Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Дундар, А. Айтак, Выражения для целостности тотальных графов через некоторые характеристики графов, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 714–722

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:35:53

УДК 519.1

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЦЕЛОСТНОСТИ ТОТАЛЬНЫХ ГРАФОВ ЧЕРЕЗ НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФОВ

П. Дундар, А. Айтак

Коммуникационные сети должны обладать высоким уровнем надежности. Вообще говоря, обрывы соединений, отключение узлов сети, ошибки программного обеспечения или аппаратные сбои, равно как и сбои при передаче данных, могут привести к долговременным отказам системы. Коммуникационные же сети требуют большей устойчивости, или меньшей уязвимости. Уязвимость коммуникационной сети измеряет способность сети сопротивляться разрушению в результате отказа некоторых станций или звеньев связи. Для описания устойчивости коммуникационной сети в терминах графа G , моделирующего сеть, используются разнообразные характеристики графа, такие как связность, целостность и прочность. Рассмотрим два графа с одинаковой связностью, но с различной величиной наибольших компонент связности, возникающих при удалении ребер. Ясно, что эти два графа должны характеризоваться различной устойчивостью. Как измерить это отличие? В результате мы приходим к понятию целостности, отличному от связности. Большой класс графов образуют тотальные графы. В настоящей статье мы описываем целостность тотальных графов в терминах некоторых характеристик графов.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Отказ соединений и узлов коммуникационной сети может привести к потере ею эффективности. Поэтому коммуникационные сети должны делаться максимально устойчивыми не только к разрушениям, но и к возможным перестройкам. При анализе уязвимости коммуникационной сети при ее нарушениях следует иметь ввиду следующие две величины:

- 1) размер максимальной группы узлов, сохранившей связь между любыми двумя узлами;
- 2) количество неработающих элементов.

Для описания устойчивости коммуникационной сети, смоделированной на графе, применяется целый ряд параметров, используемых в теории графов, среди которых связность, целостность, грубость, стойкость и коэффициент связности.

Граф G представляет собой пару $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ – это множество вершин графа G , а $E(G)$ – его множество ребер. Число вершин и число ребер графа G обозначаются, соответственно, через $|V(G)|$, $|E(G)|$. Эффективность графа, моделирующего топологию сети [1], падает при разрушении (по любой причине) некоторых его вершин или ребер.

(Вершинная) *связность* графа G равна минимальному числу вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу; она обозначается через $k(G)$ [2].

Реберная связность графа G равна минимальному числу ребер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу; она обозначается через $k_1(G)$ [2]. Связность графа равна минимальному числу вершин, удаление которых разбивает его на две или большее количество компонент связности. Однако для двух графов с одинаковой (вершинной или реберной) связностью и одинаковым числом вершин число вершин в максимальной компоненте, полученной в результате такого распада, может оказаться различным. Это означает, что связность не может полностью характеризовать устойчивость. Помимо связности в теории графов для характеристики устойчивости используются такие величины как целостность, окрестностно-целостная грубость, реберная целостность, реберная окрестностная целостность и прочность [3]–[15].

В начале этой статьи мы используем в качестве меры устойчивости графа целостность, а затем описываем некоторые параметры тотальных графов для графов из некоторых классов и вводим понятие целостности тотальных графов.

Целостность графа G определяется равенством

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\},$$

где $V(G)$ – множество вершин графа G , а $m(G - S)$ – максимальное количество вершин в компоненте связности графа $G - S$. Это понятие было введено Багга, Барфуттом, Энтрингером и Свортом [16]–[18]. *I -множеством* в G называется произвольное (строгое) подмножество S в $V(G)$, для которого $I(G) = S + m(T(G) - S)$ [19].

Для графа G порядка p справедливы неравенства $1 \leq I(G) \leq p$, и если H – подграф в G , то $I(H) \leq I(G)$.

Если $G = \bigcup_{i=1, \dots, n} G_i$, то

$$\max_i I(G_i) \leq I(G) \leq \sum_{i=1}^n I(G_i) - n + 1.$$

Для любых графов G и H справедливо равенство

$$I(G + H) = \min\{I(G) + |H|, I(H) + |G|\}.$$

Несмотря на то, что задача вычисления целостности графов NP -полна, для больших классов графов сложность можно найти явно [20]–[22].

Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Два элемента графа называются *соседями*, если они инцидентны друг другу или примыкают друг к другу. *Тотальным графом* $T(G)$ графа $G = (V(G), E(G))$ называется граф с множеством вершин $V(G) \cup E(G)$, причем две вершины в тотальном графе соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие им элементы в G являются соседними. Легко видеть, что $T(G)$ содержит в качестве индуцированных как подграф G , так и реберный подграф $L(G)$. Важной особенностью тотального графа является его максимальность среди всех графов, образованных с помощью отношения примыкания в графе [23].

Рис. 1. Построение тотального графа

2. Основные результаты о целостности. Начнем со значений целостности для графов разных типов [16].

РЕЗУЛЬТАТ 2.1. Целостность полного графа K_n равна $I(K_n) = n$.

РЕЗУЛЬТАТ 2.2. Целостность звезды $K_{1,n}$ равна $I(K_{1,n}) = 2$.

РЕЗУЛЬТАТ 2.3. Целостность цепочки P_n равна $I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$.

РЕЗУЛЬТАТ 2.4. Целостность цикла C_n равна $I(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$.

РЕЗУЛЬТАТ 2.5. Целостность сетки $P_m \times P_n$ при $n \geq 2$, $n = r^2 + k$ и $0 < k < 2r$ равна

$$I(P_2 \times P_n) = \begin{cases} 2I(P_n) - 1, & 0 \leq k \leq r/2 \text{ или } r \leq k < 3r/2, \\ 2I(P_n) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$I(P_3 \times P_n) \leq 2(\lceil \sqrt{3n+1} \rceil - 1), \quad \text{если } n \text{ нечетно,}$$

$$I(P_3 \times P_n) \geq 2\lceil \sqrt{3n} \rceil - 1, \quad \text{если } n \text{ четно.}$$

РЕЗУЛЬТАТ 2.6. Целостность гиперкуба Q_d равна $I(Q_d) = 2^{d-1} + 1$, где d – размерность гиперкуба.

РЕЗУЛЬТАТ 2.7. Для любого графа G имеют место неравенства $\delta(G) + 1 \leq I(G) \leq \alpha(G) + 1$, и если $\alpha(G) = \delta(G)$, то $I(G) = \alpha(G) + 1$, где через $\delta(G)$ обозначена минимальная степень вершины, а $\alpha(G)$ обозначает число покрытия графа [19]; $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень вершины в G .

РЕЗУЛЬТАТ 2.8. В любом неполном графе G всякое его I -множество является разделяющим, и поэтому мощность такого множества не меньше, чем $k(G)$ [19].

3. Некоторые результаты о характеристиках тотальных графов. В этом разделе мы определяем некоторые характеристики графов и находим их значения для тотальных графов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Подмножество S в $V(G)$ такое, что, по крайней мере, один из концов каждого ребра в G лежит в S , называется *покрывающим множеством*. Число вершин в минимальном покрывающем множестве графа G называется *числом покрытия* этого графа и обозначается через $\alpha(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Подмножество S в $V(G)$ называется *независимым*, если никакие две из его вершин не примыкают друг к другу. Число вершин в максимальном независимом множестве в G называется *индексом независимости* этого графа и обозначается через $\beta(G)$. *Порядок* n графа G определяется равенством $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Вершинно доминирующее множество* в графе G – это такое множество S его вершин, что всякая вершина в G либо лежит в S , либо примыкает к вершине из S . Минимальное количество вершин в вершинно доминирующем множестве графа G называется *индексом вершинного доминирования* этого графа и обозначается через $\sigma(G)$. Для любого графа G справедливо неравенство $\sigma(G) \leq \beta(G)$ [2].

Через $\delta(G)$ мы обозначаем минимальную степень вершины в G . В этой работе наименьшее целое число большее x , обозначается через $\lceil x \rceil$, наибольшее целое число меньшее x , обозначается через $\lfloor x \rfloor$, а абсолютная величина числа x обозначается через $|x|$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть P_n – цепочка с n вершинами. Тогда

$$k(T(P_n)) = 2, \quad \alpha(T(P_n)) = \left\lfloor \frac{2|V(T(P_n))|}{3} \right\rfloor, \quad \beta(T(P_n)) = \left\lceil \frac{|V(T(P_n))|}{3} \right\rceil,$$

$$\sigma(T(P_n)) = \begin{cases} \frac{|V(T(P_n))|}{5}, & \text{если } |V(T(P_n))| \bmod 5 = 0, \\ \left\lfloor \frac{|V(T(P_n))|}{5} \right\rfloor + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть C_n – цикл с n вершинами. Тогда

$$k(T(C_n)) = 4, \quad \alpha(T(C_n)) = \left\lceil \frac{2|V(T(C_n))|}{3} \right\rceil, \quad \beta(T(C_n)) = \left\lfloor \frac{|V(T(C_n))|}{3} \right\rfloor,$$

$$\sigma(T(C_n)) = \begin{cases} \frac{|V(T(C_n))|}{5}, & \text{если } |V(T(C_n))| \bmod 5 = 0, \\ \left\lfloor \frac{|V(T(C_n))|}{5} \right\rfloor + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть K_n – полный граф с n вершинами. Тогда

$$k(T(K_n)) = 2(n-1), \quad \alpha(T(K_n)) = \left\lceil \frac{|V(T(K_n))|(n-1)}{n} \right\rceil,$$

$$\beta(T(K_n)) = \left\lfloor \frac{|V(T(K_n))|}{n} \right\rfloor, \quad \sigma(T(K_n)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть G – связный граф с n вершинами и $\alpha(G) = 1$. Тогда $\sigma(T(G)) = 1$, $k(T(G)) = 2$ и $\alpha(T(G)) = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha(G) = 1$, то в G есть остовная звезда. Это означает, что и в тотальном графе графа G есть остовная звезда. Отсюда $\sigma(T(G)) = 1$, $k(T(G)) = 2$ и $\alpha(T(G)) = n$.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $S_{1,n}$ – звезда с $n+1$ вершинами. Тогда $k(T(S_{1,n})) = 2$, $\alpha(T(S_{1,n})) = n+1$, $\beta(T(S_{1,n})) = n$ и $\sigma(T(S_{1,n})) = 1$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $W_{1,n}$ – колесо с $n+1$ вершинами. Тогда

$$k(T(W_{1,n})) = 6, \quad \alpha(T(W_{1,n})) = \left\lceil \frac{3|V(T(W_{1,n}))|}{4} \right\rceil,$$

$$\beta(T(W_{1,n})) = \left\lfloor \frac{|V(T(W_{1,n}))|}{4} \right\rfloor, \quad \sigma(T(W_{1,n})) = 1 + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

ТЕОРЕМА 3.7 [2]. Для любого графа G справедливо неравенство

$$k(G) \leq k_1(G) \leq \delta(G).$$

ТЕОРЕМА 3.8. Для любого тотального графа $T(G)$ имеем

$$\begin{aligned} k(T(G)) &= 2, & k_i(G) &= 1, \\ k(T(G)) &\geq 2k(G), & k_i(G) &> 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы состоит из двух частей.

Случай 1. Если $k_1(G) = 1$, то $k(G) = 1$. Предположим, что граф G распадается при удалении ребра $\{e_1\}$. Из определения тотального графа вытекает, что этому ребру соответствует вершина в тотальном графе $T(G)$. Поскольку при удалении этого ребра граф G распадается, по меньшей мере, на две компоненты, при удалении вершины e_1 в $T(G)$ и одной из вершин u или v , каждая из которых является концом ребра e_1 в G , граф $T(G)$ тоже распадается. Поэтому

$$k(T(G)) = \min\{e_1, u\} \quad \text{или} \quad \min\{e_1, v\} = 2.$$

Случай 2. Вершины тотального графа $T(G)$ разбиваются на две части. Все вершины первой части являются вершинами графа G , а вершины из второй части соответствуют его ребрам. Степени вершин из первой части в два раза больше их степеней в G , поэтому $\delta_{1.\text{part}}(T(G)) = 2\delta(G)$. Минимальная степень вершины из второй части не превосходит четырех, $\delta_{2.\text{part}}(T(G)) \leq 4$. Поэтому в данном случае связность графа имеет вид

$$k(T(G)) = \min\{\delta_{1.\text{part}}(T(G)), \delta_{2.\text{part}}(T(G))\}.$$

Если $k(T(G)) = \delta_{1.\text{part}}(T(G))$, то $k(T(G)) = \delta_{1.\text{part}}(T(G)) = 2\delta(G) \geq 2k(G)$ по теореме 3.7. Поэтому

$$k(T(G)) \geq 2k(G). \quad (1)$$

Если $k(T(G)) = \delta_{2.\text{part}}(T(G))$, то $k(T(G)) = \delta_{2.\text{part}}(T(G)) \leq 4$. Поэтому

$$k(T(G)) \leq 4. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$2k(G) \leq k(T(G)) \leq 4.$$

Совокупность утверждения случаев 1 и 2 завершает доказательство теоремы.

4. Целостность тотальных графов, связанная с некоторыми их характеристиками. В этом разделе мы приводим теоремы о целостности тотальных графов, которые соотносят друг с другом их связности, числа покрытия, индексы независимости и доминирования.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть G – связный граф и пусть $\alpha(G) = 1$; тогда $I(T(G)) = n + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha(G) = 1$, то G представляет собой звезду $S_{1,n}$ с $n + 1$ вершинами. Кроме того, в графе $T(G)$ есть остовная звезда. Возможны три случая.

Случай 1. Пусть удаляемое множество S – минимальное покрывающее множество вершин графа $T(G)$. Тогда $m(T(G) - S) = 1$. Поэтому $I(T(G)) = \alpha(G) + 1$. Из теоремы 3.4 вытекает, что $\alpha(T(G)) = n + 1$. Поэтому $I(T(G)) = n + 2$.

Случай 2. Пусть S состоит из минимального покрывающего подмножества графа $T(G)$ и некоторых других вершин. Тогда $|S| \geq \alpha(T(G)) + 1$. Поэтому $m(T(G) - S) = 1$. Таким образом, $\min\{|S| + m(T(G) - S)\} \geq n + 3$.

Случай 3. Пусть S является собственным подмножеством минимального покрывающего множества графа $T(G)$. Тогда $|S| < \alpha(T(G))$. Одна из вершин минимального покрывающего множества графа $T(G)$ образует минимальное покрывающее множество звезды. Если мы удалим эту вершину из графа $T(G)$, то получим полный граф, в котором каждая вершина соединена с каждой. Поэтому $|S| < \alpha(T(G)) - p$, $p = 1, 2, \dots, \alpha(T(G)) - 1$ и $m(T(G) - S) = 2p$. Значит,

$$I(T(G)) = \min\{|S| + m(T(G) - S)\} = \min\{n + 1 + p\} = n + 1 + p.$$

В силу неравенства $1 \leq p \leq \alpha(T(G)) - 1$ имеем $I(T(G)) \geq n + 2$. Воспользовавшись результатами случаев 1–3, получаем

$$I(T(G)) = \min\{n + 2, n + 3, n + 2\} = n + 2.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть G – связный граф с n вершинами ($n > 4$); тогда

$$\beta(T(G)) + k(T(G)) \leq I(T(G)) \leq \alpha(T(G)) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим два случая.

Случай 1. Если множество удаляемых вершин S – максимальное независимое подмножество в $T(G)$, то после удаления получаем $m(T(G) - S) \geq k(G)$. Поэтому

$$I(T(G)) = \min\{|S| + m(T(G) - S)\} \geq \min\{\beta(T(G)) + k(T(G))\} \geq \beta(T(G)) + k(T(G))$$

и

$$I(T(G)) \geq \beta(T(G)) + k(T(G)).$$

Случай 2. Если мы хотим, чтобы максимальные компоненты имели порядок один, то число удаляемых вершин не меньше $|S| \leq \alpha(T(G))$. Поэтому

$$I(T(G)) = \min\{|S| + m(T(G) - S)\} \leq \min\{\alpha(T(G)) + 1\} \leq \alpha(T(G)) + 1.$$

В силу результатов случаев 1 и 2 имеем

$$\beta(T(G)) + k(T(G)) \leq I(T(G)) \leq \alpha(T(G)) + 1.$$

ТЕОРЕМА 4.3. Если T – дерево с n вершинами и $\alpha(T) = 2$, то $\alpha(T(T)) \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T – дерево с n вершинами и $\alpha(T) = 2$, то число ребер в T равно $n - 1$. Поэтому в тотальном графе $T(T)$ имеется $2n - 1$ вершин.

Минимальное покрывающее подмножество тотального графа является объединением минимального покрывающего подмножества вершин графа T и вершин, отвечающих его ребрам. Однако одна из вершин в $T(T)$, соответствующая ребру в T , примыкает к двум вершинам из минимального покрывающего подмножества графа T и, значит, не принадлежит минимальному покрывающему множеству графа $T(T)$. Поэтому

$$\alpha(T(T)) \geq \alpha(T) + E(T) - 1 \geq 2 + n - 1 - 1 \geq n.$$

ТЕОРЕМА 4.4. Если T – дерево с n вершинами и $\alpha(T) = 2$, то $I(T(T)) = n + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вершины v графа G ее замкнутая окрестность определяется как объединение $\{v \cup N(v)\}$, где через $N(v)$ обозначено множество вершин, примыкающих к v . Если множество удаляемых вершин S является минимальным покрывающим множеством дерева T , то $|S| = \alpha(T) = 2$ и $m(T - S) = 1$. Поэтому $\{S \cup N(S)\} = V(T)$. Все вершины графа $T(T)$ примыкают к вершинам из минимального покрывающего множества дерева T . Кроме того, каждая из вершин графа T примыкает по крайней мере к одной из вершин графа $T(T)$. Если $\alpha(T) = 2$, то имеет место один из двух случаев.

Случай 1. Пусть множество удаляемых вершин S графа $T(T)$ является его минимальным покрытием. Тогда $m(T(T) - S) = 1$. Поэтому

$$I(T(T)) = \min\{|S| + m(T(T) - S)\} = \min\{\alpha(T(T)) + 1\}.$$

Из теоремы 4.3 вытекает, что $I(T(T)) \geq \min\{n + 1\} = n + 1$.

Случай 2. Пусть S является собственным подмножеством в минимальном покрытии графа $T(G)$. Тогда $|S| < \alpha(T(T))$, т.е. $|S| = \alpha(T(T)) - p$, $p = 1, 2, \dots, \alpha(T(T)) - 1$. Поэтому $m(T(T) - S) \geq p + 2$, откуда

$$\begin{aligned} I(T(T)) &= \min\{|S| + m(T(T) - S)\} \geq \min\{\alpha(T(T)) - p + p + 2\} \\ &= \min\{\alpha(T(T)) + 2\}. \end{aligned}$$

Из теоремы 4.3 вытекает, что $I(T(T)) \geq \min\{n + 2\} = n + 2$.

Результаты случаев 1 и 2 дают $I(T(T)) = \{n + 1, n + 2\} = n + 1$.

ТЕОРЕМА 4.5. Для всех регулярных графов, если $\sigma(G) = \beta(G)$, $\alpha(G) = k(G)$, то

$$I(G) \geq k(T(G)) + \sigma(T(G)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф G называется *регулярным степени r* (или *r -регулярным*), если степень каждой его вершины равна r . Для таких графов $\delta(G) = \Delta(G) = k(G) = r$. В частности, если G регулярный и $\sigma(G) = \beta(G)$, $\alpha(G) = k(G)$, то из результата 2.7 вытекает, что

$$I(G) = k(G) + 1 = r + 1.$$

Тотальный граф графа, обладающего таким свойством, также является регулярным. Поэтому

$$\delta(T(G)) = \Delta(T(G)) = k(T(G)) = 2r.$$

Для такого тотального графа $\sigma(T(G)) = \beta(T(G))$ и $k(T(G)) \neq \alpha(T(G))$. Пусть $S - I$ -множество графа $T(G)$. В силу результата 2.8 имеем $|S| \geq k(T(G))$ и $m(T(G) - S) \geq (T(G))$. Поэтому

$$\begin{aligned} I(T(G)) &= \min\{|S| + m(T(G) - S)\} \\ &\geq \min\{k(T(G)) + (T(G))\} \geq k(T(G)) + (T(G)). \end{aligned}$$

5. Заключение. Вычисление целостности графа NP -полная задача. Однако для некоторых классов графов целостность можно записать явной формулой. В этих случаях ее можно выразить через другие характеристики графов. Тотальные графы $T(G)$ строятся по отношениям примыканий в графах.

В этой статье мы рассматриваем тотальный граф $T(G)$ графа G . Ясно, что как порядок, так и связность графа $T(G)$, больше, чем у G . Мы доказываем теоремы, выражающие целостность тотального графа через некоторые его характеристики. При конструировании коммуникационных сетей с заданными характеристиками можно воспользоваться таблице 1.

ТАБЛИЦА 1. Целостность некоторых графов

Характеристики	N (число вершин в G)	Граф	$I(G)$	$I(T(G))$
$\alpha(G) = 1$	6	$S_{1,5}$	2	7
	3	P_3	2	4
$\alpha(G) = 2$ (G – дерево)	7	T_7	3	8
	5	P_5	3	6
$\sigma(G) = \beta(G)$ и $\alpha(G) = k(G)$	4	K_4	4	9
		C_4	3	6

Из этой таблицы видно, что целостность тотальных графов превышает целостность всех остальных, что и позволяет нам предпочесть тотальные графы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kumar V., Grama A., Gupta A., Karpis G. Introduction To Parallel Computing. California: The Benjamin Cummings Publ., 1995.
- [2] Lesniak L., Chartrand G. Graphs and Digraphs. California: Wadsworth & Brooks, 1986.
- [3] Cozzens M. B., Wu S. Y. Edge neighbor-integrity of trees // Austral. J. Combinatorics. 1994. V. 10. P. 163–174.
- [4] Cozzens M. B., Yu. S. Y. Vertex neighbor-integrity of trees // Ars. Combinatorial. 1996. V. 43. P. 169–180.
- [5] Chvatal V. Tough graphs and Hamiltonian circuits // Discrete Math. 1973. V. 5. P. 215–218.
- [6] Dündar P. The tenacity of hypercube graphs and its some compounds // Neural Networks World. 1999. V. 3/99. P. 225–234.
- [7] Dündar P. Stability measures of some static interconnection networks // Intern. J. Comput. Math. 2001. V. 76. № 4. P. 455–462.
- [8] Dündar P. Accessibility number and the neighbour-integrity of generalised Petersen graphs // Neural Network World. 2001. V. 2. P. 167–174.
- [9] Dündar P., Ozan A. Stability measures of torus and mesh graphs // Intern. J. Math. Algorithms. 2002 (submitted).

- [10] Dündar P., Ozan A. The neighbour-integrity of sequential joined graphs // Intern. J. Comput. Math. 2000. V. 74. P. 45–52.
- [11] Dündar P. The neighbour-integrity of Boolean graphs and its compounds // Intern. J. Comput. Math. 1999. V. 72. P. 441–447.
- [12] Dündar P. New notions in network reliability: stability numbers of sequential joined graphs // Neural Network World. 1999. V. 5. P. 403–411.
- [13] Dündar P. The stability measures of static interconnection networks and binary trees // Proceeding of the Third International Symposium on Computer Networks. İzmir, 1998. P. 240–245.
- [14] Dündar P., Ten O. A new parameter for network stability: the neighbour-tenacity // Proceedings of the 14th Intern. Symposium on Comput. and Information Sciences. Kusadasi, 1999. P. 1016–1018.
- [15] Dündar P., Öztürk N. The neighbour-integrity of recursive graphs // Proceedings of the 2nd Intern. Symposium on Math. and Computational Applications. Baku, 1999. P. 443–447.
- [16] Bagga K. S., Beineke L. W. Survey of integrity // Discrete Appl. Math. 1992. V. 37/38. P. 13–28.
- [17] Barefoot C. A., Entringer R. Vulnerability in graphs—a comparative survey // J. Combin. Math. Combin. 1989. P. 113–122.
- [18] Beinike L. W., Goddard W., Hamburger P., Kleitman D. J., Lipman M. J., Pippert R. E. The integrity of the cube is small // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1991. V. 9. P. 191–193.
- [19] Goddard W., Swart H. C. Integrity in graphs: bounds and basics // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1990. V. 7. P. 139–151.
- [20] Bagga K. S., Beineke L. W., Lipman M. J., Pippert R. E. Edge-integrity: a survey // Discrete Math. 1994. V. 124. P. 3–12.
- [21] Bagga K. S., Beineke L. W., Lipman M. J., Pippert R. E. On the edge-integrity of graphs // Congres. Numer. 1987. V. 60. P. 141–144.
- [22] Bagga K. S., Beineke L. W., Lipman M. J., Pippert R. E., Sedlmeyer R. L. A good algorithm for the computation of the edge-integrity of trees // Congres. Numer. 1988. V. 67. P. 225–232.
- [23] Harary F. Graph Theory. California: Addison-Wesley Publ., 1971.

University of Ege, Турция

E-mail: dundar@sci.ege.edu.tr, aozan@sci.ege.edu.tr

Поступило

02.04.2003