Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, О продолжении нулем функций многих переменных, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 351–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 05:14:09

УДК 517.518.235

О ПРОДОЛЖЕНИИ НУЛЕМ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

О. В. Бесов

Устанавливаются достаточные условия на область $G \subset \mathbb{R}^n$ для возможности продолжения нулем на $\mathbb{R}^n$ заданных на G функций с сохранением гладкости в интегральной норме.

Библиография: 15 названий.

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < s < 1/p$ и при некотором $M > 0$ числовая функция $f \in L_p((0, \infty))$ обладает свойствами

$$\|f|L_p((0, \infty))\| \leq M, \quad \left(\int_0^\infty |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq Mh^s, \quad h \in (0, 1].$$

Тогда, как показано Кутнером [1],

$$\left(\int_0^h |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq CMh^s, \quad h \in (0, 1],$$

при некотором $C > 0$, не зависящем от f , M и h . Отсюда следует [1], очевидно, что для этой функции f после ее продолжения нулем на $(-\infty, 0]$ (с сохранением обозначения f) будет выполняться оценка

$$\left(\int_{-\infty}^\infty |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_1 Mh^s, \quad h \in (0, 1],$$

где C_1 не зависит от f , M , h . Этот результат (о возможности продолжения нулем с сохранением гладкости) был обобщен С. М. Никольским [2] на случай функций, заданных в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ с непрерывно дифференцируемой $(n-1)$ -мерной границей ∂G .

Возможность продолжения нулем с полуоси на ось для пространств $B_{pp}^s((0, \infty))$, $0 < s < 1/p$, установлена Г. Н. Яковлевым [3] и в эквивалентной форме В. А. Солонниковым [4]. Г. А. Калябин [5] установил возможность продолжения нулем функций пространств $B_{pq}^s(G)$, $F_{pq}^s(G)$, $0 < s < 1/p$, для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой $(n-1)$ -мерной границей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00243, и программы "Ведущие научные школы", грант № 96-15-96102.

Мы рассматриваем здесь области $G \subset \mathbb{R}^n$ со свойством гибкого конуса и устанавливаем достаточные условия для возможности продолжения нулем функций из пространств $B_{pq}^s(G)$, $F_{pq}^s(G)$ соответственно до функций из $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$.

В работе [5] Калябин строит сначала оператор продолжения (методом Стейна), а затем решает вопрос продолжения нулем, сводя его к ограниченности оператора умножения на характеристическую функцию области G . В нашей ситуации существование оператора продолжения априори неизвестно, оно фактически устанавливается при доказательстве возможности продолжения нулем.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, – n -мерное евклидово пространство со стандартным базисом $\{e^1, \dots, e^n\}$; $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e^i = (x_i)$. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ пусть $xy = (x_i y_i)$, $[x, y]$ – отрезок с концами в точках x, y ; $x \pm aE = \{y : y = x \pm az, z \in E\}$ ($E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ или $a \in \mathbb{R}^1$); $Q_0 = [-1, 1]^n$; G – область в $\mathbb{R}^n$, при $t > 0$ $G(t) = \{x : x + tQ_0 \subset G\}$; $U_t(E)$ – t -окрестность множества E , при $a \in \mathbb{R}^n$ $B_t(a) = U_t(a)$, $B_t = B_t(0)$; χ – характеристическая функция шара $B_1(0)$ или отрезка $[-1, 1]$, χ_E – характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Для числовой функции f , $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}^1$ положим

$$\begin{aligned}\Delta_i^m(h)f(x) &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + k h e^i), \\ \Delta_i^m(h, G)f(x) &= \begin{cases} \Delta_i^m(h)f(x), & [x, x + m h e^i] \subset G(|h|), \\ 0, & [x, x + m h e^i] \not\subset G(|h|), \end{cases} \\ \tilde{\Delta}_i^m(h, G)f(x) &= \int_{-1}^1 |\Delta_i^m(uh, G)f(x)| du;\end{aligned}$$

$C_0(\mathbb{R}^n)$ – пространство финитных непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций; $L_p(G)$ – лебегово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f|L_p(G)\| = \|f\|_{p,G} = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

(при $p = \infty$ правая часть понимается как $\text{ess sup}_G |f|$), $\|f\|_p = \|f|L_p\| = \|f|L_p(\mathbb{R}^n)\|$; L_q^* – пространство функций $f: (0, h_0) \rightarrow \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|f|L_q^*\| = \left(\int_0^{h_0} |f(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad h_0 > 0, \quad 1 \leq q < \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [6]). Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью со свойством гибкого конуса*, если при некоторых $\delta_0 > 0$, $T > 0$ для любого $x \in G$ существует путь

$$\rho(t) = (\rho_1(t), \dots, \rho_n(t)) = \rho(t, x), \quad 0 \leq t \leq T,$$

со свойствами:

- а) для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ $\rho_i(u)$ абсолютно непрерывны на $[0, T]$, $|\rho_i(u)| \leq 1$ для почти всех $u \in [0, T]$;
- б) $\rho(0) = 0$, $x + \bigcup_{0 \leq t \leq T} (\rho(t, x) + t\delta_0 Q_0) \subset G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $m > s > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < h_0 \leq 1$.

Пространствами $B_{pq}^s(G)$ ($1 \leq p, q \leq \infty$), $F_{pq}^s(G)$ ($1 < p, q < \infty$) называются банаховы пространства локально суммируемых на G функций с нормами соответственно

$$\|f|B_{pq}^s(G)\| = \|f|L_p(G)\| + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{h_0} \|\Delta_i^m(h, G) f\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q}$$

(при $q = \infty$ вместо L_q -нормы по мере dh/h берется L_∞ -норма),

$$\|f|F_{pq}^s(G)\| = \|f|L_p(G)\| + \sum_{i=1}^n \left\| \left(\int_0^{h_0} (\tilde{\Delta}_i^m(h, G) f)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \right\|_p.$$

Различные эквивалентные нормировки указанных пространств см., например, в [6]. В частности, нормы $B_{pq}^s(G)$, $F_{pq}^s(G)$ остаются эквивалентными при изменении h_0 , а для области G со свойством гибкого конуса и при изменении m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $s > 0$. Через $\mathring{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ ($\mathring{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G)$, $1 < p, q < \infty$), будем обозначать замыкание в норме $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ ($F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$) соответственно множества функций f , для которых $\text{dist}(\text{supp } f, \mathbb{R}^n \setminus G) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $s > 0$, $0 < h_0 \leq 1$. Через $\mathring{B}_{pq}^s(G)$ ($1 \leq p, q \leq \infty$) будем обозначать банахово пространство функций $f \in B_{pq}^s(G)$ с конечной нормой

$$\|f|\mathring{B}_{pq}^s(G)\| = \|f|B_{pq}^s(G)\| + \left(\int_0^{h_0} \|f|L_p(G \cap U_h(\partial G))\|^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q}$$

(при $q = \infty$ вместо L_q -нормы по мере dh/h берется L_∞ -норма).

Через $\mathring{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G)$ ($1 < p, q < \infty$) будем обозначать банахово пространство функций $f \in F_{pq}^s(G)$ с конечной нормой

$$\|f|\mathring{F}_{pq}^s(G)\| = \|f|F_{pq}^s(G)\| + \left(\int_G \chi\left(\frac{r(x)}{h_0}\right) \left| \frac{f(x)}{r(x)^s} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Легко видеть, что нормы $\mathring{B}_{pq}^s$, $\mathring{F}_{pq}^s$ остаются эквивалентными при изменении h_0 .

Символом $\mathcal{E}_0$ обозначим оператор, ставящий в соответствие определенной на G функции ее продолжение нулем на $\mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $s > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. Тогда операторы

$$\mathcal{E}_0: \mathring{B}_{pq}^s(G) \rightarrow \mathring{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G), \quad \mathcal{E}_0: \mathring{B}_{p\infty}^s(G) \rightarrow B_{p\infty}^s(\mathbb{R}^n)$$

ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in \dot{B}_{pq}^s(G)$ положим $f = \mathcal{E}_0 f$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда при некотором $C > 0$

$$\|f|B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \leq C \|f|\dot{B}_{pq}^s(G)\|, \quad f \in B_{pq}^s(G),$$

что следует из оценок

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(\int_0^{h_0} \|\Delta_j^m(h, U_{(m+1)h}(\partial G)) f\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\ & \leq C_1 \left(\int_0^{h_0} \|f|L_p(G \cap U_{(m+1)h}(\partial G))\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \leq C_2 \|f|\dot{B}_{pq}^s(G)\|. \end{aligned}$$

Этим установлена ограниченность оператора $\mathcal{E}_0: \dot{B}_{pq}^s(G) \rightarrow B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, причем доказательство сохраняется и при $q = \infty$.

Обозначим через $\tilde{r}(x)$ регуляризованное расстояние от точки $x \in G$ до $\mathbb{R}^n \setminus G$ (см. [7, п. 2.1]), доопределенное нулем на $\mathbb{R}^n \setminus G$. Отметим, что $\tilde{r}(x) \in C^\infty(G)$, $r(x) \leq \tilde{r}(x) \leq 2r(x)$ для $x \in G$, $|D^\alpha \tilde{r}(x)| \leq C_\alpha \tilde{r}(x)^{1-|\alpha|}$, для всех α и $x \in G$. Возможность построения $\tilde{r}(x)$ с постоянной 2 (и даже с любой постоянной $1 + \varepsilon > 1$) в правой части двусторонней оценки установлена в [8].

Пусть $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(t) = 1$ при $t \leq 1/3$, $\eta(t) = 0$ при $t \geq 2/3$. Рассмотрим при $\varepsilon > 0$ функцию

$$f_{(\varepsilon)}(x) = f(x) \eta_\varepsilon(\tilde{r}(x)) = f(x) \eta\left(\frac{\tilde{r}(x)}{\varepsilon}\right). \quad (1)$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\|f_{(\varepsilon)}|B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого достаточно убедиться, что при $i = 1, \dots, n$

$$\int_0^{h_0} \|\Delta_i^{2m-1}(h) f_{(\varepsilon)}\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Заметим, что

$$|\Delta_i^{2m-1}(h) f_{(\varepsilon)}(x)| \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} |\Delta_i^k(h) f(x)| \cdot |\Delta_i^{2m-1-k}(h) \eta_\varepsilon(\tilde{r}(x + k h e^i))|.$$

Учитывая ограниченность последней разности и ее оценку с помощью теоремы Лагранжа о среднем и полагая

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{2m-1} |\eta^{(k)}(t)|, \quad \bar{\eta}_\varepsilon(t) = \bar{\eta}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned} |\Delta_i^{2m-1}(h) f_{(\varepsilon)}(x)| & \leq C_1 \sum_{k=0}^{2m-1} |\Delta_i^k(h) f(x)| \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{2m-1-k} \\ & \times \max_{v \in [k, 2m-1]} ((\bar{\eta}_\varepsilon + \delta_{k, 2m-1} \eta_\varepsilon)(\tilde{r}(x + v h e^i))), \end{aligned} \quad (3)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера. В силу (3) при $0 < h < \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}\|_p &\leq C\|f|L_p(U_{2m\varepsilon}(\partial G))\|\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m + C\|\Delta_i^m(h)f|L_p(U_{2m\varepsilon}(\partial G))\|, \\ \int_0^\varepsilon \|\Delta_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} &\leq C_1\|f|L_p(U_{2m\varepsilon}(\partial G))\|^q \varepsilon^{-sq} \\ &+ C \int_0^\varepsilon \|\Delta_i^m(h)f|L_p(U_{2m\varepsilon}(\partial G))\|^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При $h > \varepsilon$

$$\begin{aligned} |\Delta_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}(x)| &\leq 2^{2m-1} \sum_{\nu=0}^{2m-1} |f(x + \nu h e^i)|(\eta_\varepsilon + \bar{\eta}_\varepsilon)(\tilde{r}(x + \nu h e^i)), \\ \int_\varepsilon^{h_0} \|\Delta_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}\|_p^q h^{-sq} \frac{dh}{h} &\leq C \sum_{\nu=0}^{2m-1} \int_\varepsilon^{h_0} \|f|L_p(G \cap U_\varepsilon(\partial G - \nu h e^i))\|^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда и из (4) следует (2) и утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством гибкого конуса, $s > 0$, $1 < p, q < \infty$. Тогда оператор

$$\mathcal{E}_0: \dot{F}_{pq}^s(G) \rightarrow \dot{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G)$$

ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $F_{pq}^s(G)$ норму, эквивалентную [6], [9] норме из определения 2:

$$\|f|F_{pq}^s(G)\|_{(1)} = \|f|L_p(G)\| + \left\| \left(\int_0^{h_0} (\tilde{\Delta}^m(h, G)f(\cdot))^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \right\|_p,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^m(h, G)f(x) &= \int_{|y|<1} |\Delta^m(hy, G)f(x)| dy, \\ \Delta^m(y, G)f(x) &= \begin{cases} \Delta^m(y)f(x), & [x, x + my] \subset G(|y|), \\ 0, & [x, x + my] \not\subset G(|y|), \end{cases} \\ \Delta^m(y)f(x) &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + ky). \end{aligned}$$

Пусть $f \in \dot{F}_{pq}^s(G)$. Положим $f = \mathcal{E}_0 f$ на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что

$$\|f|F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \leq C\|f|\dot{F}_{pq}^s(G)\| \quad (5)$$

с постоянной C , не зависящей от f . Для этого достаточно установить, что

$$\|N|L_p(U_{(m+1)h_0}(\partial G))\| \leq C\|f|\dot{F}_{pq}^s(G)\|,$$

где при $r(x) < (m+1)h_0$

$$\begin{aligned} N(x)^q &= \int_{r(x)/(m+1)}^{h_0} \left(\int_{r(x)/(h(m+1)) < |y| < 1} |\Delta^m(hy)f(x)| dy \right)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \\ &\leq C \sum_{\nu=0}^m \int_{r(x)/(m+1)}^{h_0} \left(\int_{r(x)/(m+1) < |z| < h} |f(x+\nu z)| dz \right)^q h^{-sq-nq} \frac{dh}{h} \\ &\leq C_1 \left(\frac{|f(x)|^q}{r(x)^{sq}} + \int_{r(x)/(m+1)}^{h_0} \left(\int_{r(x)/(m+1) < |y| < mh} |f(x+y)| dy \right)^q h^{-sq-nq} \frac{dh}{h} \right). \end{aligned}$$

С помощью неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} N(x) &\leq C_2 \frac{|f(x)|}{r(x)^s} + C_2 \int_{r(x)/(m+1) < |y| < mh_0} |f(x+y)| \cdot |y|^{-s} \frac{dy}{|y|^n} \\ &\leq C_2 \frac{|f(x)|}{r(x)^s} + C_3 \int_{r(x)/(m+1) < |y| < mh_0} \frac{|f(x+y)|}{r(x+y)^s} \frac{dy}{|y|^n}. \end{aligned}$$

Теперь для доказательства (5) остается лишь воспользоваться ограниченностью оператора

$$K_0 g(x) = \int_{r(x) < |y| < T} g(x+y) \frac{dy}{|y|^n},$$

действующего в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (см. ниже следствие из лемм 3, 4).

Рассмотрим при $\varepsilon > 0$ функцию $f_{(\varepsilon)}$ из (1). Остается показать, что $\|f_{(\varepsilon)}|F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, для чего достаточно установить, что для $i = 1, \dots, n$

$$\left\| \left(\int_0^{h_0} (\tilde{\Delta}_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)})^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} |L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Приведем необходимые оценки. Пусть сначала $0 < h < \varepsilon$. Из (3) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}(x) &= \int_{-1}^1 |\Delta_i^{2m-1}(uh)f_{(\varepsilon)}(x)| du \\ &\leq C \left(\sum_{k=0}^0 + \sum_{k=1}^{m-1} + \sum_{k=m}^{2m-1} \right) \int_{-1}^1 |\Delta_i^k(uh)f(x)| du \cdot \left| \frac{h}{\varepsilon} \right|^{2m-1-k} \\ &\quad \times \max_{|v| \leq 2m-1} (\bar{\eta} + \delta_k^{2m-1}\eta) \left(\frac{\tilde{r}(x) + vhe^i}{\varepsilon} \right) \\ &= C \sum_{j=0}^2 S_j(x, h). \end{aligned}$$

При $x \notin G$ $S_0(x, h) = 0$; при $x \in G$

$$\int_0^\varepsilon |S_0(x, h)|^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \leq C_1 |f(x)|^q \varepsilon^{-sq} \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x) \leq C_2 r(x)^{-sq} |f(x)|^q \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x).$$

Оценим $S_1(x, h)$. Пусть $\bar{\eta}(\tilde{r}(x + vhe^i)/\varepsilon) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{3} < \tilde{r}(x + vhe^i) < \frac{2\varepsilon}{3}, \quad \frac{\varepsilon}{6} < r(x + vhe^i) < \frac{2\varepsilon}{3},$$

так что при $|v|h < \varepsilon/18$, $|w|h < \varepsilon/18$ в силу неравенства треугольника имеем

$$\frac{1}{9}\varepsilon < r(x) < \frac{13}{18}\varepsilon, \quad \frac{1}{18}\varepsilon < r(x + whe^i) < \frac{7}{9}\varepsilon.$$

Отсюда при $(2m-1)h < \varepsilon/18$ получаем

$$\begin{aligned} S_1(x, h) &\leq C_1 \int_{|v| < 2m-1} r(x + vhe^i)^{-s} |f(x + vhe^i)| dv \varepsilon^s \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^m \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x) \\ &\leq C_2 M_j(r^{-s}f)(x) \varepsilon^{s-m} h^m \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x). \end{aligned}$$

Тогда при $18(2m-1)\theta = 1$, $(2m-1)h < \varepsilon$

$$\int_0^{\theta\varepsilon} S_1(x, h)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \leq C_3 (M_j(r^{-s}f)(x))^q \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x).$$

Из очевидной оценки

$$S_2(x, h) \leq C_4 \sum_{k=m}^{2m-1} \int_{-1}^1 |\Delta_i^k(uh)f(x)| du \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x)$$

следует, что

$$\int_0^{\varepsilon/(2m-1)} S_2(x, h)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \leq C_5 \sum_{k=m}^{2m-1} \int_0^{\varepsilon/(2m-1)} (\tilde{\Delta}_i^k(h)f(x))^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \chi_{U_{2m\varepsilon}(\partial G)}(x).$$

Пусть теперь $\theta\varepsilon < h < h_0$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}(x) &\leq C_1 \sum_{k=0}^{2m-1} \int_{-1}^1 |f(k + k u h e^i)| \eta\left(\frac{\tilde{r}(x) + k u h e^i}{\varepsilon}\right) du \\ &\leq C_2 \left(|f(x)| \eta\left(\frac{\tilde{r}(x)}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{h} \int_{|u| < (2m-1)h} |f(x + u e^i)| \eta\left(\frac{\tilde{r}(x) + u e^i}{\varepsilon}\right) du \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{\theta\varepsilon}^{h_0} (\tilde{\Delta}_i^{2m-1}(h)f_{(\varepsilon)}(x))^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \leq C_3 (M_j(r^{-s}f)(x))^q \chi_{U_\varepsilon(\partial G)}(x).$$

Из полученных оценок и ограниченности в L_p максимального оператора по x_j следует (6), что завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательства лемм 1, 2 проводятся в два шага. На первом из них устанавливается ограниченность оператора $\mathcal{E}_0$ из $\dot{B}_{pq}^s(G)$ в $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и из $\dot{F}_{pq}^s(G)$ в $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$. На втором же решаются задачи спектрального синтеза в этих пространствах. Для решения задач второго шага можно было бы воспользоваться результатами Ю.В. Нетрусова [10] (их доказательства приведены в [11]).

Введем следующую характеристику границы ∂G области G :

$$\mu(h, t) = t^{-n} \sup_{a \in \partial G} \text{mes}(U_h(\partial G) \cap B_t(a)), \quad h, t > 0.$$

Отметим, что $\mu(h, t)$ обладает свойствами удвоения: при некотором $C > 0$ при всех $h \in (0, h_0]$, $t \in (0, T]$

$$\mu(2h, t) \leq C\mu(h, t), \quad \mu(h, 2t) \leq C\mu(h, t).$$

Легко видеть также, что

$$\bar{\mu}(h, t) := t^{-n} \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \text{mes}(U_h(\partial G) \cap B_t(a)) \leq C\mu(h, t).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством гибкого конуса, $s > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$,

$$M(G, p, s) = \int_0^1 u^{-s} \sup_{0 < t \leq T} \mu(ut, t)^{1/p} \frac{du}{u} < \infty \quad \text{либо} \quad s < \frac{\sigma_0}{p}, \quad (7)$$

где σ_0 то же, что и в лемме 4. Тогда операторы

$$\mathcal{E}_0: B_{pq}^s(G) \rightarrow \dot{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G), \quad \mathcal{E}_0: B_{p\infty}^s(G) \rightarrow B_{p\infty}^s(\mathbb{R}^n) \quad (8)$$

ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 первое из условий (7) выполнено при выполнении второго. В силу леммы 1 достаточно показать, что $B_{pq}^s(G) = \dot{B}_{pq}^s(G)$, т.е. установить оценку

$$\left(\int_0^{h_0} \|f|L_p(G \cap U_h(\partial G))\|^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \leq C \|f|B_{pq}^s(G)\|. \quad (9)$$

Воспользуемся интегральным представлением функции через разности [6, гл. 7, формула (75)]:

$$\begin{aligned} f(x) = f_T(x) + \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} t^{-2-n} \Phi_i \left(\frac{y}{t}, \frac{\rho(t, x)}{t} \right) \zeta_i \left(\frac{u}{t} - \frac{\rho_i(t, x)}{2t}, \frac{1}{2} \rho'_i(t, x) \right) \\ \times \Delta_i^m(\gamma u, G) f(x + y + ue^i) du dy dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_T(x) &= T^{-n} \int \Phi_0 \left(\frac{y}{T}, \frac{\rho(T, x)}{T} \right) f(x + y) dy, \\ \Phi_i &\in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \quad \Phi_i(\cdot, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } z \in Q_0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \int \Phi_0(y, z) dy &= 1 \quad \text{при } z \in Q_0, \\ \zeta_i &\in C(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1), \quad \zeta_i(\cdot, v) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \quad \text{при } |v| \leq 1. \end{aligned}$$

При этом $\text{supp } \Phi_0(\cdot, z) \subset \{x : |x - z| < \delta\}$,

$$\begin{aligned} \text{supp } \Phi_i(\cdot, z) &\subset \left\{ x : |x - z + \frac{1}{2} z_i e^i| < \delta \right\} \quad i = 1, \dots, n, \\ \text{supp } \zeta_i(\cdot, v) &\subset \{u : |u| < \delta\}, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$, $\gamma > 0$ столь малы, что представление (10) в точке $x \in G$ построено по сужению f на гибкий конус $x + \bigcup_{0 < t \leq T} (\rho(t, x) + t\delta_0 Q_0) \subset G$.

Оценим $|f(x)|$ при $x \in E_h := \bar{G} \cap U_h(\partial G)$ с помощью представления (10):

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq T^{-n} \int \Psi \left(\frac{y}{T} \right) |f(x - y)| dy \\ &\quad + \left(\int_0^h + \int_h^T \right) \int t^{-n+s} \Psi \left(\frac{y}{t} \right) t^{-s} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i(t, G) f(x - y) dy \frac{dt}{t} \\ &= (\Psi_T * |f|)(x) + \left(\int_0^h + \int_h^T \right) t^s (\Psi_t * g(\cdot, t))(x) \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\Psi \geq 0$, $g(x, t) = t^{-s} \sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i(t, G) f(x)$, функцию f считаем продолженной нулем на $\mathbb{R}^n \setminus G$.

Пусть $\Psi(x) = 0$ при $|x| > r$. С помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |(\Psi_t * f)(x)| &\leq \left(\int \chi\left(\frac{x-y}{rt}\right) |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \|\Psi_t\|_{L_{p'}} \\ &\leq Ct^{-n/p} \left(\int \chi\left(\frac{x-y}{rt}\right) |f(y)|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (11) с помощью (12) и неравенства Минковского получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(E_h)} &\leq C \left(\iint_{E_h} \chi\left(\frac{x-y}{rT}\right) |f(y)|^p dx dy \right)^{1/p} + 2^m \int_0^h t^s \|\Psi\|_1 \|g(\cdot, t)\|_p \frac{dt}{t} \\ &\quad + C \int_h^T t^{s-n/p} \left(\iint \chi\left(\frac{x-y}{rt}\right) g^p(y, t) dx dy \right)^{1/p} \frac{dt}{t} \\ &\leq C_1 \mu(h, T)^{1/p} \|f\|_p + C_1 \int_0^h t^s \|g(\cdot, t)\|_p \frac{dt}{t} \\ &\quad + C_1 \int_h^T t^s \mu(h, t)^{1/p} \|g(\cdot, t)\|_p \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{h_0} \|f\|_{L_p(E_h)}^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_0^{h_0} \mu(h, T)^{q/p} h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \|f\|_p + C \left(\int_0^{h_0} \left(\int_0^h t^s \|g(\cdot, t)\|_p \frac{dt}{t} \right)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\ &\quad + C \left(\int_0^{h_0} \left(\int_h^T t^s \mu(h, t)^{1/p} \|g(\cdot, t)\|_p \frac{dt}{t} \right)^q h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\ &= C(L_0(f) + L_1(f) + L_2(f)). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу монотонности $\mu(h, T)$ и неравенства Иенсена

$$\begin{aligned} L_0(f) &\leq \left(\sum_{k \leq \log_2 h_0} \mu(2^k, T)^{q/p} \int_{2^k}^{2^{k+1}} h^{-sq} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \|f\|_p \\ &\leq \sum_{k \leq \log_2 h_0} \mu(2^k, T) 2^{-sk} \|f\|_p \leq C_1 M(G, p, s) \|f\|_p. \end{aligned}$$

В силу неравенства Харди

$$L_1(f) \leq C_2 \left(\int_0^{h_0} \|g(\cdot, t)\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В $L_2(f)$ заменим t на hu и воспользуемся неравенством Минковского для интегралов:

$$\begin{aligned} L_2(f) &\leq \int_1^\infty u^s \left(\int_0^{T/u} \mu(h, hu)^{q/p} \|g(\cdot, hu)\|_p^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^\infty u^s \left(\int_0^T \mu\left(\frac{t}{u}, t\right)^{q/p} \|g(\cdot, t)\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \frac{du}{u} \\ &\leq \int_0^1 v^{-s} \sup_{0 \leq t \leq T} \mu(vt, t)^{1/p} \frac{dv}{v} \left(\int_0^T \|g(\cdot, t)\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= M(G, p, s) \left(\int_0^T \|g(\cdot, t)\|_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Полученные оценки $L_k(f)$, $k = 0, 1, 2$, в силу (13) приводят к (9), а значит, к утверждению теоремы при $q < \infty$. Доказательство ограниченности второго оператора в (8) аналогично.

Для доказательства аналога теоремы 1 для F_{pq}^s -пространств нам понадобятся некоторые леммы.

ЛЕММА 3 (В. С. Рычков). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $\text{mes } E = 0$, $r(x) = \text{dist}(x, E)$, $0 < \sigma < n$, $0 < T \leq \infty$,

$$\sup_{\substack{x \in E \\ 0 < R < T}} \left(R^{\sigma-n} \int_{|y-x| < R} \frac{dy}{r(y)^\sigma} \right) < \infty. \quad (14)$$

Тогда при $1 < p < \infty$, $0 \leq s < \sigma/p$ оператор

$$Kf(x) = r(x)^{-s} \int_{r(x) < |y| < T} f(x+y) \frac{dy}{|y|^{n-s}} \quad (15)$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор K является аналогом одномерного оператора Харди

$$\varphi \mapsto t^{-s} \int_t^\infty \varphi(u) \frac{du}{u^{1-s}}$$

и предлагаемое доказательство проводится по плану известного доказательства ограниченности последнего в $L_p((0, \infty))$. Ради простоты записи будем считать $T = \infty$.

С помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |Kf(x)|^p &\leq r(x)^{-sp} \int_{|y| > r(x)} |f(x+y)|^p r(x+y)^{\sigma p/p'} \frac{dy}{|y|^{n-s-\gamma p}} \\ &\quad \times \left(\int_{|y| > r(x)} \frac{dy}{r(x+y)^\sigma |y|^{n-s+\gamma p'}} \right)^{p/p'}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $\gamma = \sigma(1/p - 1/p') - s/p$, так что $-s + \gamma p' = -\sigma + \varepsilon$, где $\varepsilon = \sigma - s + \gamma p' = p'(\sigma/p - s) > 0$. Второй интеграл в (16) оценим с помощью справедливого при любом $\varepsilon > 0$ неравенства

$$I_\varepsilon(x) = \int_{|y| > r(x)/2} \frac{dy}{r(x+y)^\sigma |y|^{n-\sigma+\varepsilon}} \leq C_\varepsilon r(x)^{-\varepsilon}, \quad (17)$$

где C_ε не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$. Оно устанавливается следующим образом:

$$I_\varepsilon(x) \leq \sum_{j=-1}^{\infty} \int_{2^j r(x) < |y| < 2^{j+1} r(x)} \frac{dy}{r(x+y)^\sigma} (2^j r(x))^{\sigma-n-\varepsilon}. \quad (18)$$

Пусть для данного $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ точка $x^0 \in \bar{E}$ такова, что $|x - x^0| \leq r(x)$. Тогда с помощью (14) имеем

$$\begin{aligned} \int_{|y| < 2^{j+1} r(x)} \frac{dy}{r(x+y)^\sigma} &= \int_{|y-x| < 2^{j+1} r(x)} \frac{dy}{r(y)^\sigma} \leq \int_{|y-x^0| < 2^{j+2} r(x)} \frac{dy}{r(y)^\sigma} \\ &\leq C(2^{j+2} r(x))^{n-\sigma}. \end{aligned}$$

Применяя последнюю оценку к интегралам в (18), приходим к (17). Из (16) и (17) с $\varepsilon = p'(\sigma/p - s) > 0$ следует, что

$$\begin{aligned} |Kf(x)|^p &\leq C_\varepsilon r(x)^{-\sigma} \int_{|y| > r(x)} |f(x+y)|^p r(x+y)^{\sigma p/p'} \frac{dy}{|y|^{n-s-\gamma p}} \\ &= C_\varepsilon r(x)^{-\sigma} \int_{|z-x| > r(x)} |f(z)|^p r(z)^{\sigma p/p'} \frac{dz}{|z-x|^{n-s-\gamma p}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Kf\|_p^p \leq C_\varepsilon \int |f(z)|^p r(z)^{\sigma p/p'} J(z) dz, \quad (19)$$

где

$$J(z) = \int_{|x-z| > r(x)} \frac{dx}{r(x)^\sigma |x-z|^{n-\sigma+\sigma p/p'}}.$$

Так как $|x-z| > r(x)$ влечет $r(z) \leq r(x) + |x-z| < 2|x-z|$, то, используя (17), при $\lambda = \sigma p/p'$ имеем $J(z) \leq I_\lambda(z) \leq C_\lambda r(z)^{-\lambda}$. Отсюда и из (19) следует утверждение леммы.

Далее снова считаем $r(x) = \text{dist}(x, \partial G)$.

Следуя рассуждениям Тропенко [12], К. О. Бесов показал, что справедлива следующая

ЛЕММА 4. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством гибкого конуса с параметрами $\delta_0, T > 0$ (см. определение 2), $\sigma_0 = -\log_2(1 - (\delta_0/10)^n)$. Тогда

$$\sup_{0 < t \leq T} \mu(ut, t) \leq C(\delta_0, T) u^{\sigma_0}, \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ 0 < R < R_0}} R^{\sigma-n} \int_{|y-x| < R} \frac{dy}{r(y)^\sigma} \leq C(\delta_0, T, R_0, \sigma)$$

при всех $\sigma \in (0, \sigma_0)$.

Отметим, что лемма 4 близка по форме лемме 6 из [13], базирующейся на результате из [12].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством гибкого конуса. Тогда при $1 < p < \infty$ оператор

$$K_0 f(x) = \int_{r(x) < |y| < T} f(x+y) \frac{dy}{|y|^n}$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством гибкого конуса, $p, q \in (1, \infty)$, $s > 0$, $0 < T < \infty$. Для ограниченности оператора

$$\mathcal{E}_0: F_{pq}^s(G) \rightarrow \dot{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n, G) \quad (20)$$

достаточно выполнения какого-либо из следующих трех условий:

1) оператор

$$K_s f(x) = r(x)^{-s} \int_{r(x) < |y| < T} f(x+y) \frac{dy}{|y|^{n-s}} \quad (21)$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$;

2) при некотором $\sigma \in (sp, n)$

$$\sup_{\substack{x \in \partial G \\ 0 < R < T}} \left(R^{\sigma-n} \int_{|y-x| < R} \frac{dy}{r(y)^\sigma} \right) < \infty;$$

3) $0 < s < \sigma_0/p$, где σ_0 то же, что и в лемме 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 2) влечет условие 1) в силу леммы 3; условие 3) влечет условие 2) в силу леммы 4. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить ограниченность оператора (20) при условии (21).

В силу леммы 2 достаточно установить, что $F_{pq}^s(G) = \dot{F}_{pq}^s(G)$, т.е. получить оценку

$$\|r^{-s} f\|_{L_p(G \cap U_{h_0}(\partial G))} \leq C \|f\|_{F_{pq}^s(G)}. \quad (22)$$

Доопределим функцию f нулем на G , и пусть $h_0 \leq T$. В силу (11)

$$r(x)^{-s} |f(x)| \leq C (N_0 f(x) + N_1 g(x) + N_2 g(x)), \quad (23)$$

где $N_0 f(x) = r(x)^{-s} (\chi_{RT} * |f|)(x)$,

$$N_1 g(x)^q = \int_0^{h_0} \left(\int_0^h t^s (\Psi_t * g(\cdot, t))(x) \frac{dt}{t} \right)^q h^{-sq} \frac{dh}{h},$$

$$N_2 g(x)^q = \int_{r(x)/(m+1)}^{h_0} \left(\int_h^T t^s (\Psi_t * g(\cdot, t))(x) \frac{dt}{t} \right)^q h^{-sq} \frac{dh}{h}.$$

Здесь $g(x, t)$ то же, что в (11), $\chi_t(x) = t^{-n} \chi(x/t)$, а число $R \geq 1$ взято столь большим, что $\text{supp } \Psi \subset B_R(0)$. Оценка

$$\|N_0 a\|_p^p \leq C_1 \sup_z \int_{|x-z| < R} r(x)^{-sp} dx \|f\|_p^p \leq C_2 \|f\|_p^p \quad (24)$$

вытекает из (15), если взять там $\chi((x-z)/(R+T))$ в качестве $f(x)$.

Ограниченность оператора

$$N_1: L_p(\mathbb{R}^n, L_q^*(0, h_0)) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n) \quad (25)$$

установлена в [6, лемма 29.5].

Остается доказать ограниченность оператора

$$N_2: L_p(\mathbb{R}^n, L_q^*(0, h_0)) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad (26)$$

т.е. ограниченность оператора

$$A: L_p(\mathbb{R}^n, L_q^*(0, T)) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n, L_q^*(0, h_0)),$$

где

$$Ag(x, h) = \chi\left(\frac{r(x)}{h}\right) h^{-s} \int_h^T t^s (\Psi_t * g)(x, t) \frac{dt}{t}.$$

Здесь свертка Ψ_t с $g(x, t)$ взята лишь по x . Можно далее считать $h_0 = T$.

Мы установим ограниченность при каждом $p, q \in (1, \infty)$ оператора

$$A: L_p(G, L_q^*(0, T)) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n, M_q^*(0, h_0)), \quad (27)$$

где $M_q^*(0, h_0)$ – пространство Марцинкевича на интервале $(0, h_0)$ по мере dh/h . Тогда ограниченность A будет являться следствием интерполяционной теоремы Марцинкевича и интерполяционной теоремы $(L_p(B_0), L_p(B_1)) = L_p(B_\theta)$ (см., например, [14, п. 1.18.4]).

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и оценим квазинорму $Ag(x, \cdot)$ в M_q^* , т.е.

$$\begin{aligned} \|Ag(x, \cdot)\|_{M_q^*} &= \sup_{\lambda > 0} \lambda \operatorname{mes}^{1/q} \{h : Ag(x, h) < \lambda\} \\ &= \sup_{0 < \lambda < r} \lambda \operatorname{mes}^{1/q} [r, h_\lambda] = \sup_{0 < \lambda < r} \lambda \ln \frac{h_\lambda}{r}, \end{aligned}$$

где $r = r(x)$, а $h_\lambda \in [r, T]$ взято из условия $Ag(x, \lambda) = \lambda$. Очевидно,

$$\|Ag(x, \cdot)\|_{M_q^*} = \sup_{r \leq h \leq T} S(h), \quad \text{где } S(h) = \ln^{1/q} \left(\frac{h}{r}\right) h^{-s} \int_h^T \chi\left(\frac{r}{h}\right) t^s (\Psi_t * g)(x, t) \frac{dt}{t}.$$

Если $\varphi(h) = \ln^{1/q}(h/r) h^{-s}$, то

$$\varphi'(h) = \frac{1}{q} \ln^{1/q-1} \left(\frac{h}{r}\right) h^{-1-s} \left(\frac{1}{q} - s \ln \left(\frac{h}{r}\right)\right)$$

и $S(h)$ при $h > re^{1/(qs)}$ убывает, как произведение двух убывающих множителей. Поэтому

$$\sup_{r \leq h \leq T} S(h) = \sup_{r \leq h \leq e^{1/(qs)} r} S(h).$$

Но $\ln(h/r) \leq C$ при $h \in [r, e^{1/(qs)} r]$, так что

$$\|Ag(x, \cdot)\|_{M_q^*} \leq C Ag(x, r(x)). \quad (28)$$

Положим

$$g(x) = \left(\int_0^T g(x, t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

и, применяя неравенство Гёльдера по t , получим ($r = r(x)$)

$$\begin{aligned} Ag(x, r) &\leq Cr^{-s} \int \frac{g(x+y) dy}{(r+|y|)^{n-s}} \\ &\leq C_1 r^{-n} \int_{|y|<r} g(x+y) dy + C_1 r^{-s} \int_{r<|y|<T_1} \frac{g(x+y) dy}{|y|^{n-s}} \\ &\leq C_1 M g(x) + C_1 K_s g(x). \end{aligned}$$

Здесь M – максимальный оператор Харди–Литтлвуда, ограниченный в $L_p(\mathbb{R}^n)$, K_s – оператор (21), ограниченный в $L_p(\mathbb{R}^n)$ по условию теоремы.

Отсюда и из (28) вытекает (27), а следовательно, и (26). Оценки (24)–(26) в силу (23) влекут (22), чем и завершают доказательство теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценки (9) и (22) в случае $n = 1$, $G = (0, \infty)$ известны (см. [15, п. 4.3.1]).

ПРИМЕР 1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, т.е. существуют числа $T, \delta_0 > 0$ такие, что для любого $x \in G$ найдется единичный вектор $e = e(x)$ такой, что

$$x + \bigcup_{0 \leq t \leq T} (te(x) + t\delta_0 Q_0) \subset G.$$

За счет уменьшения δ_0 функцию $x \mapsto e(x)$ можно считать конечнозначной: $e(x) \in \{e^j\}_{j=1}^J$, $|e^j| = 1$.

Тогда область G представима в виде

$$G = \bigcup_{j=1}^J G^{(j)} = \bigcup_{j=1}^J (G^{(j)} + V_j),$$

где $G^{(j)}$ – открытые множества, $V_j = \bigcup_{0 < t \leq T} (te^j + t\delta_1 Q_0)$. Соответственно, граница ∂G представляется в виде $\partial G = \bigcup_{0 < t \leq T} S_j$, причем $S_j + V_j \subset G$.

Очевидно, что внутри каждого шара $B_t(a)$, $0 < t < T$, $a \in \mathbb{R}^n$, произвольная прямая, параллельная e^j , пересекает S_j не более чем в одной точке, а ее пересечение с $U_h(S_j) \cap B_t(a)$, $0 < h \leq t$, содержится в интервале, длина которого не превосходит Ch . Следовательно, $\mu(h, t) \leq C_1 h/t$. При $0 < s < 1/p$ выполнено условие (7):

$$M(G, p, s) \leq C \int_0^1 u^{-s+1/p} \frac{du}{u} < \infty.$$

В силу теоремы 1 оператор продолжения $\mathcal{E}_0$ из (8) ограничен при $0 < s < 1/p$. Легко убедиться, что условие 2) теоремы 2 выполнено при любом $\sigma \in (0, 1)$. В силу теоремы 2 оператор продолжения $\mathcal{E}_0$ из (20) ограничен при $0 < s < 1/p$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 2$, (r, φ) – полярные координаты,

$$G = \{(r, \varphi) : e^{-2\varphi} < r < e^{-\varphi}, 0 < \varphi < \infty\}, \quad 0 < s < \frac{1}{p}.$$

Легко убедиться, что $\mu(h, t) \leq Ch/t$, условие (7) выполнено и в силу теоремы 1 оператор продолжения $\mathcal{E}_0$ из (8) ограничен.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$,

$$\Gamma = \{x : x = (x', x''), x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, x'' = \varphi(x')\},$$

отображение φ удовлетворяет условию Липшица, $0 < s < (n - k)/p$. Тогда $\mu(h, t) \leq C(h/t)^k$, условие (7) выполнено и оператор $\mathcal{E}_0$ из (8) ограничен. Условие 2) теоремы 2 выполнено при любом $\sigma \in (0, n - k)$, и оператор продолжения $\mathcal{E}_0$ из (20) ограничен. Ограниченность операторов (8), (20) в этом примере вытекает также из [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kuttner B. Some theorems on fractional derivatives // Proc. London Math. Soc. 1953. V. 3. P. 480–497.
- [2] Никольский С. М. Об одном свойстве классов $H_p^{(r)}$ // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1960/61. V. 3–4. P. 205–216.
- [3] Яковлев Г. Н. Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 73–76.
- [4] Солонников В. А. Об одном классе функциональных пространств и об априорных оценках для решений некоторых краевых задач математической физики. Автореферат дисс. ... к. ф.-м. н. Л.: ЛГУ, 1961.
- [5] Калябин Г. А. Теоремы о продолжении, мультипликаторах и диффеоморфизмах для обобщенных классов Соболева–Лиувилля в областях с липшицевой границей // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 173–186.
- [6] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [7] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [8] Бурёнков В. И. О регуляризованном расстоянии // Тр. МИРЭА. Матем. Вып. 67. М.: МИРЭА, 1973. С. 113–117.
- [9] Бесов О. В. О пространствах Соболева–Лиувилля и Лизоркина–Трибеля на области // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 20–34.
- [10] Нетрусов Ю. В. Спектральный синтез в пространствах гладких функций // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 5. С. 923–925.
- [11] Adams D. R., Hedberg L. I. Function Spaces and Potential Theory. Berlin: Springer, 1996.
- [12] Троценко Д. А. Свойства областей с негладкой границей // Сиб. матем. ж. 1981. Т. 22. № 4. С. 221–224.
- [13] Hajlasz P., Koskela P. Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains // J. London Math. Soc. (to appear).
- [14] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [15] Schmeisser H.-J., Triebel H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Leipzig: Geest & Portig, 1987.