Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Котова, Описание систем корней с данной группой Вейля, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 397–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:04:03

УДК 512.81.73

ОПИСАНИЕ СИСТЕМ КОРНЕЙ С ДАННОЙ ГРУППОЙ ВЕЙЛЯ

И. И. Котова

Работа посвящена описанию обобщенных систем корней с данной группой Вейля. Эта задача возникает в связи с классификацией бесконечномерных алгебр Ли и при изучении дискретных групп, порожденных отражениями. Получен критерий существования системы корней для данной дискретной группы, порожденной отражениями, и алгоритм описания всех систем корней с данной группой Вейля.

Библиография: 2 названия.

1. Группы Вейля и системы корней. Настоящая работа посвящена описанию систем корней с данной группой Вейля. Эта задача возникает в связи с классификацией бесконечномерных алгебр Ли.

Для конечномерных алгебр Ли группа Вейля – это дискретная группа, порожденная отражениями, действующая в евклидовом пространстве. Существует классификация всех таких групп; каждой неприводимой дискретной группе, порожденной отражениями, соответствует не более двух систем корней. В бесконечномерном случае ситуация иная.

Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная $(n \times n)$ -матрица. *Реализацией* матрицы A называется тройка $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, где $\mathfrak{h}$ – векторное пространство, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$, $\alpha_i(\alpha_j^\vee) = a_{ij}$. Две реализации $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ и $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$ такой, что $\varphi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$ и $\varphi^*(\Pi_1) = \Pi$.

Если наложить условия $\dim \mathfrak{h} = 2n - \text{rk } A$, Π и $\Pi^\vee$ линейно независимы, то реализация будет однозначно (с точностью до изоморфизма) определяться матрицей A . Каждая такая тройка определяет алгебру Ли, для которой $\mathfrak{h}$ является картановской подалгеброй, Π и $\Pi^\vee$ являются соответственно базисом системы корней и базисом дуальной системы корней (см. [1]).

Пусть матрица A обладает следующими свойствами:

- а) $a_{ii} = 2$ при всех $i = 1, \dots, n$;
- б) a_{ij} – неположительные целые числа при $i \neq j$;
- в) $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$.

Такие матрицы называются *обобщенными матрицами Картана*, а соответствующие им алгебры Ли – *алгебрами Каца–Муди*.

Группа Вейля для данной матрицы A с реализацией $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ – это группа преобразований пространства $\mathfrak{h}^*$, порожденная отражениями R_i , действующими по формуле $R_i(x) = x - x(\alpha_i^\vee)\alpha_i$.

Если A является обобщенной матрицей Картана, то группа Вейля действует дискретно в некотором открытом выпуклом конусе в $\mathfrak{h}^*$ (см. [2]). При этом отражения $R_1, \dots, R_n$ – это множество отражений в стенках фундаментальной камеры этой группы.

Выясним, в каком случае две матрицы задают одну и ту же группу Вейля.

Отражения R_i и R_j совпадают в том и только том случае, когда совпадают числа $x(\alpha_i^\vee)\alpha_i$ и $x(\alpha_j^\vee)\alpha_j$ при всех x из $\mathfrak{h}^*$; это равносильно условию

$$\alpha_i = \lambda \alpha_j, \quad \alpha_i^\vee = \frac{1}{\lambda} \alpha_j^\vee \quad (\lambda \neq 0).$$

Таким образом, матрицы A_1 и A_2 задают одну и ту же группу Вейля в том и только том случае, когда A_1 представима в виде

$$A_1 = D^{-1} A_2 D, \quad D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \neq 0,$$

или A_1 получена из матрицы такого вида перестановкой индексов.

В пространстве любой размерности можно привести пример дискретной группы, порожденной отражениями, со сколь угодно большим конечным количеством систем корней. Например, рассмотрим обобщенную матрицу Картана

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2^m & & & 0 \\ -2^m & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{N},$$

порядка $n \times n$. Для нее существует реализация $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, $\dim \mathfrak{h} = n$, так как A невырождена; $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$. При этом любая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2^{m+k} & & & 0 \\ -2^{m-k} & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -m \leq k \leq m,$$

с реализацией $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, где

$$\Pi = \{2^k \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \quad \Pi^\vee = \{2^{-k} \alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\},$$

будет задавать ту же группу Вейля.

2. Критерий существования системы корней с данной группой Вейля.

Пусть W – дискретная группа преобразований векторного пространства $\mathfrak{h}^*$, порожденная отражениями

$$R_i(x) = x - x(\alpha_i^\vee)\alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*, \quad \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h};$$

$(n \times n)$ -матрица A составлена из чисел $g_{ij} = \alpha_i(\alpha_j^\vee)$, причем $a_{ii} = 2$ и $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$; считаем, что $R_1, \dots, R_n$ – это множество отражений в стенках некоторой фундаментальной камеры группы W .

Цель настоящей работы – предложить алгоритм, позволяющий по данной матрице G описать все матрицы Картана, задающие ту же группу Вейля. Это равносильно описанию с точностью до пропорциональности всех наборов $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq 0$, таких что $A = DGD^{-1}$ – обобщенная матрица Картана, $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq 0$. Другими словами, λ_i должны обладать следующим свойством: $(\lambda_i/\lambda_j) \cdot g_{ij}$ – неположительные целые числа для всех $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.

Считаем далее, что группа W неразложима, т.е. не разлагается в прямую сумму $W = W_1 \oplus W_2$; это равносильно тому, что матрица G путем перестановки индексов не приводится к виду

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Будем называть матрицы A и B *диагонально подобными*, если

$$A = DBD^{-1}, \quad D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \neq 0;$$

равенство выполнено с точностью до перестановки индексов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G – неразложимая $(n \times n)$ -матрица, $g_{ii} = 2$ и $g_{ij} = 0 \iff g_{ji} = 0$. Обобщенная матрица Картана, диагонально подобная G , существует в том и только том случае, если все циклические произведения

$$g_{i_1 i_2} g_{i_2 i_3} \cdots g_{i_k i_1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

целые, и при $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, \dots, i_k \neq i_1$ знак $\text{sgn}(g_{i_1 i_2} g_{i_2 i_3} \cdots g_{i_k i_1})$ равен $(-1)^k$ или 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть A – обобщенная матрица Картана, $a_{ij} = (\lambda_i/\lambda_j) \cdot g_{ij}$. Тогда

$$a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1} = \frac{\lambda_{i_1}}{\lambda_{i_2}} g_{i_1 i_2} \cdots \frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_{i_1}} g_{i_k i_1} = g_{i_1 i_2} \cdots g_{i_k i_1} \in \mathbb{Z},$$

причем $\text{sgn}(a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1}) = (-1)^k$, если в этом циклическом произведении нет чисел a_{ii} .

Достаточность. В силу неразложимости матрицы G для любой пары индексов i и j , $i \neq j$, существует такая последовательность $i_1 = i, i_2, \dots, i_k$ такая, что $g_{i i_2} \cdots g_{i_k j} \neq 0$. Эту последовательность можно выбрать так, чтобы среди индексов $i, i_2, \dots, i_k, j$ не было одинаковых. Обозначим

$$\bar{g}_{ij} = \begin{cases} (-1)^k g_{i i_2} \cdots g_{i_k j} \neq 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j; \end{cases}$$

N_i – наибольший общий делитель циклических произведений $|\bar{g}_{i1}g_{1j_2}\cdots g_{j_l i}|$, не равных 0. Хотя бы одно такое произведение существует: $g_{1i_2}\cdots g_{i_k i}g_{ii_k}\cdots g_{i_2 1}$ не равно 0 в силу условия $g_{ij} = 0 \iff g_{ji} = 0$. Из этого неравенства также следует, что числа $\bar{g}_{ij}$ можно выбрать так, что

$$\operatorname{sgn}(\bar{g}_{ij}\bar{g}_{ji}) = (-1)^{2k} > 0.$$

Пусть $\lambda_i = N_i/\bar{g}_{ij}$. Докажем, что при $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ матрица $A = DGD^{-1}$ является обобщенной матрицей Картана. Пусть $g_{ij} \neq 0$. Тогда

$$a_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} g_{ij} = \frac{\bar{g}_{j1}}{\bar{g}_{i1}} \frac{N_i}{N_j} g_{ij}.$$

Это число рационально, так как

$$\frac{\bar{g}_{j1}}{\bar{g}_{i1}} g_{ij} = \frac{g_{ij}\bar{g}_{j1}\bar{g}_{1i}}{\bar{g}_{i1}\bar{g}_{1i}} \in \mathbb{Q}.$$

Оно отрицательно, так как

$$\bar{g}_{i1}\bar{g}_{1i} > 0, \quad \operatorname{sgn}(g_{ij}\bar{g}_{j1}\bar{g}_{1i}) = (-1)^{k_1}(-1)^{k_2}(-1)^{k_1+k_2+1} = -1$$

(k_1 и k_2 – это количество членов в произведениях $\bar{g}_{j1}$ и $\bar{g}_{1i}$ соответственно). Представим a_{ij} в виде несократимой дроби $a_{ij} = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $n = 1$. Предположим, что n делится на простое число p . Пусть запись $\deg_p(a)$ обозначает максимальную степень p , на которую делится целое число a . Существует циклическое произведение $g = \bar{g}_{i1}g_{1j_2}\cdots g_{j_l i}$ такое, что $\deg_p(g) = \deg_p(N_i)$. Тогда при некотором целом q , взаимно простом с p ,

$$a_{ij} = \frac{1}{q} \frac{\bar{g}_{j1}g_{ij}\bar{g}_{i1}g_{1j_2}\cdots g_{j_l i}}{\bar{g}_{i1}N_j} = \frac{1}{q} \frac{\bar{g}_{j1}g_{1j_2}\cdots g_{j_l i}g_{ij}}{N_j};$$

но число $\bar{g}_{j1}g_{1j_2}\cdots g_{j_l i}g_{ij}$ делится на N_j . Значит, знаменатель числа $a_{ij} = m/n$ делится на p . Мы пришли к противоречию.

3. Описание систем корней с данной группой Вейля. Пусть дана неразложимая обобщенная матрица Картана A . Опишем все матрицы $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i > 0$, такие, что $B = DAD^{-1}$ – тоже обобщенная матрица Картана. Это равносильно условию

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Если выполнено (1), то числа

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_1}} a_{ii_1} \cdots \frac{\lambda_{i_k}}{\lambda_j} a_{i_k j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ii_1} \cdots a_{i_k j}$$

целые для любой последовательности индексов $i_1, \dots, i_k$. Обозначим через m_{ij} , $i \neq j$, наибольший общий делитель произведений $|a_{ii_1} \cdots a_{i_k j}|$, не равных 0. Такие произведения существуют в силу неразложимости A . Ясно, что достаточно рассматривать последовательности $i, i_1, \dots, i_k, j$ без повторений, число m_{ij} от этого не изменится. Числа m_{ij}

обладают свойствами $m_{ij} \in \mathbb{N}$; $m_{ij}m_{jk}$ делится на m_{ik} при всех $i, j, k = 1, \dots, n$. Условие (1) равносильно следующему:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} m_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Пусть λ_1 – целое число такое, что при всех $j = 2, \dots, n$ $\lambda_1/m_{j1} \in \mathbb{Z}$. Из (2) следует, что $\lambda_j : \lambda_1/m_{j1} \in \mathbb{Z}$, поэтому λ_j целые при всех $j = 2, \dots, n$.

Нам необходимо описать наборы $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ со свойством (2) с точностью до пропорциональности. Зафиксируем в качестве λ_1 целое число, которое делится на все числа m_{j1} , $j = 2, \dots, n$. Например, возьмем $\lambda_1 = \text{НОК}(m_{ij})$, $i, j = 2, \dots, n$. Тогда все числа λ_j , $j = 1, \dots, n$, будут целыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть заданы такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $k < n$, что

- а) λ_1 делится на m_{j1} при всех $j = 2, \dots, k+1$;
- б) условие (2) выполнено при всех $j = 2, \dots, k$.

Тогда существует $\lambda_{k+1} \in \mathbb{N}$ такое, что (2) выполнено при всех $j = 2, \dots, k+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для числа λ_{k+1} должны быть выполнены условия

$$\frac{\lambda_i m_{i,k+1}}{\lambda_{k+1}} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\lambda_{k+1} m_{k+1,i}}{\lambda_i} \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Другими словами, λ_{k+1} – это целое число, которое делит $\text{НОД}\{\lambda_i m_{i,k+1} \mid i = 1, \dots, k\}$ и делится на $\text{НОК}\{\lambda_i/m_{k+1,i} \mid i = 1, \dots, k\}$. Такое число существует, если при всех $i, j = 1, \dots, k$ число $\lambda_i m_{i,k+1}$ делится на $\lambda_j/m_{k+1,j}$. Проверим, что это действительно так:

$$\lambda_i m_{i,k+1} \frac{m_{k+1,j}}{\lambda_j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} m_{i,k+1} m_{k+1,j};$$

но $m_{i,k+1} m_{k+1,j}$ делится на m_{ij} , а число $(\lambda_i/\lambda_j) \cdot m_{ij}$ целое по условию.

Мы получили, что в качестве λ_{k+1} можно взять любое число вида

$$\lambda_{k+1} = c \cdot \text{НОК} \left\{ \frac{\lambda_i}{m_{k+1,i}} \mid i = 1, \dots, k \right\},$$

где c делит

$$N = \frac{\text{НОД}\{\lambda_i m_{i,k+1} \mid i = 1, \dots, k\}}{\text{НОК}\{\lambda_i/m_{k+1,i} \mid i = 1, \dots, k\}} = \text{НОД} \left\{ m_{i,k+1} m_{k+1,j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \mid i, j = 1, \dots, k \right\}.$$

Таким образом, можно предложить следующий способ построения для данной матрицы G всех матриц $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq 0$, таких, что $A = DGD^{-1}$ – обобщенная матрица Картана.

Пусть матрица G неразложима и удовлетворяет условиям предложения 1.

1. Построим какую-нибудь матрицу D_0 , для которой $A = D_0 G D_0^{-1}$ будет обобщенной матрицей Картана. Способ построения такой матрицы содержится в доказательстве предложения 1.

2. Для обобщенной матрицы Картана A построим все возможные

$$D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \lambda_i \neq 0,$$

при которых DAD^{-1} тоже обобщенная матрица Картана. Для этого:

- а) построим матрицу $M = (m_{ij})$: для данных $i, j = 1, \dots, n, i \neq j, m_{ij}$ — это наибольший общий делитель ненулевых произведений $|a_{ii_1} \cdots a_{i_k j}|, k \geq 0$, где в последовательности $i_0 = i, i_1, \dots, i_k, j$ нет повторений;
- б) зададим $\lambda_1 = \text{НОК}(m_{ij}), i, j = 2, \dots, n$ (можно взять любое другое число, делящееся на все m_{ij});
- в) предположим, что уже построены числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($k < n$), и вычислим

$$N_1 = \text{НОК} \left\{ \frac{\lambda_i}{m_{k+1,i}} \mid i = 1, \dots, k \right\},$$

$$N_2 = \text{НОД} \left\{ m_{i,k+1} m_{k+1,j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \mid i, j = 1, \dots, k \right\};$$

при данных $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ значение λ_{k+1} пробегает множество чисел вида $\lambda_{k+1} = c \cdot N_1, c \in \mathbb{N}, c$ делит N_2 .

Приведенный алгоритм (представляющий собой систему вложенных циклов) позволяет для данной обобщенной матрицы Картана перечислить все обобщенные матрицы Картана, диагонально подобные ей.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кац В.Г. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [2] Винберг Э.Б. Дискретные линейные группы, порожденные отражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 5. С. 1072–1112.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.05.97