксируем любую точку $x \in \partial K$ и покажем, что $f(-x) \neq f(x)$. Пусть σ – минимальный симплекс триангуляции T , содержащий точку x , и пусть $x_1 \leq \dots \leq x_k$ – его вершины, линейно упорядоченные относительно частичного порядка “ $\leq$ ” на $\mathbb{Z}^n$. Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$ – цвет вершины x_k , т.е. такое i , что $x_k \in A_i$. Из минимальности σ следует, что x – внутренняя точка симплекса σ , а из определения отображения f , что $f(x) \in \Delta \setminus \Delta_i$, где Δ_i – $(n-2)$ -мерная грань симплекса Δ , не содержащая вершины v_i .

Пусть τ – минимальный симплекс триангуляции T , содержащий точку $-x$. Отметим, что $\sigma, \tau \subset \partial K$. Нетрудно проверить, что $\tau^{(0)} \subset 2E - x_k$, где $\tau^{(0)}$ обозначает множество вершин симплекса τ . Поскольку $x_k \in A_i \cap \partial K$, из соотношения (2) вытекает, что $\tau^{(0)} \subset \mathbb{Z}^n \setminus A_i$. Тогда по определению отображения f $f(-x) \in \Delta_i$. Следовательно, $f(-x) \neq f(x)$.

Поскольку ∂K является топологической $(n-1)$ -мерной сферой и Δ вкладывается в $\mathbb{R}^{n-1}$, из теоремы Борсука–Улама об антиподах [4, гл. V, § 8.9] следует существование такого $x \in \partial K$, что $f(x) = f(-x)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЛЕММА 5. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\chi(\mathbb{Z}^n) \leq \chi(\mathbb{Z}^{n+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\mathbb{Z}^n$ в виде прямой суммы $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$ и обозначим через $\text{pr}_1: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ и $\text{pr}_2: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ естественные проекции. Пусть A – существенное подмножество в $\mathbb{Z}^{n+1}$ мощности $|A| = \chi(\mathbb{Z}^{n+1})$. В силу леммы 4 кардинал $|A|$ конечен. Покажем, что $\text{pr}_1(A)$ – существенное множество в $\mathbb{Z}^n$. Для этого зафиксируем произвольное покрытие $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ группы $\mathbb{Z}^n$ мощности $|\mathcal{U}| < \nu(\mathbb{Z}^n) = n + 1$. Пусть $m = \max_{a \in A} \text{pr}_2(a)$. Положим $V_0 = \mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z} \cap (m, \infty)) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ и $V_i = (U_i \times \mathbb{Z}) \setminus V_0$, $1 \leq i \leq n$. Очевидно, что $\mathcal{V}$ – покрытие группы $\mathbb{Z}^{n+1}$ мощности $|\mathcal{V}| = n + 1 < \nu(\mathbb{Z}^{n+1})$. Поскольку подмножество $A \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ существенно, пересечение $V_i \cap (2a - V_i)$ бесконечно для некоторой точки $a \in A$ и индекса $i \in \{0, \dots, n\}$. По определению множества V_0 пересечение $V_0 \cap (2a - V_0)$ пусто для любого $a \in A$. Следовательно, $i \neq 0$. Пусть $(x, y) \in \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$ – координаты точки a . Из определения множества V_i следует, что $V_i \cap (2a - V_i) \subset (U_i \cap (2x - U_i)) \times (\mathbb{Z} \cap [2y - m, m])$. Поскольку “отрезок” $\mathbb{Z} \cap [2y - m, m]$ содержит конечное число точек, пересечение $U_i \cap (2x - U_i)$ должно быть бесконечным. Стало быть, множество $\text{pr}(A) \ni x$ существенно в $\mathbb{Z}^n$ и $\chi(\mathbb{Z}^n) \leq |\text{pr}(A)| \leq |A| = \chi(\mathbb{Z}^{n+1})$.

ЛЕММА 6. Имеет место равенство $\chi(\mathbb{Z}^3) = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\chi(\mathbb{Z}^3) \geq 6$ следует из леммы 4. Для доказательства обратного неравенства, покажем, что шестиэлементное подмножество $E = \{0, 1\}^3 \setminus \{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ существенно в $\mathbb{Z}^3$. Предположим, что это не так. Тогда существует разбиение $\mathbb{Z}^3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ такое, что для любых $a \in E$ и $i \in \{1, 2, 3\}$ пересечение $A_i \cap (2a - A_i)$ конечно. Пусть R – положительное четное число такое, что

$$\bigcup_{\substack{a \in E \\ 1 \leq i \leq 3}} A_i \cap (2a - A_i) \subset (-R, R)^3. \quad (3)$$

Обозначим через K куб $[-R, R]^3 \subset \mathbb{R}^3$ и разобьем его границу ∂K на квадратики со стороной 2 и вершинами в множестве $(2\mathbb{Z})^3 \cap \partial K$. Далее, каждый такой квадратик разобьем на два треугольника так, чтобы для каждого треугольника T этого разбиения существовала точка $x \in \mathbb{Z}^3$ со свойством $T^{(0)} \subset 2E - x$, где $T^{(0)}$ обозначает множество вершин треугольника T . Используя включение (3), мы видим, что

$$T^{(0)} \subset (2\mathbb{Z})^3 \setminus A_i, \quad (4)$$

где i выбирается из условия $x \in A_i$. Таким образом, мы определили некоторую триангуляцию границы ∂K куба K .

Обозначим через Δ двумерный симплекс с вершинами v_1, v_2, v_3 . Построим кусочно-линейное отображение $f: \partial K \rightarrow \Delta$, определив его в вершинах триангуляции формулой $f(v) = v_i$, где $v \in A_i$. Из кусочной линейности отображения f и соотношения (4) следует, что f отображает границу ∂K куба K в границу $\partial \Delta$ симплекса Δ . Рассмотрим плоскость $s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ и ограничение $f|_{\partial K \cap s}$ отображения f на “диаметр” $\partial K \cap s$ “сферы” ∂K . Поскольку “диаметр” $\partial K \cap s$ стягиваем в ∂K , отображение $f|_{\partial K \cap s}: \partial K \cap s \rightarrow \partial \Delta$ гомотопически тривиально. Докажем, что это не так.

Повторяя аргументацию леммы 4, можно доказать, что $f(x) \neq f(-x)$ для любой точки $a \in \partial K \cap s$.

Посредством любого гомеоморфизма отождествим $\partial \Delta$ с единичной окружностью $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости. Поскольку $|f(x)| = |f(-x)| = 1$

и $f(x) \neq f(-x)$, то $f(x) - tf(-x) \neq 0$ для любых $x \in \partial K \cap s$ и $t \in [0, 1]$. Тогда гомотопия $h: (\partial K \cap s) \times [0, 1] \rightarrow \partial \Delta = S^1$, определенная формулой

$$h(x, t) = \frac{f(x) - tf(-x)}{|f(x) - tf(-x)|},$$

непрерывна и соединяет отображение $f|_{\partial K \cap s} = h_0$ с отображением

$$h_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

которое, как легко убедиться, антиподально, т.е. $h_1(-x) = -h_1(x)$ для любого $x \in \partial K \cap s$. Согласно [4, гл. IV, § 7.10] антиподальные отображения (в том числе отображение h_1) не гомотопически тривиальны. Получаем противоречие с гомотопической тривиальностью отображения $f|_{\partial K \cap s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Теорема очевидным образом следует из лемм 4—6.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4. Для каждого $n \geq 0$ рассмотрим подмножество $T_n \subset \mathbb{R}^n$, определенное следующим (индуктивным) образом: $T_0 = \emptyset \subset \mathbb{R}^0 = \{0\}$ и $T_n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup T_{n-1} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ для $n \geq 1$.

ЛЕММА 7. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует разбиение $A_1 \cup \dots \cup A_n$ пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

- i) для любых $1 \leq i \leq n$ и $a \in \mathbb{R} \times T_{n-1}$ пересечение $A_i \cap (2a - A_i)$ ограничено;
- ii) для любых $1 \leq i \leq n$ и $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ проекция пересечения $A_i \cap (2b - A_i)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ лемма очевидна. Предположим, что для некоторого n мы построили разбиение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = A'_1 \cup \dots \cup A'_n$, удовлетворяющее условиям леммы 7. Искомое разбиение $A_0 \cup \dots \cup A_n$ пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ определим следующим образом:

$$A_0 = \bigcup_{t>0} [0, \infty) \times [-t, t]^{n-1} \times \{-t\} \cup \bigcup_{t, \tau \geq 0} \{-\tau\} \times [-t - \tau, t + \tau]^{n-1} \times \{-t\},$$

$$A_i = (A'_i \times \mathbb{R}) \setminus A_0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Несложно проверить, что это разбиение удовлетворяет условиям леммы 7.

Назовем подмножество A группы $\mathbb{Z}^n$ *T-образным*, если $f(A) \subset \mathbb{R} \times T_{n-1}$ для некоторого инъективного аффинного отображения $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Отметим, что подмножество группы $\mathbb{Z}^2$ *T-образно* тогда и только тогда, когда оно содержится в некоторой прямой в плоскости $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{Z}^2$; подмножество $A \subset \mathbb{Z}^3$ *T-образно*, если $A \subset s \cup \pi_+$ для некоторой плоскости $s \subset \mathbb{R}^3 \supset \mathbb{Z}^3$ и замкнутой полуплоскости π_+ в $\mathbb{R}^3$, пересекающейся с s по граничной прямой $\partial \pi_+$.

Из леммы 7 вытекает следующая важная лемма.

ЛЕММА 8. *T-образные подмножества не существенны в $\mathbb{Z}^n$.*

Следующая лемма дает полное описание структуры существенных подмножеств группы $\mathbb{Z}^2$.

ЛЕММА 9. *Подмножество $A \subset \mathbb{Z}^2$ существенно тогда и лишь тогда, когда оно содержит три аффинно независимые точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^2$. Согласно лемме 8 множество A не T -образно. Тогда A не содержится в прямой и, следовательно, содержит три аффинно независимые точки.

Покажем теперь, что любое подмножество $A \subset \mathbb{Z}^2$, содержащее три аффинно независимые точки a_0, a_1, a_2 , существенно в $\mathbb{Z}^2$. Зафиксируем любое разбиение $\mathbb{Z}^2 = A_1 \cup A_2$ группы $\mathbb{Z}^2$ на два подмножества. Пусть $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ – (единственное) аффинное отображение, удовлетворяющее условию $f(e_i) = a_i$, $i = 1, 2, 3$, где $e_0 = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Поскольку точки a_0, a_1, a_2 аффинно независимы, отображение f инъективно. Из доказательства леммы 4 следует существование таких $i \in \{1, 2\}$ и $j \in \{0, 1, 2\}$, что множество $f^{-1}(A_i) \cap (2e_j - f^{-1}(A_i))$ бесконечно. Ввиду инъективности отображения f множество $A_i \cap (2a_j - A_i) \supset f(f^{-1}(A_i) \cap (2e_j - f^{-1}(A_i)))$ тоже бесконечно, т.е. A – существенное подмножество $\mathbb{Z}^2$.

Теперь мы займемся изучением существенных подмножеств группы $\mathbb{Z}^3$, которую мы отождествляем с подмножеством в $\mathbb{R}^3$.

ЛЕММА 10. *Октаэдры и только они являются существенными подмножествами $\mathbb{Z}^3$ мощности ≤ 6 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $A = \{a \pm e_1, a \pm e_2, a \pm e_3\} \subset \mathbb{Z}^3$ – октаэдр (здесь $a \in \mathbb{R}^3$ и e_1, e_2, e_3 – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^3$). Мы покажем, что A – существенное подмножество в $\mathbb{Z}^3$. Отметим, что существенное подмножество $E = \{0, 1\}^3 \setminus \{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ из доказательства леммы 6 является октаэдром $\{a' \pm e'_i : i = 1, 2, 3\}$, где

$$a' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad e'_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e'_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e'_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Определим аффинное отображение $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, положив $f(a') = a$ и $f(a' + e'_i) = a + e_i$ для $i = 1, 2, 3$. Легко видеть, что отображение f инъективно. Отметим, что

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= f(a' + e'_1) = a + e_1 \in \mathbb{Z}^3, \\ f(0, 1, 0) &= f(a' + e'_2) = a + e_2 \in \mathbb{Z}^3, \\ f(0, 0, 1) &= f(a' + e'_3) = a + e_3 \in \mathbb{Z}^3, \\ f(1, 1, 1) &= f(2a' + (a' + e'_2) + (a' + e'_3) - 3(a' + e'_1)) \\ &= 2f(a') + f(a' + e'_2) + f(a' + e'_3) - 3f(a' + e'_1) \in \mathbb{Z}^3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(\mathbb{Z}^3) \subset \mathbb{Z}^3$. Отметим также, что

$$f(a' - e'_i) = f(2a' - (a' + e'_i)) = 2f(a') - f(a' + e'_i) = 2a - (a + e_i) = a - e_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, $f(E) = A$.

Покажем, что множество A существенно в $\mathbb{Z}^3$. Пусть $\mathcal{U}$ – покрытие группы $\mathbb{Z}^3$ мощности $|\mathcal{U}| < 4 = \nu(\mathbb{Z}^3)$. Тогда $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ – покрытие группы $\mathbb{Z}^3$ мощности $|f^{-1}(\mathcal{U})| < 4$. Из доказательства леммы 7 следует, что множество E существенно в $\mathbb{Z}^3$. Стало быть, существует точка $e \in E$ и множество $U \in \mathcal{U}$ такие, что пересечение $f^{-1}(U) \cap (2e - f^{-1}(U))$ бесконечно. Ввиду инъективности отображения f

пересечение $U \cap (2f(e) - U) \supset f(f^{-1}(U) \cap (2e - U))$ тоже бесконечно. Следовательно, множество $A = f(E) \ni f(e)$ существенно в $\mathbb{Z}^3$.

Покажем теперь, что любое существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^3$, содержащее не более шести точек, является октаэдром. Обозначим через $\text{conv}(A)$ выпуклую оболочку множества A в $\mathbb{R}^3$. Зафиксируем любую грань многогранника $\text{conv}(A)$ и обозначим через s плоскость, в которой эта грань лежит. Поскольку $|A| \leq 6$, за пределами плоскости лежит не более трех точек множества A . Поскольку плоскость s опорная для выпуклого множества $\text{conv}(A)$, множество $A \setminus s$ содержится в одном из полупространств относительно плоскости s . Обозначим это полупространство через v_+ . Если существует плоскость π , содержащая множество $A \setminus s$ и пересекающая плоскость s , то в силу леммы 8 множество A несущественно, поскольку оно содержится в T -образном подмножестве $s \cup (v_+ \cap \pi)$. Отсюда мы делаем вывод, что $|A| = 6$, $|A \setminus s| = 3$ и (единственная) плоскость, содержащая множество $A \setminus s$, параллельна плоскости s .

Таким образом, $\text{conv}(A)$ – выпуклый многогранник, каждая грань которого содержит ровно три точки множества A ; остальные три точки множества A образуют параллельную грань. Несложно показать, что октаэдры – единственные выпуклые многогранники с шестью вершинами, обладающие этим свойством.

ЛЕММА 11. *Существует минимальное существенное конечное подмножество группы $\mathbb{Z}^3$ мощности $> \chi(\mathbb{Z}^3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображения $f_i: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3, i = 1, 2, 3$, определенные формулами

$$f_1(x, y) = (-1, x, y), \quad f_2(x, y) = (x, -1, y), \quad f_3(x, y) = (x, y, -1).$$

Повторяя доказательство леммы 6, можно показать, что объединение

$$A = \bigcup_{1 \leq i \leq 3} f_i(\{0, 1\}^2)$$

трех квадратиков существенно в $\mathbb{Z}^3$. Множество A содержит некоторое минимальное существенное множество B . Легко видеть, что множество A не содержит октаэдров. Следовательно, B – не октаэдр и по лемме 10 $|B| > 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Теорема очевидным образом следует из лемм 9–11.

Наиболее интересным и интригующим открытым вопросом в данной тематике является вычисление конкретных значений $\chi(\mathbb{Z}^n)$ для $n > 3$. Отметим, что естественная (ввиду теоремы 2) оптимистическая гипотеза $\chi(\mathbb{Z}^n) = n(n+1)/2$ неверна в силу следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеет место неравенство $\chi(\mathbb{Z}^4) > 10$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 8 достаточно доказать, что любое десятиэлементное подмножество A группы $\mathbb{Z}^4$ T -образно. Можно рассуждать следующим образом. Рассмотрим выпуклую оболочку $\text{conv}(A)$ множества A в $\mathbb{R}^4 \supset \mathbb{Z}^4$. Несложно найти опорную к $\text{conv}(A)$ трехмерную гиперплоскость $s \subset \mathbb{R}^4$, содержащую не менее четырех точек множества A . Тогда $|A \setminus s| \leq 6$. Можно предполагать, что дополнение $A \setminus s$ непусто. (Если $A \setminus s = \emptyset$, то все множество A содержится в гиперплоскости s и, как легко убедиться, является T -образным множеством в $\mathbb{Z}^4$.) Рассмотрим выпуклую оболочку $\text{conv}(A \setminus s)$ множества $A \setminus s$ в $\mathbb{R}^4$. Можно предполагать, что существует такая

опорная к $\text{conv}(A \setminus s)$ гиперплоскость p , что $s \cap p \neq \emptyset$ и $|A \setminus (s \cup p)| \leq 2$. (Предположение отсутствия такой гиперплоскости p влечет $A \setminus s \subset s'$ для некоторого трехмерного аффинного подпространства, не пересекающего s . Меняя, если нужно, s и s' ролями, мы можем добиться, чтобы $|A \setminus s| \leq 5$. В этом случае можно провести любую опорную к $\text{conv}(A \setminus s)$ гиперплоскость p такую, что $p \cap s \neq \emptyset$ и $|(A \setminus s) \setminus p| \leq 2$.) Зафиксируем, наконец, любую гиперплоскость $q \subset \mathbb{R}^4$, содержащую множество $A \setminus (s \cup p)$ и пересекающую гиперплоскости s и p . Обозначим через $s_-, s_+, p_-, p_+, q_-, q_+$ открытые полупространства в $\mathbb{R}^4$ относительно гиперплоскостей s, p, q соответственно, причем $v_- \cap A = \emptyset$, $p_- \cap (A \setminus s) = \emptyset$, $q_- \cap (A \setminus (s \cup p)) = \emptyset$. Легко видеть, что

$$\mathbb{Z}^4 \cap (s \cup (p \cap v_+) \cup (q \cap v_+ \cap p_+))$$

является T -образным множеством в $\mathbb{Z}^4$, содержащим множество A .

Вышеприведенные рассуждения а также определение T -образных множеств наталкивают на следующий вопрос.

ВОПРОС 1. Справедливо ли неравенство $\chi(\mathbb{Z}^n) \geq n(n-1)$ для $n \in \mathbb{N}$? Более конкретно, является ли T -образным любое подмножество $A \subset \mathbb{Z}^n$ мощности $|A| < n(n-1)$?

Можно показать, что любое минимальное существенное подмножество четырехмерного куба $\{0, 1\}^4 \subset \mathbb{Z}^4$ содержит в точности четырнадцать точек (выброшены две диагональные точки). Следовательно, $11 \leq \chi(\mathbb{Z}^4) \leq 14$. Отметим, что в отличие от групп $\mathbb{Z}^n$, $1 \leq n \leq 3$, в $\mathbb{R}^4$ не существует правильного выпуклого многогранника, множество вершин которого является минимальным существенным подмножеством группы $\mathbb{Z}^4$ (поскольку правильные многогранники в $\mathbb{R}^4$ содержат 8, 16, 24, 120 либо 600 вершин [5]).

Вот еще некоторые другие вопросы, касающиеся проблематики данной статьи.

ВОПРОС 2. Справедливо ли строгое неравенство $\chi(\mathbb{Z}^n) < \chi(\mathbb{Z}^{n+1})$ для каждого n ?

ВОПРОС 3. Верна ли теорема 3 для групп G произвольной мощности?

ВОПРОС 4. Пусть G – группа с конечным числом элементов порядка 2, H – подгруппа группы G и A – существенное подмножество в G . Верно ли, что образ A при факторотображении $G \rightarrow G/H$ является существенным множеством в G/H ?

ВОПРОС 5. Существует ли существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^3$, не содержащее конечных существенных подмножеств?

ВОПРОС 6. Каждое ли существенное подмножество группы $\mathbb{Z}^3$ содержит минимальное существенное подмножество?

ВОПРОС 7. Существуют ли в $\mathbb{Z}^3$ минимальные существенные подмножества сколь угодно большой мощности?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Банах Т.О., Протасов И.В. Асимметричные разбиения абелевых групп // Матем. заметки (в печати).
- [2] Протасов И.В. Асимметрично разложимые абелевы группы // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №3. С. 468–471.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. М.: Мир, 1970.
- [4] Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [5] Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат, 1956.