Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Карлович, Об индексе сингулярных интегральных операторов в рефлексивных пространствах Орлича, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 383–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:45:31

УДК 517.983+517.968

ОБ ИНДЕКСЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

А. Ю. Карлович

Рассматривается банахова алгебра $\mathfrak{A}$ сингулярных интегральных операторов с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича $L_M^n(\Gamma)$. Предполагается, что Γ принадлежит широкому подклассу кривых Карлесона, содержащему кривые с точками заострения (возврата), а также кривые типа логарифмической спирали. В данной работе получена формула для вычисления индекса произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$ в терминах его символа.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. В работах И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника начала 70-х годов получены критерии нётеровости и формулы для вычисления индекса операторов из банаховой алгебры, порожденной сингулярными интегральными операторами (СИО) с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в пространствах Лебега $L_2^n(\Gamma)$ [1] и $L_p^n(\Gamma, \rho)$ [2]. Ограничения, которые накладывались на вес ρ и кривую Γ (рассматривался степенной вес ρ и ляпуновская кривая Γ), были связаны с известными на то время достаточными условиями ограниченности в пространствах Лебега $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши

$$(S\varphi)(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(t, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

где $\Gamma(t, \varepsilon) := \{\tau \in \Gamma : |t - \tau| < \varepsilon\}$. Г. Давид доказал [3], что оператор S ограничен в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда Γ является кривой Карлесона, т.е.

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} |\Gamma(t, \varepsilon)| < \infty, \quad (2)$$

где $|\Gamma(t, \varepsilon)|$ – мера порции $\Gamma(t, \varepsilon)$. Из этого результата и обзора [4] следует (см., например, [5], [6]), что для ограниченности оператора S в весовом пространстве Лебега $L_p(\Gamma, \rho)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы вес ρ удовлетворял условию Макенхаупта

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \rho^p(\tau) |d\tau| \right)^{1/p} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \rho^{-q}(\tau) |d\tau| \right)^{1/q} < \infty, \quad (3)$$

где $1/p + 1/q = 1$. Согласно неравенству Гёльдера (3) влечет (2). Автором с использованием критерия Давида ограниченности оператора S в пространствах $L_p(\Gamma)$ и интерполяции линейных операторов показано [7, теорема 3.6], что для ограниченности оператора S в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ также необходимо и достаточно, чтобы Γ была кривой Карлесона.

Из леммы 3 работы Р. К. Сейфуллаева [8] следует, что для всех точек $t \in \Gamma$ кривая Карлесона удовлетворяет условию

$$\arg(\tau - t) = O(-\log|\tau - t|), \quad \tau \rightarrow t \quad (\tau \in \Gamma).$$

В работе А. Беттчера и Ю. И. Карловича [5] получен критерий нётеровости для операторов из банаховой алгебры СИО с кусочно непрерывными коэффициентами в пространстве Лебега $L_p(\Gamma, \rho)$, где ρ – вес Макенхаупта, а Γ – замкнутая жорданова кривая Карлесона, во всех точках $t \in \Gamma$ удовлетворяющая дополнительному условию

$$\arg(\tau - t) = -\delta(t) \log|\tau - t| + O(1), \quad \tau \rightarrow t, \quad (4)$$

где $\delta: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. В дальнейшем такие кривые будем называть логарифмическими кривыми Карлесона. В работе автора [7] при тех же предположениях относительно кривой Γ получен критерий нётеровости для операторов из банаховой алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича $L_M^n(\Gamma)$. Отметим также, что недавно в работах [6], [9] при изучении алгебры СИО в весовых пространствах Лебега ограничение (4) на кривую Карлесона было снято.

Для получения этих результатов широко использовались мощные современные средства изучения банаховых алгебр – теорема о двух проекторах [10], [11] и локальный принцип Аллана–Дугласа (см., например, [12, разд. 1.34]). Эти средства позволяют построить символическое исчисление для банаховой алгебры, порожденной СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами, если до этого изучен “канонический” СИО со специальным скалярным кусочно непрерывным коэффициентом, ассоциированный с краевой задачей Римана. Однако эти методы не позволяют решить задачу о вычислении индекса оператора из указанной алгебры.

В настоящей работе, являющейся продолжением работы [7], вычисляется индекс оператора из алгебры СИО с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивном пространстве Орлича $L_M^n(\Gamma)$ на логарифмической кривой Карлесона Γ .

2. Пространства Орлича и индексы Бойда. Основные сведения из теории пространств Орлича приведены, например, в [13]–[15].

Функцией Юнга называется выпуклая непрерывная функция $M: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которой $M(0) = 0$, $M(x) > 0$ при $x > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{M(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{M(x)} = 0.$$

Дополнительной к функции M называется функция Юнга

$$N(x) := \max_{y \geq 0} \{xy - M(y)\}.$$

Пусть Γ – логарифмическая кривая Карлесона, ориентированная против часовой стрелки. *Пространством Орлича* $L_M(\Gamma)$ называется множество всех измеримых на Γ комплекснозначных функций u , для каждой из которых при некотором $\lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{\Gamma} M\left(\frac{|u(\tau)|}{\lambda}\right) |d\tau| < \infty.$$

Пространство $L_M(\Gamma)$ снабдим нормой Орлича

$$\|u\|_M := \sup \left\{ \int_{\Gamma} |u(\tau)v(\tau)| |d\tau| : \int_{\Gamma} N(|v(\tau)|) |d\tau| \leq 1 \right\}.$$

Относительно этой нормы пространство $L_M(\Gamma)$ является банаховым.

В. Матушевска и В. Орлич [16] (см. также [15], [17]) связали с пространством $L_M(\Gamma)$ пару индексов. В общем случае перестановочно инвариантных пространств в работе Д. Бойда [18] были введены новые индексы, совпадающие с величинами, обратными к индексам Матушевской–Орлича в случае пространств $L_M(\Gamma)$. Нижний и верхний индексы Бойда α_M и β_M определяются следующим образом:

$$\alpha_M = \sup_{t>1} \Theta(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t), \quad \beta_M = \inf_{0<t<1} \Theta(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \Theta(t), \quad \Theta(t) = -\frac{\log h(t)}{\log t},$$

и для пространств Орлича [19]

$$h(t) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)}, \quad t > 0.$$

Индексы Бойда являются важными интерполяционными и геометрическими характеристиками перестановочно инвариантного пространства $L_M(\Gamma)$ (см. [14]–[19]). Например, пространство Орлича $L_M(\Gamma)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда $0 < \alpha_M \leq \beta_M < 1$.

Пространство Орлича, порожденное функцией Юнга x^p/p , $1 < p < \infty$, изоморфно пространству Лебега $L_p(\Gamma)$. Индексы Бойда пространства $L_p(\Gamma)$, где $1 < p < \infty$, совпадают и равны $1/p$. Примеры функций Юнга, порождающих рефлексивные пространства Орлича, не изоморфные пространствам Лебега, для которых индексы Бойда совпадают (различны) приведены, например, в [15, с. 93].

3. Критерий нётеровости. Линейный ограниченный оператор A в банаховом пространстве X называется *нётеровым*, если его образ замкнут в X и конечны дефектные числа $n(A) := \dim \operatorname{Ker} A$, $d(A) := \dim \operatorname{Ker} A^*$. В этом случае *индексом оператора* A называется число $\operatorname{Ind} A := n(A) - d(A)$.

Будем обозначать через $L_M^n(\Gamma)$ прямую сумму n копий рефлексивного пространства Орлича $L_M(\Gamma)$. Через $\mathcal{L} := \mathcal{L}(L_M^n(\Gamma))$ обозначается банахова алгебра линейных ограниченных операторов в $L_M^n(\Gamma)$, а через $\mathcal{K} := \mathcal{K}(L_M^n(\Gamma))$ – идеал компактных операторов в $\mathcal{L}$.

Рассмотрим банахову алгебру $C(\Gamma)$ всех непрерывных функций на Γ , пусть $\Lambda(\Gamma)$ – множество функций, непрерывных в каждой точке контура Γ , кроме, быть может, конечного числа точек, в которых эти функции имеют конечные односторонние пределы.

Замыкание множества $\Lambda(\Gamma)$ по норме $L_\infty(\Gamma)$ образует банахову алгебру $PC(\Gamma)$ всех кусочно-непрерывных функций на Γ .

Пусть $C^{n \times n}(\Gamma)$ ($\Lambda^{n \times n}(\Gamma)$, $PC^{n \times n}(\Gamma)$, $L_\infty^{n \times n}(\Gamma)$) – множество $(n \times n)$ -матриц-функций, элементы которого принадлежат $C(\Gamma)$ ($\Lambda(\Gamma)$, $PC(\Gamma)$, $L_\infty(\Gamma)$ соответственно).

Пусть I – тождественный оператор, а оператор S определен в пространстве $L_M^n(\Gamma)$ покомпонентно формулой (1). Рассмотрим наименьшую банахову подалгебру $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathcal{L}$, содержащую операторы умножения на кусочно непрерывные матрицы-функции и оператор S . Сформулируем критерий нётеровости оператора из $\mathfrak{A}$ (см. [7]) в удобной для нас форме.

Пусть даны два действительных числа a, b , удовлетворяющие неравенству $0 < a \leq b < 1$, два комплексных числа z, w и действительное число δ . Определим *спиралевидный рожок* [5]

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, b) := \{z, w\} \cup \left\{ u \in \mathbb{C} \setminus \{z, w\} : \frac{1}{2\pi} \left(\arg \frac{u-z}{u-w} - \delta \log \left| \frac{u-z}{u-w} \right| \right) \in [a, b] \right\}.$$

Здесь значение $\arg(\cdot)$ выбирается так, чтобы $\arg(\cdot) - \delta \log |\cdot| \in [0, 2\pi)$. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, b) = \{z(1-\mu) + w\mu : \mu \in \mathcal{S}(0, 1; \delta; a, b)\}. \quad (5)$$

Согласно [5] (двойную) логарифмическую спираль $\mathcal{S}(z, w; \delta; a, a)$ можно задать параметрически в виде

$$\mathcal{S}(z, w; \delta; a, a) := \left\{ \xi = \frac{we^{\psi(1+i\delta)}e^{2\pi ia} - z}{e^{\psi(1+i\delta)}e^{2\pi ia} - 1} : \psi \in [-\infty, +\infty] \right\}.$$

Определим *массивный цилиндр*

$$\mathfrak{N} := \Gamma \times [0, 1] \times [\alpha_M, \beta_M].$$

Между *пучком спиралевидных рожков*

$$\mathfrak{S} := \bigcup_{t \in \Gamma} (\{t\} \times \mathcal{S}(0, 1; \delta(t); \alpha_M, \beta_M)),$$

где $\delta(t)$ описывает степень закрученности кривой Γ в точке t (см. (4)), и множеством $\mathfrak{N}$ можно установить биекцию по правилу

$$\mathcal{F}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{S}, \quad \mathcal{F}(t, x, \lambda) = (t, f(t, x, \lambda)), \quad (6)$$

где

$$f(t, x, \lambda) = \frac{e^{\varphi(t, x, \lambda)}}{e^{\varphi(t, x, \lambda)} - 1}, \quad \varphi(t, x, \lambda) = (1 + i\delta(t)) \log \frac{x}{1-x} + 2\pi i\lambda.$$

Для $a \in PC^{n \times n}(\Gamma)$ введем матрицы-функции

$$\begin{aligned} U_a(t, x, \lambda) &:= a(t+0)f(t, x, \lambda) + a(t-0)(1-f(t, x, \lambda)), \\ V_a(t, x, \lambda) &:= a(t+0)(1-f(t, x, \lambda)) + a(t-0)f(t, x, \lambda), \\ W_a(t, x, \lambda) &:= (a(t+0) - a(t-0))\sqrt{f(t, x, \lambda)(1-f(t, x, \lambda))}, \end{aligned}$$

где в каждой точке $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ выбирается произвольное фиксированное значение корня.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) $\mathcal{K} \subset \mathfrak{A} \subset \mathcal{L}$ и факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратимо замкнута (наполнена) в алгебре Калкина $\mathcal{L}/\mathcal{K}$, т.е. если произвольный элемент $A + \mathcal{K} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$ обратим в алгебре $\mathcal{L}/\mathcal{K}$, то $(A + \mathcal{K})^{-1} \in \mathfrak{A}/\mathcal{K}$;
 б) для каждой точки $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ отображение

$$\omega_{t,x,\lambda}: \{aI : a \in PC^{n \times n}(\Gamma)\} \cup \{S\} \rightarrow \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

определяемое равенствами

$$\omega_{t,x,\lambda}(aI) = \begin{pmatrix} U_a(t, x, \lambda) & W_a(t, x, \lambda) \\ W_a(t, x, \lambda) & V_a(t, x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \omega_{t,x,\lambda}(S) = \begin{pmatrix} E & O \\ O & -E \end{pmatrix},$$

где O и E – нулевая и единичная $(n \times n)$ -матрицы, расширяется до (непрерывного) гомоморфизма $\omega_{t,x,\lambda}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал $\mathcal{K}$;

- в) оператор $A \in \mathfrak{A}$ нётеров в $L_M^n(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\det \omega_{t,x,\lambda}(A) \neq 0 \quad \text{для всех } (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $\mathcal{K} \subset \mathfrak{A}$ доказано в [7, лемма 9.1]. Так как (6) является биекцией $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{S}$, то

$$\omega_{t,x,\lambda}(A) = \sigma_{t,\mu}(A + \mathcal{K}) \quad \text{для всех } (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}, \quad (7)$$

где $\mu = f(t, x, \lambda) \in \mathcal{S}(0, 1; \delta(t); \alpha_M, \beta_M)$, а гомоморфизм $\sigma_{t,\mu}: \mathfrak{A}/\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ для $(t, \mu) \in \mathfrak{S}$ введен в [7, теорема 9.5]. Тогда $\omega_{t,x,\lambda}(K) = 0$ для любого $K \in \mathcal{K}$. Ввиду (7) остальные утверждения теоремы 1 вытекают из теоремы 9.5 [7].

4. Символ и его детерминант. Матрицу-функцию $\mathcal{A}(t, x, \lambda) = \omega_{t,x,\lambda}(A)$ при $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ будем называть *символом оператора* $A \in \mathfrak{A}$. Представим его в виде

$$\mathcal{A}(t, x, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(t, x, \lambda) & \mathcal{A}_{12}(t, x, \lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(t, x, \lambda) & \mathcal{A}_{22}(t, x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N},$$

где $\mathcal{A}_{ij}(t, x, \lambda)$ – $(n \times n)$ -матрицы-функции.

В пространстве $L_M^n(\Gamma)$ рассмотрим проекторы $P_{\pm} := (I \pm S)/2$. Обозначим

$$K := (\max\{\|P_+\|_{\mathcal{L}}, \|P_-\|_{\mathcal{L}}\})^2.$$

Семейство гомоморфизмов $\omega_{t,x,\lambda}$, вообще говоря, не является равномерно ограниченным по $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Однако, этим свойством обладают функции $\det \mathcal{A}$, $\det \mathcal{A}_{ii}$ ($i = 1, 2$). Более точно, если обозначить через

$$|A| := \inf_{T \in \mathcal{K}} \|A + T\|_{\mathcal{L}}$$

существенную норму оператора $A \in \mathcal{L}$ (т.е. норму класса смежности $A + \mathcal{K}$ в алгебре Калкина $\mathcal{L}/\mathcal{K}$), а через

$$\|a\| := \sup_{(t,x,\lambda) \in \mathfrak{N}} |a(t, x, \lambda)|$$

sup-норму функции $a: \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{C}$, то имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $A \in \mathfrak{A}$, то

$$\|\det \mathcal{A}\| \leq (2n)!(K|A|)^{2n}, \quad \|\det \mathcal{A}_{ii}\| \leq n!(K|A|)^n \quad (i = 1, 2).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность операторов $A_s \in \mathfrak{A}$ равномерно сходится к оператору A , и $\mathcal{A}^{(s)}$ – последовательность символов операторов A_s . Тогда последовательность функций $\det \mathcal{A}^{(s)}$ ($\det \mathcal{A}_{11}^{(s)}$, $\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}$) равномерно сходится на множестве $\mathfrak{N}$ к функции $\det \mathcal{A}$ ($\det \mathcal{A}_{11}$, $\det \mathcal{A}_{22}$ соответственно).

Для доказательства теорем 2 и 3 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через v_i диагональную $(n \times n)$ -матрицу, у которой элемент, стоящий на i -м месте равен 1, а все остальные элементы равны 0. Операторы

$$\begin{aligned} Z_1(A; i, j) &:= P_+ v_i A v_j P_+, & Z_2(A; i, j) &:= P_+ v_i A v_j P_-, \\ Z_3(A; i, j) &:= P_- v_i A v_j P_+, & Z_4(A; i, j) &:= P_- v_i A v_j P_-, \end{aligned} \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

будем называть элементарными операторами, ассоциированными с оператором A .

ЛЕММА 1. Пусть операторы $A, B \in \mathfrak{A}$ и

$$A_l = Z_k(A; i, j), \quad B_l = Z_k(B; i, j), \quad 1 \leq l \leq m,$$

где тройка $\{i, j, k\}$ зависит от l и $1 \leq k \leq 4$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда

$$|A_1 A_2 \cdots A_m - B_1 B_2 \cdots B_m| \leq K^m |A - B| \sum_{l=1}^m |B|^{l-1} |A|^{m-l}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции доказывается, что

$$|A_1 A_2 \cdots A_m - B_1 B_2 \cdots B_m| \leq \sum_{l=1}^m \left(\prod_{j=1}^{l-1} |B_j| \cdot |A_l - B_l| \cdot \prod_{j=l+1}^m |A_j| \right). \quad (9)$$

Пусть $1 \leq l \leq m$. Тогда с учетом определения постоянной K

$$|A_l - B_l| = |Z_k(A; i, j) - Z_k(B; i, j)| = |Z_k(A - B; i, j)| \leq K|A - B|. \quad (10)$$

Следовательно, $|A_l| \leq K|A|$, $|B_l| \leq K|B|$. Отсюда и из неравенств (9), (10) вытекает неравенство (8).

Через $J(a; i, j)$ обозначим $(2n \times 2n)$ -матрицу, у которой элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце, равен a , а все остальные элементы равны 0. Представим символ $\mathcal{A}$ произвольного оператора $A \in \mathfrak{A}$ в виде

$$\mathcal{A}(t, x, \lambda) = (a_{ij}(t, x, \lambda))_{i,j=1}^{2n}, \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}.$$

Вычислим символы элементарных операторов ($1 \leq i, j \leq n$):

$$(\mathcal{Z}_1(A; i, j))(t, x, \lambda) = J(1; i, i) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j, j) = J(a_{ij}(t, x, \lambda); i, j), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}_2(A; i, j))(t, x, \lambda) &= J(1; i, i) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j+n, j+n) \\ &= J(a_{i, j+n}(t, x, \lambda); i, j+n), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}_3(A; i, j))(t, x, \lambda) &= J(1; i+n, i+n) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j, j) \\ &= J(a_{i+n, j}(t, x, \lambda); i+n, j), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{Z}_4(A; i, j))(t, x, \lambda) &= J(1; i+n, i+n) \mathcal{A}(t, x, \lambda) J(1; j+n, j+n) \\ &= J(a_{i+n, j+n}(t, x, \lambda); i+n, j+n). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, матрицы вида $J(a_{ij}(t, x, \lambda); i, j)$, где $a_{ij}(t, x, \lambda)$ есть (i, j) -й элемент символа $\mathcal{A}(t, x, \lambda)$, также являются символами операторов из алгебры $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 2. Пусть A – оператор из алгебры $\mathfrak{A}$, символ которого имеет вид

$$\mathcal{A}(t, x, \lambda) = J(a(t, x, \lambda); i, i), \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

Тогда $\|a\| \leq |A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства заимствована из [2, теорема 4.1]. Допустим, что существует точка $(t_0, x_0, \lambda_0) \in \mathfrak{N}$, для которой $|A| < |a(t_0, x_0, \lambda_0)|$. В этом случае $|A|/|a(t_0, x_0, \lambda_0)| < 1$. Тогда оператор $B = I - (a(t_0, x_0, \lambda_0))^{-1}A$ нётеров, а его символ – диагональная матрица

$$\mathcal{B}(t, x, \lambda) = \text{diag} \left\{ 1, \dots, 1, 1 - \frac{a(t, x, \lambda)}{a(t_0, x_0, \lambda_0)}, 1, \dots, 1 \right\},$$

где на i -м месте стоит элемент $1 - a(t, x, \lambda)/a(t_0, x_0, \lambda_0)$. Следовательно,

$$\det \mathcal{B}(t_0, x_0, \lambda_0) = 1 - \frac{a(t_0, x_0, \lambda_0)}{a(t_0, x_0, \lambda_0)} = 0,$$

что противоречит утверждению в) теоремы 1.

ЛЕММА 3. Если $A, B \in \mathfrak{A}$, то $\|a_{ii} - b_{ii}\| \leq K|A - B|$ для всех i , $1 \leq i \leq 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $1 \leq i \leq n$, то из леммы 2 и равенств (11), (14) вытекает, что

$$\|a_{ii} - b_{ii}\| \leq |Z_1(A - B; i, i)|, \quad \|a_{i+n, i+n} - b_{i+n, i+n}\| \leq |Z_4(A - B; i, i)|.$$

Применив к правым частям последних двух неравенств лемму 1 при $m = 1$, получим требуемое утверждение.

Обозначим через $\mathfrak{S}_{2n}$ симметрическую группу перестановок степени $2n$. Пусть даны различные натуральные числа $1 \leq p_1 < \dots < p_m \leq 2n$. Циклом $(p_1, \dots, p_m) \in \mathfrak{S}_{2n}$ называется перестановка, действующая по правилу: элементы, отличные от p_i , $1 \leq i \leq m$, переходят в себя; p_i переходит в p_{i+1} , $1 \leq i \leq m-1$, а p_m переходит в p_1 . Число m называется длиной цикла. Обозначим

$$C_{A, (p_1, \dots, p_m)}(t, x, \lambda) := a_{p_1 p_2}(t, x, \lambda) \cdots a_{p_{m-1} p_m}(t, x, \lambda) \cdot a_{p_m p_1}(t, x, \lambda).$$

ЛЕММА 4. Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $(p_1, \dots, p_m) \in \mathfrak{S}_{2n}$ – цикл длины m , то

$$\|C_{A, (p_1, \dots, p_m)} - C_{B, (p_1, \dots, p_m)}\| \leq K^m |A - B| \sum_{l=1}^m |B|^{l-1} |A|^{m-l}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$J(a_{p_1 p_2}(t, x, \lambda); p_1, p_2) \cdots J(a_{p_{m-1} p_m}(t, x, \lambda); p_{m-1}, p_m) \cdot J(a_{p_m p_1}(t, x, \lambda); p_m, p_1) \\ = J(C_{A, (p_1, \dots, p_m)}(t, x, \lambda); p_1, p_1), \quad (15)$$

$$J(b_{p_1 p_2}(t, x, \lambda); p_1, p_2) \cdots J(b_{p_{m-1} p_m}(t, x, \lambda); p_{m-1}, p_m) \cdot J(b_{p_m p_1}(t, x, \lambda); p_m, p_1) \\ = J(C_{B, (p_1, \dots, p_m)}(t, x, \lambda); p_1, p_1). \quad (16)$$

Каждая матрица, стоящая в левой части равенства (15) (соответственно (16)), является символом элементарного оператора A_l , $1 \leq l \leq m$ (соответственно B_l), ассоциированного с оператором A (соответственно B) по формулам (11)–(14). В итоге, из равенств (15), (16) вытекает, что

$$J(C_{A, (p_1, \dots, p_m)}(t, x, \lambda) - C_{B, (p_1, \dots, p_m)}(t, x, \lambda); p_1, p_1) \\ = \omega_{t, x, \lambda}(A_1 A_2 \cdots A_m - B_1 B_2 \cdots B_m).$$

По лемме 2

$$\|C_{A, (p_1, \dots, p_m)} - C_{B, (p_1, \dots, p_m)}\| \leq |A_1 A_2 \cdots A_m - B_1 B_2 \cdots B_m|.$$

Применив к правой части последнего неравенства лемму 1, получим требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из выражения определителя через элементы матрицы вытекает, что

$$\|\det \mathcal{A} - \det \mathcal{A}^{(s)}\| \leq \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} \left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{j i_j} - \prod_{j=1}^{2n} a_{j i_j}^{(s)} \right\|, \quad (17)$$

где $i_j = \pi(j)$. Перестановку $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$, отличную от тождественной, разложим в произведение независимых циклов:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2n} \end{pmatrix} = (p_1^{(1)}, \dots, p_{m(1)}^{(1)}) \cdots (p_1^{(r)}, \dots, p_{m(r)}^{(r)}), \quad (18)$$

где r – число циклов, $m(l)$ – длина l -го цикла. Обозначим через k число элементов, остающихся на месте под действием перестановки π . Очевидно,

$$k = 2n - \sum_{l=1}^r m(l). \quad (19)$$

Для тождественной перестановки $r = 0$, $k = 2n$. Рассмотрим множество

$$\{q_1, \dots, q_k\} := \{1, \dots, 2n\} \setminus \bigcup_{l=1}^r \{p_1^{(l)}, \dots, p_{m(l)}^{(l)}\}.$$

Обозначим

$$C_l(t, x, \lambda) := C_{A, (p_1^{(l)}, \dots, p_{m(l)}^{(l)})}(t, x, \lambda), \quad C_l^{(s)}(t, x, \lambda) := C_{A_s, (p_1^{(l)}, \dots, p_{m(l)}^{(l)})}(t, x, \lambda).$$

Аналогично (9) оценим каждое слагаемое, стоящее в формуле (17) справа:

$$\begin{aligned}
 \left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j}^{(s)} \right\| &= \left\| \prod_{l=1}^r C_l \cdot \prod_{l=1}^k a_{q_l q_l} - \prod_{l=1}^r C_l^{(s)} \cdot \prod_{l=1}^k a_{q_l q_l}^{(s)} \right\| \\
 &\leq \prod_{l=1}^r \|C_l^{(s)}\| \cdot \sum_{l=1}^k \left(\prod_{j=1}^{l-1} \|a_{q_j q_j}^{(s)}\| \cdot \|a_{q_l q_l} - a_{q_l q_l}^{(s)}\| \cdot \prod_{j=l+1}^k \|a_{q_j q_j}\| \right) \\
 &\quad + \prod_{l=1}^k \|a_{q_l q_l}\| \cdot \sum_{l=1}^r \left(\prod_{j=1}^{l-1} \|C_j^{(s)}\| \cdot \|C_l - C_l^{(s)}\| \cdot \prod_{j=l+1}^r \|C_j\| \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Так как последовательность A_s равномерно сходится к A , то $|A_s| \leq 2|A|$ начиная с некоторого номера s_0 . Тогда для всех $s \geq s_0$ из леммы 3 при $1 \leq j \leq k$ следует, что

$$\|a_{q_j q_j} - a_{q_j q_j}^{(s)}\| \leq K|A - A_s|, \quad \|a_{q_j q_j}\| \leq K|A|, \quad \|a_{q_j q_j}^{(s)}\| \leq 2K|A|. \quad (21)$$

Из леммы 4 для всех $1 \leq l \leq r$ вытекает оценка

$$\|C_l - C_l^{(s)}\| \leq K^{m(l)}|A - A_s| \sum_{j=1}^{m(l)} |A_s|^{j-1} |A|^{m(l)-j}.$$

Тогда для всех $s \geq s_0$ и всех $1 \leq l \leq r$

$$\|C_l\| \leq (K|A|)^{m(l)}, \quad \|C_l^{(s)}\| \leq (K|A_s|)^{m(l)} \leq (2K|A|)^{m(l)}, \quad (22)$$

$$\|C_l - C_l^{(s)}\| \leq (2^{m(l)} - 1)K^{m(l)}|A|^{m(l)-1}|A - A_s|. \quad (23)$$

В итоге из неравенств (20)–(23) с учетом равенства (19) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 &\left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} - \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j}^{(s)} \right\| \\
 &\leq \left(2^{2n-k} \sum_{l=1}^k 2^{l-1} + \sum_{l=1}^r \left(\prod_{j=1}^{l-1} 2^{m(j)} \cdot (2^{m(l)} - 1) \right) \right) K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s| \\
 &= (2^{2n} - 1) K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s|. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (17) и (24) получаем

$$\|\det \mathcal{A} - \det \mathcal{A}^{(s)}\| \leq (2n)!(2^{2n} - 1) K^{2n} |A|^{2n-1} |A - A_s|. \quad (25)$$

Осталось показать, что последовательности функций $\det \mathcal{A}_{ii}^{(s)}$ ($i = 1, 2$) равномерно сходятся к функциям $\det \mathcal{A}_{ii}$ соответственно. Пусть, например, $i = 2$. Рассмотрим последовательность операторов $B_s := P_+ + P_- A_s P_-$, равномерно сходящуюся к оператору $B := P_+ + P_- A P_-$. Так как $\det \mathcal{B} = \det \mathcal{A}_{22}$, $\det \mathcal{B}^{(s)} = \det \mathcal{A}_{22}^{(s)}$, равномерная сходимость $\det \mathcal{A}_{22}^{(s)} \rightarrow \det \mathcal{A}_{22}$ вытекает из (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Имеем

$$\|\det \mathcal{A}\| \leq \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} \left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} \right\|. \quad (26)$$

Если перестановка π разлагается в произведение (18), то согласно доказательству теоремы 3

$$\left\| \prod_{j=1}^{2n} a_{ji_j} \right\| \leq \prod_{l=1}^r \|C_l\| \cdot \prod_{j=1}^k \|a_{q_j q_j}\|, \quad \|C_l\| \leq (K|A|)^{m(l)}, \quad \|a_{q_j q_j}\| \leq K|A|.$$

Отсюда ввиду (26) и (19)

$$\|\det \mathcal{A}\| \leq \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} (K|A|)^{2n} = (2n)!(K|A|)^{2n}.$$

Неравенство для блоков $\mathcal{A}_{ii}$ ($i = 1, 2$) доказывается аналогично.

5. Формула индекса. Рассмотрим цилиндр $\mathfrak{M} = \Gamma \times [0, 1]$. Согласно [1], [2] введем на $\mathfrak{M}$ топологию следующим образом. Определим окрестности

$$\begin{aligned} \Omega(t, 0) &:= \{(\tau, x) \in \mathfrak{M} : |\tau - t| < \delta, \tau \prec t, x \in [0, 1]\} \cup \{(t, x) \in \mathfrak{M} : x \in [0, \varepsilon)\}, \\ \Omega(t, 1) &:= \{(\tau, x) \in \mathfrak{M} : |\tau - t| < \delta, t \prec \tau, x \in [0, 1]\} \cup \{(t, x) \in \mathfrak{M} : x \in (\varepsilon, 1]\}, \\ \Omega(t, x_0) &:= \{(t, x) \in \mathfrak{M} : x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)\}, \end{aligned}$$

где $x_0 \neq 0, 1, 0 < \delta_1 < x_0, 0 < \delta_2 < 1 - x_0, 0 < \varepsilon < 1$. Рассмотрим функцию

$$F(t, x, \lambda) := \prod_{j=1}^k U_{a_j}(t, x, \lambda), \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}, \quad (27)$$

где $a_j \in \Lambda(\Gamma)$, $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$. Допустим, что $F(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Зафиксируем $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Несложно видеть, что функция $F(\cdot, \cdot, \lambda)$ непрерывна на цилиндре $\mathfrak{M}$. Образ этой функции – непрерывная замкнутая кривая, не проходящая через 0, которую можно естественным образом ориентировать: в точках непрерывности функций a_j движение по кривой определяется изменением t по контуру Γ в положительном направлении, а вдоль дополнительных спиралей, соединяющих точки разрыва функций a_j , движение определяется изменением x от 0 до 1. Определим индекс функции F как число оборотов описанной выше кривой вокруг начала координат. Так как семейство функций $F(\cdot, \cdot, \lambda)$ непрерывно по λ , то введенный индекс не зависит от $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Будем обозначать его через $\text{ind}_{\mathfrak{N}} F$.

Обозначим через $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ класс функций $H: \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- i) $H(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$;
- ii) функция H представима в виде равномерного предела по $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$ последовательности функций F_s вида (27).

Так как цилиндр $\mathfrak{M}$ является компактом, в случае выполнения условия ii) функция $H(\cdot, \cdot, \lambda)$ непрерывна на цилиндре $\mathfrak{M}$ при любом $\lambda \in [\alpha_M, \beta_M]$. Начиная с некоторого номера s_0 , числа $\text{ind}_{\mathfrak{N}} F_s$ не зависят от s . Индексом функции $H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ назовем

$$\text{ind}_{\mathfrak{N}} H := \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind}_{\mathfrak{N}} F_s.$$

Легко видеть, что так определенный индекс не зависит от выбора последовательности функций F_s вида (27). Отметим, что введенный индекс обладает естественным логарифмическим свойством: если $F, H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, то $FH \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, при этом

$$\text{ind}_{\mathfrak{N}} FH = \text{ind}_{\mathfrak{N}} F + \text{ind}_{\mathfrak{N}} H.$$

Для доказательства формулы индекса нам потребуются некоторые вспомогательные факты.

ЛЕММА 5. Пусть $a, b \in L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$. Если оператор $aP_+ + bP_-$ нётеров в $L_M^n(\Gamma)$, то

$$\text{ess inf}_{t \in \Gamma} |\det a(t)| > 0, \quad \text{ess inf}_{t \in \Gamma} |\det b(t)| > 0.$$

Это утверждение доказывается по аналогии с леммой 2 из [20].

Непрерывная матрица-функция на кривой Γ называется неособенной, если она невырождена в каждой точке $t \in \Gamma$. Пусть $a \in L_{\infty}^{n \times n}(\Gamma)$. Обозначим $R_a := aP_+ + P_-$.

ЛЕММА 6. Пусть $G \in C^{n \times n}(\Gamma)$. Если оператор R_G нётеров, то

$$\text{Ind } R_G = -\frac{1}{2\pi} \{\text{Arg } \det G(t)\}_{\Gamma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор R_G нётеров, то по лемме 5 $\det G(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Значит, матрица-функция $G(t)$ гомотопна матрице-функции $\tilde{G}(t) = \text{diag}\{t^{\varkappa}, 1, \dots, 1\}$, где $\varkappa = \frac{1}{2\pi} \{\text{Arg } \det G(t)\}_{\Gamma}$ – индекс Коши (см. добавление VI Б. Боярского в [21, с. 484–486]). По теореме об устойчивости индекса нётерова оператора $\text{Ind } R_G = \text{Ind } R_{\tilde{G}}$. Очевидно, что $\text{Ind } R_{\tilde{G}} = \text{Ind}(t^{\varkappa} P_+ + P_-) = -\varkappa$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $G \in PC(\Gamma)$. Оператор R_G нётеров в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Если оператор R_G нётеров, то функция $U_G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, $\text{Ind } R_G = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} U_G$.

Теорема 4 вытекает из [7, теорема 8.7] и равенства (5).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G \in \Lambda^{n \times n}(\Gamma)$. Если оператор R_G нётеров в $L_M^n(\Gamma)$, то функция $\det U_G$ представима в виде (27) и принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, $\text{Ind } R_G = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор R_G нётеров, согласно утверждению в) теоремы 1 его символ

$$\mathcal{R}_G(t, x, \lambda) = \begin{pmatrix} U_G(t, x, \lambda) & O \\ W_G(t, x, \lambda) & E \end{pmatrix}$$

обратим, т.е. $\det \mathcal{R}_G(t, x, \lambda) = \det U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$.

По лемме 5 $\det G(t \pm 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Тогда по лемме 2 из [22] матрица-функция G представима в виде $G(t) = C_1(t)Y(t)C_2(t)$, где C_i , $i = 1, 2$, – непрерывные неособенные матрицы-функции, $Y \in \Lambda^{n \times n}(\Gamma)$ – верхнетреугольная матрица-функция с диагональными элементами y_j , $1 \leq j \leq n$. Легко видеть, что в этом случае

$$\det U_G(t, x, \lambda) = \det C_1(t) \cdot \prod_{j=1}^n U_{y_j}(t, x, \lambda) \cdot \det C_2(t). \quad (28)$$

Так как $C_i \in C^{n \times n}(\Gamma)$, $i = 1, 2$, очевидно,

$$\det C_i(t) = U_{\det C_i}(t, x, \lambda), \quad (t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}.$$

Потому функция $\det U_G$ имеет вид (27) и принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$. Для непрерывных на Γ функций введенный в начале пункта индекс совпадает с индексом Коши:

$$\text{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_i = \frac{1}{2\pi} \{ \text{Arg} \det C_i(t) \}_{\Gamma}, \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

Так как $\det U_G(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$, из равенства (28) вытекает, что $U_{y_j}(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $1 \leq j \leq n$ и $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. По теореме 4 операторы R_{y_j} нётеровы,

$$\text{Ind } R_{y_j} = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} U_{y_j}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (30)$$

Из результатов о нётеровости блочных операторов (см., например, [23]) следует, что оператор R_Y нётеров и его индекс вычисляется по формуле

$$\text{Ind } R_Y = \sum_{j=1}^n \text{Ind } R_{y_j}. \quad (31)$$

Несложно доказать, что

$$\text{Ind } R_G = \text{Ind } R_{C_1} + \text{Ind } R_Y + \text{Ind } R_{C_2}. \quad (32)$$

Действительно, согласно утверждению в) теоремы 1 операторы R_{C_i} , $i = 1, 2$, нётеровы. Так как $R_G = (P_+GP_+ + P_-)(I + P_-GP_+)$, где оператор $I + P_-GP_+$ обратим: $(I + P_-GP_+)^{-1} = I - P_-GP_+$, оператор R_G нётеров тогда и только тогда, когда оператор $P_+GP_+ + P_-$ нётеров, причем

$$\text{Ind } R_G = \text{Ind}(P_+GP_+ + P_-). \quad (33)$$

Из [7, лемма 5.6] следует, что если $a \in C^{n \times n}(\Gamma)$, то операторы $aP_{\pm} - P_{\pm}aI$ компактны; поэтому справедливо равенство

$$(P_+C_1P_+ + P_-)(P_+YP_+ + P_-)(P_+C_2P_+ + P_-) = P_+GP_+ + P_- + K,$$

где $K \in \mathcal{K}$. Отсюда и из (33) вытекает (32).

Из леммы 6 и равенств (28)–(32) следует, что

$$\begin{aligned} \text{Ind } R_G &= \text{Ind } R_{C_1} + \sum_{j=1}^n \text{Ind } R_{y_j} + \text{Ind } R_{C_2} \\ &= -\left(\text{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_1 + \sum_{j=1}^n \text{ind}_{\mathfrak{N}} U_{y_j} + \text{ind}_{\mathfrak{N}} \det C_2 \right) = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_G. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ нётеров в $L_M^n(\Gamma)$. Тогда функция

$$Q(t, x, \lambda) = \frac{\det \mathcal{A}(t, x, \lambda)}{\det \mathcal{A}_{22}(t, 0, \lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t, 1, \lambda)}$$

принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\text{Ind } A = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} Q. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем в три этапа.

1) Пусть $A = aP_+ + bP_-$, где $a, b \in \Lambda^{n \times n}(\Gamma)$. Если оператор A нётеров в $L_M^n(\Gamma)$, то по лемме 5 $\det b(t \neq 0) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$. Тогда оператор $R_{b^{-1}a}$ нётеров, $\text{Ind } A = \text{Ind } R_{b^{-1}a}$. По аналогии с леммой 1.1 из [1] или леммой 2.1 из [2] доказывается, что

$$\det \mathcal{A}(t, x, \lambda) = \det U_{b^{-1}a}(t, x, \lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t, 0, \lambda) \det \mathcal{A}_{22}(t, 1, \lambda).$$

Отсюда и из теоремы 5 следует, что функция $Q = \det U_{b^{-1}a}$ имеет вид (27) и принадлежит классу $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$,

$$\text{Ind } R_{b^{-1}a} = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} \det U_{b^{-1}a} = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} Q.$$

2) Пусть

$$A = \sum_{j=1}^k A_{j1} A_{j2} \cdots A_{jr}, \quad (35)$$

где $A_{jl} = a_{jl}P_+ + b_{jl}P_-$, $a_{jl}, b_{jl} \in \Lambda^{n \times n}(\Gamma)$, $1 \leq l \leq r$, $k \geq 1$, и оператор A нётеров. Этот случай сводится к предыдущему с помощью процедуры линейного растяжения точно так же, как и в [1, теорема 7.1] или в [2, теорема 3.1]. Таким образом, в этом случае функция Q представима в виде (27) и принадлежит $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$, при этом справедлива формула индекса (34).

3) Пусть A — произвольный нётеров оператор из алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда согласно утверждению в) теоремы 1 $\det \mathcal{A}(t, x, \lambda) \neq 0$ для любого $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. По теореме 2 функция $\det \mathcal{A}_{22}(t, x, \lambda)$ равномерно ограничена по $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $Q(t, x, \lambda) \neq 0$ для всех $(t, x, \lambda) \in \mathfrak{N}$. Оператор A является равномерным пределом нётеровых операторов A_s вида (35) с символами $\mathcal{A}^{(s)}$. Согласно теореме 3 последовательности $\det \mathcal{A}^{(s)}(t, x, \lambda)$, $\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}(t, x, \lambda)$ равномерно сходятся на $\mathfrak{N}$ к функциям $\det \mathcal{A}(t, x, \lambda)$, $\det \mathcal{A}_{22}(t, x, \lambda)$ соответственно. Тогда последовательность функций

$$Q_s(t, x, \lambda) = \frac{\det \mathcal{A}^{(s)}(t, x, \lambda)}{\det \mathcal{A}_{22}^{(s)}(t, 0, \lambda) \det \mathcal{A}_{22}^{(s)}(t, 1, \lambda)}$$

равномерно сходятся к функции $Q(t, x, \lambda)$ на множестве $\mathfrak{N}$. Как было отмечено выше в этапе 2), функции Q_s представимы в виде (27). Тогда $Q \in \mathfrak{F}(\mathfrak{N})$ и по определению индекса функции из класса $\mathfrak{F}(\mathfrak{N})$

$$\text{ind}_{\mathfrak{N}} Q = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind}_{\mathfrak{N}} Q_s.$$

Окончательно,

$$\text{Ind } A = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{Ind } A_s = - \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind}_{\mathfrak{N}} Q_s = -\text{ind}_{\mathfrak{N}} Q.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Об алгебре, порожденной одномерными сингулярными интегральными операторами с кусочно непрерывными коэффициентами // Функцион. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. № 3. С. 26–36.
- [2] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами и их символы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 4. С. 940–964.
- [3] David G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1984. V. 17. P. 157–189.
- [4] Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 21. М.: ВИНТИ. С. 42–129.
- [5] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 22. P. 127–161.
- [6] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Toeplitz and singular integral operators on general Carleson–Jordan curves // Oper. Theory Adv. Appl. 1996. V. 90. P. 119–152.
- [7] Karlovich A. Yu. Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces // Math. Nachr. 1996. V. 179. P. 187–222.
- [8] Сейфуллаев Р. К. Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 2. С. 147–161.
- [9] Böttcher A., Karlovich Yu. I. Submultiplicative functions and spectral theory of Toeplitz operators // Integral Transforms and Special Functions 1996. V. 4. № 1–2. P. 181–202.
- [10] Finck T., Roch S., Silbermann B. Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra // Math. Nachr. 1993. V. 162. P. 167–185.
- [11] Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols // Integral Equations Operator Theory. 1993. V. 17. P. 514–529.
- [12] Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz Operators. Berlin: Akademie Verlag, 1989; Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1990.
- [13] Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [14] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. London–Boston: Acad. Press, 1988.
- [15] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. Sem. Mat. V. 5. Campinas: Univ. Estad. Campinas, 1989.
- [16] Matuszewska W., Orlicz W. On certain properties of φ -functions // Bull. Polish Acad. Sci. Math. Aster. Phys. 1960. V. 8. № 7. P. 439–443.
- [17] Maligranda L. Indices and interpolation // Dissertationes Math. 1985. V. 234. P. 1–49.
- [18] Boyd D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1245–1254.
- [19] Boyd D. W. Indices for the Orlicz spaces // Pacific J. Math. 1971. V. 38. P. 315–323.
- [20] Симоненко И. Б. Некоторые общие вопросы в теории краевой задачи Римана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1138–1146.
- [21] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [22] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Системы сингулярных интегральных уравнений в пространствах L_p с весом // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 5. С. 998–1002.
- [23] Спитковский И. М. О блочных операторах и связанных с ними вопросах теории факторизации матриц-функций // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 4. С. 816–820.

Южно-Украинский педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
г. Одесса
E-mail: alex@karlik.imem.odessa.ua

Поступило
01.04.97