Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, О скорости убывания вероятностей ε -уклонений средних стационарных процессов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 366–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:01:59

УДК 519

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ε -УКЛОНЕНИЙ СРЕДНИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. Ф. Гапошкин

Изучается асимптотическое поведение нормированных сумм $\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k$ при $n \rightarrow \infty$, где $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ – стационарный процесс. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ получены оценки сверху для $P(\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq \varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 8 названий.

Пусть $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ – стационарный процесс второго порядка,

$$EX_n = m, \quad E|X_n|^2 = \sigma^2, \quad E(\overline{X_n - m})(X_{n+k} - m) = R(k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

В эргодической теории изучается поведение при $n \rightarrow \infty$ средних арифметических процесса

$$\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k,$$

в частности, скорость сходимости этих средних к своему пределу.

Напомним некоторые определения (см., например, [1, гл. 6]). Пусть $dZ(\lambda)$ – стохастическая спектральная мера процесса, $F(\lambda)$ – спектральная функция, $F(\lambda)$ не убывает и непрерывна справа на $(-\pi, \pi]$, $F(\pi) - F(-\pi) = \sigma^2$. Справедливы формулы

$$X_n = m + \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda), \quad R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda), \quad \sigma_n = m + \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\lambda) dZ(\lambda).$$

Если обозначить $Y = m + Z(\{0\})$, то справедливо соотношение

$$D(n) = E|\sigma_n - Y|^2 = \|\sigma_n - Y\|^2 = \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} Q_n(\lambda) dF(\lambda). \quad (1)$$

Здесь

$$K_n(\lambda) = \frac{e^{in\lambda} - 1}{n(e^{i\lambda} - 1)}, \quad Q_n(\lambda) = \frac{\sin^2 \frac{n\lambda}{2}}{n^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda \neq 0, \quad K_n(0) = Q_n(0) = 1.$$

Не уменьшая общности, далее для простоты обозначений будем считать, что

$$m = 0, \quad Z(\{0\}) = 0. \quad (2)$$

В этом случае $D(n)$ – дисперсия средних σ_n . При оценке скорости сходимости σ_n при $n \rightarrow \infty$, в основном, исследовались три задачи.

1. Поведение дисперсий $D(n)$ в зависимости от свойств спектральной функции $F(\lambda)$.
2. Поведение вероятностей ε -уклонов

$$P_n^*(\varepsilon) = P\left(\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq \varepsilon\right).$$

3. Оценки скорости сходимости в усиленном законе больших чисел типа

$$\sigma_n = o(\lambda(n)) \quad \text{почти наверное при } n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\lambda(n)$ – некоторая функция, стремящаяся к 0.

Последняя задача детально исследовалась в работах [2]–[6] и др. Так, в работах [4]–[6] получены оценки скорости сходимости почти наверное средних σ_n для классов стационарных процессов $S_w, \Sigma_{D,\varphi}, \Sigma_{R,\varphi}$, которые задаются условиями:

- а) $S_w = \int_{-\pi}^{\pi} w(1/|\lambda|) dF(\lambda) < \infty$;
- б) ряд $\Sigma_{D,\varphi} = \sum D(n)\varphi(n)$ сходится;
- в) ряд $\Sigma_{R,\varphi} = \sum R(n)\varphi(n)$ сходится.

Здесь $w(u)$ – некоторая невозрастающая функция на $(0, \pi)$, $\varphi(n)$ – невозрастающая функция на $\mathbb{N}$. В этих работах исследовано вложение этих классов, даны оценки скорости сходимости вида (3), а также показана неувлучшаемость этих оценок в рассматриваемых классах.

В данной работе содержится несколько замечаний к задачам 1 и 2, дополняющих результаты работы [7]. В частности, дается положительный ответ на одну гипотезу из [7]. Обозначим через $G(\delta) = F(\delta) - F(-\delta)$ спектральную меру промежутка $(-\delta, \delta]$.

ЛЕММА 1. *Справедливы оценки*

$$0.9G(n^{-1}) \leq D(n) \leq 1.1G(n^{-1}) + \pi^2 n^{-2} \int_{n^{-1} \leq |\lambda| \leq \pi} \lambda^{-2} dF(\lambda), \quad (4)$$

$$0.9G(n^{-1}) \leq D(n) \leq 23G_1(n^{-1}) + \sigma^2 n^{-2}, \quad (5)$$

где

$$G_1(\delta) = \delta^2 \int_{\delta}^{\pi} \lambda^{-3} G(\lambda) d\lambda.$$

Отметим, что оценка (4) (с другими константами) содержится в работе [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенствами

$$I_1(n) \leq D(n) \leq I_1(n) + I_2(n),$$

где

$$I_1(n) = \int_{|\lambda| \leq n^{-1}} Q_n(\lambda) dF(\lambda), \quad I_2(n) = \int_{|\lambda| \geq n^{-1}} Q_n(\lambda) dF(\lambda).$$

Так как при $0 \leq u \leq 0.5$

$$u^{-2} \sin^2 u \leq 0.9, \quad u^2 (\sin u)^{-2} \leq 1.1,$$

то

$$0.9G(n^{-1}) \leq D(n) \leq 1.1G(n^{-1}).$$

При оценке интеграла $I_2(n)$ воспользуемся неравенством

$$Q_n(\lambda) \leq \pi^2 \lambda^{-2} n^{-2} \quad \text{при } 0 < |\lambda| \leq \pi.$$

Отсюда следуют неравенство

$$I_2(n) \leq \pi^2 n^{-2} \int_{n^{-1} \leq |\lambda| \leq \pi} \lambda^{-2} dF(\lambda)$$

и неравенство (4). Известно, что если функция $G(\lambda)$ непрерывна и $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ имеют ограниченные изменения, то для интеграла $\int_a^b G(\lambda) dF(\lambda)$ справедлива формула интегрирования по частям (см., например, [1, с. 222]). Преобразуем с помощью этой формулы интегралы

$$\int_{n^{-1}}^{\pi} \lambda^{-2} dF(\lambda), \quad \int_{-\pi}^{-n^{-1}} \lambda^{-2} dF(\lambda)$$

и получим

$$\int_{n^{-1} \leq |\lambda| \leq \pi} \lambda^{-2} dF(\lambda) \leq 2 \int_{n^{-1}}^{\pi} \lambda^{-3} G(\lambda) d\lambda + \pi^{-2} \sigma^2.$$

Здесь учтено, что

$$F(\pi) - F(-\pi) = \sigma^2, \quad F(\lambda) - F(-\lambda) = G(\lambda), \quad F(-n^{-1}) - F(n^{-1}) \leq 0.$$

Поэтому правая оценка для $D(n)$ в формуле (4) принимает вид

$$D(n) \leq 1.1G(n^{-1}) + 2\pi^2 G_1(n^{-1}) + \sigma^2 n^{-2}.$$

Заметим также, что

$$G_1(\delta) \geq G(\delta) \delta^2 \int_{\delta}^{\pi} \lambda^{-3} d\lambda = 0.5G(\delta)(1 - \delta^2 \pi^{-2}).$$

Отсюда вытекают неравенство $G(n^{-1}) \leq 2.3G_1(n^{-1})$ и неравенство (5).

Приведем два следствия. Функция $\varphi(u)$ называется *слабо колеблющейся* на $[1, \infty)$, если для любого $\delta > 0$ функция $\varphi(u)u^{\delta}$ монотонно возрастает, а функция $\varphi(u)u^{-\delta}$ монотонно убывает (см. [8, с. 299]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $0 \leq \alpha < 2$, то эквивалентны условия:

$$\begin{aligned} D(n) &= O(n^{-\alpha} \varphi(n)) & \text{при } n \rightarrow \infty, \\ G(\delta) &= O(\delta^{\alpha} \varphi(\delta^{-1})) & \text{при } \delta \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (6)$$

Действительно, из (6) следует, что $G_1(\delta) = O(\delta^{\alpha} \varphi(\delta^{-1}))$, и достаточно подставить эти оценки в неравенство (5) (при $\varphi(n) \equiv 1$ см. [7, теорема 3]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $G(\delta) = O(\delta^2)$ при $\delta \rightarrow +0$, то

$$G_1(\delta) = O\left(\delta^2 \ln \frac{1}{\delta}\right), \quad D(n) = O(n^{-2} \ln n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

и эта оценка неулучшаема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (7) следуют из (5). С другой стороны, если рассмотреть любой стационарный процесс со спектральной функцией

$$F(\lambda) = \begin{cases} \lambda^2 & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \pi, \\ 0 & \text{при } -\pi \leq \lambda \leq 0, \end{cases}$$

то

$$D(n) \geq 4 \int_{n^{-1}}^{\pi} n^{-2} \lambda^{-1} (1 - \cos n\lambda) d\lambda \geq 4n^{-2} (\ln n + O(1)).$$

Итак, здесь дисперсии $D(n)$ имеют порядок “верхней границы” из формулы (5).

Покажем, что в левой части неравенства (5) нельзя, вообще говоря, заменить функцию $G(n^{-1})$ на функцию $G_1(n^{-1})$.

ПРИМЕР. Пусть спектральная функция $F(\lambda)$ кусочно-постоянна и имеет скачки величины $2^{-2\nu}$ в точках $\pi 2^{-\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Так как

$$Q_{2^k}(\pi 2^{-\nu}) = 0 \quad \text{при } \nu = 1, 2, \dots, k-1,$$

из формулы (1) получаем

$$D(2^k) = \sum_{\nu=k}^{\infty} Q_{2^k}(\pi 2^{-\nu}) 2^{-2\nu} \leq C 2^{-2k}.$$

Легко проверяется также, что

$$G(2^{-k}) \leq 2^{-2k}, \quad G_1(2^{-k}) \geq C_1 k 2^{-2k}, \quad C_1 > 0.$$

Перейдем к задаче 2. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$P_n(\varepsilon) = P(|\sigma_n| \geq \varepsilon), \quad P_n^*(\varepsilon) = P\left(\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \geq \varepsilon\right).$$

В силу неравенства Чебышева справедлива оценка $P_n(\varepsilon) \leq D(n)\varepsilon^{-2}$.

В работе [7] доказано следующее утверждение (теорема 11). Если $D(n) \leq Bn^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, то

$$P_n(\varepsilon) \leq C_1 n^{-\alpha} \varepsilon^{-2}, \quad P_n^*(\varepsilon) \leq C_2 n^{-\alpha/2} \varepsilon^{-2}.$$

Там же формулируется гипотеза, что вторую оценку можно улучшить, заменив $\alpha/2$ на α . Далее эта задача решается положительно.

Обозначим

$$\delta_m^* = \sup_{2^m \leq k < 2^{m+1}} |\sigma_k|, \quad \Delta_m = 2^{-m} \sup_{2^m < n < 2^{m+1}} \left| \sum_{k=2^m+1}^n X_k \right|.$$

Так как

$$\sigma_n = n^{-1} \left(\sum_{k=1}^{2^m} X_k + \sum_{k=2^m+1}^n X_k \right), \quad 2^m < n < 2^{m+1},$$

имеем

$$\delta_m^* \leq |\sigma_{2^m}| + \Delta_m. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Для любого стационарного процесса, удовлетворяющего условию (2), справедливы оценки

$$\|\delta_m^*\|^2 \leq 8 \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} D(2^{m-p}), \quad (9)$$

$$\|\delta_m^*\|^2 \leq 4m \sum_{p=0}^m 2^{-p} D(2^{m-p}). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем известную технику “двоичного разложения сумм”. Обозначим

$$\Delta_{m,p,i} = \sum_{k=2^m+(i-1)2^{m-p}+1}^{2^m+i2^{m-p}} X_k, \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq i \leq 2^p.$$

При любых $\omega \in \Omega$ и $n \in (2^m, 2^{m+1})$ имеем при подходящих индексах $i(p, n)$ неравенство

$$\left| \sum_{i=2^m+1}^n X_i(\omega) \right| \leq \sum_{p=1}^m |\Delta_{m,p,i(p,n)}(\omega)|.$$

Применим при оценке правой части неравенство Коши в виде

$$\left| \sum_{p=1}^m a_p \right|^2 \leq 2 \sum_{p=1}^m p^2 |a_p|^2 \quad (11)$$

и получим для супремума сумм оценку

$$\|\Delta_m\|^2 \leq 2 \cdot 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 \sum_{i=1}^{2^p} \|\Delta_{m,p,i}\|^2.$$

В силу стационарности $\|\Delta_{m,p,i}\|^2 = 2^{2m-2p} D(2^{m-p})$ и

$$\|\Delta_m\|^2 \leq 2 \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} D(2^{m-p}). \quad (12)$$

Из (8) следует, что

$$\|\delta_m^*\|^2 \leq 2\|\sigma_{2^m}\|^2 + 2\|\Delta_m\|^2 = 2D(2^m) + 2\|\Delta_m\|^2. \quad (13)$$

Заметим, что из неравенства

$$|\sigma_{2^m}| \leq 2^{-1} \left(2^{-m+1} \left(\left| \sum_{k=1}^{2^{m-1}} X_k \right| + \left| \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} X_k \right| \right) \right)$$

и стационарности процесса следует, что $\|\sigma_{2^m}\| \leq \|\sigma_{2^{m-1}}\|$, т.е. $D(2^m) \leq D(2^{m-1})$. Поэтому первое слагаемое в правой части оценки (13) мажорируется суммой из неравенства (12). Итак, справедливо неравенство (9). Если вместо (11) использовать оценку

$$\left| \sum_{p=1}^m a_p \right|^2 \leq m \sum_{p=1}^m |a_p|^2,$$

то тем же путем получим (10).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть для дисперсии средних $D(n)$ при некотором $A < 2$ и при $m \geq 1$ выполнено условие $D(2^m) \leq AD(2^{m+1})$. Тогда при $m \geq 1$ справедлива оценка

$$\|\delta_m^*\|^2 \leq C(A)D(2^m). \quad (14)$$

Для доказательства используем неравенство (9); здесь $C(A) = C \sum_{p=1}^{\infty} p^2 A^p 2^{-p}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнено условие

$$D(n) \leq Bn^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (15)$$

Тогда при $m \geq 1$ справедлива оценка

$$\|\delta_m^*\|^2 \leq C(B, \alpha)2^{-m\alpha}.$$

Снова используем (9); здесь $C(B, \alpha) = 2BC \sum_{p=1}^{\infty} p^2 2^{-p(1-\alpha)}$.

Имея оценки выражений $\|\delta_m^*\|^2$, легко оценить вероятности ε -уклонений $P_n^*(\varepsilon)$. Первая из приводимых теорем дает решение упоминавшейся выше задачи из работы [7].

ТЕОРЕМА 1. Если выполнено условие (15), то

$$P_n^*(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon^{-2} n^{-\alpha},$$

где постоянная C_1 не зависит от n и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что при любом $n \geq 2^m$

$$(S_n^*)^2 = \left(\sup_{k \geq n} |\sigma_k| \right)^2 \leq (\delta_m^* + \delta_{m+1}^* + \dots)^2 \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 (\delta_{m+k}^*)^2. \quad (16)$$

Если выполнено (15), то по следствию 4

$$\|\delta_{m+k}^*\|^2 \leq C(B, \alpha)2^{-(m+k)\alpha}.$$

Интегрируя (16), получим оценку

$$\|S_n^*\|^2 \leq C_1 2^{-m\alpha} \leq C_1 n^{-\alpha}, \quad n \geq 2^m.$$

С помощью неравенства Чебышева отсюда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть при $m \geq 1$ выполнены условия

$$A_1 D(2^{m+1}) \leq D(2^m) \leq AD(2^{m+1}), \quad (17)$$

где $1 < A_1 \leq A < 2$. Тогда при $n \geq 2^m$ справедлива оценка

$$P_n^*(\varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{-2} D(2^m),$$

где постоянная C_2 не зависит от ε и n, m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (14), (16), (17) имеем

$$\|S_n^*\|^2 \leq C(A, A_1)D(2^m), \quad C(A, A_1) = 2C(A) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 A_1^{-k},$$

откуда и следует нужное неравенство.

Можно также дать оценки скорости убывания ε -уклонений для классов S_w , $\Sigma_{D,\varphi}$, $\Sigma_{R,\varphi}$ (см. определения а)–в)). Ограничимся таким утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть для стационарного процесса при некотором $0 < \alpha < 1$ выполнено условие $D(n) = O(n^{-\alpha})$, или $R(n) = O(n^{-\alpha})$, или $G(\delta) = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \rightarrow +0$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum P_n^*(\varepsilon)\Phi(n), \quad (18)$$

где $\Phi(n) = n^{-1+\alpha}\varphi(n)$, $\varphi(n)$ – любая функция такая, что $\sum n^{-1}\varphi(n) < \infty$, $\varphi(n) > 0$, например, $\varphi(n) = (\ln n)^{-1-\gamma}$, $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (15). Тогда по теореме 1 $P_n^*(\varepsilon) \leq C(\varepsilon)n^{-\alpha}$ и ряд (18) сходится. Два других условия, как известно, влекут (15) (см. [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве теорем 1, 2 и следствий 3–5 используются лишь оценки норм сумм

$$S_{m,n} = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \right\|^2.$$

Поэтому эти результаты распространяются на квазистационарные процессы (X_k) , для которых по определению при всех m, n $n^{-2}S_{m,n} \leq D(n)$, где $D(n)$ – некоторая невозрастающая функция.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
- [2] Khitchine A. Sur la loi forte des grands nombres // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1928. V. 186. P. 285–287.
- [3] Петров В. В. Об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 42–44.
- [4] Гапошкин В. Ф. Критерии УЗБЧ для классов стационарных процессов и однородных случайных полей // Теор. вероятн. и ее применения. 1977. Т. 22. № 2. С. 295–319.
- [5] Гапошкин В. Ф. О зависимости скорости сходимости в УЗБЧ от скорости убывания корреляционной функции // Теор. вероятн. и ее применения. 1981. Т. 26. № 4. С. 720–733.
- [6] Гапошкин В. Ф. Оценки средних для почти всех реализаций стационарных процессов // Сиб. матем. ж. 1979. Т. 20. № 5. С. 978–989.
- [7] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 73–123.
- [8] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.