Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О тэта-характеристиках вещественной алгебраической кривой, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 403–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:07:29

УДК 513.6+517.6

О ТЭТА-ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

В. А. Краснов

Изучаются вещественные тэта-характеристики вещественной алгебраической кривой. Вычисляется число четных и число нечетных вещественных тэта-характеристик. Эти числа зависят только от топологических характеристик кривой.

Библиография: 2 названия.

Пусть X – компактная риманова поверхность рода $p > 1$, $\text{Pic } X$ – группа Пикара, т.е. группа классов эквивалентности линейных расслоений на X . Тогда определен гомоморфизм $\deg: \text{Pic } X \rightarrow \mathbb{Z}$ с помощью равенства $c_1(L) = \deg(L)[X]^*$. Положим $\text{Pic}^{(n)} = \deg^{-1}(n)$, где $n = 0, 1, \dots$. Тогда $\text{Pic}^{(n)} X$ является комплексным многообразием, биголоморфным многообразию Якоби. Если K – каноническое расслоение на X , то $K \in \text{Pic}^{(2p-2)} X$. Элемент $M \in \text{Pic}^{(p-1)} X$ называется *тэта-характеристикой* X , если $M \otimes M = K$. Множество тэта-характеристик обозначается через Σ , оно разбивается на четную и нечетную части $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$ в зависимости от четности числа $\dim H^0(X, \theta(M))$, где $M \in \Sigma$. Число четных тэта-характеристик равно $2^{p-1}(2^p + 1)$, а число нечетных – $2^{p-1}(2^p - 1)$ (см. [1], [2]). Далее предполагается, что X является вещественной алгебраической кривой, т.е. на ней определена антиголоморфная инволюция $g: X \rightarrow X$. Множество неподвижных точек этой инволюции обозначим через $X(\mathbb{R})$, а число компонент связности этого множества вещественных точек – через s . Инволюция g действует на группе Пикара, причем $\deg(g(L)) = \deg(L)$, поэтому она действует на $\text{Pic}^{(n)} X$. Так как $g(K) = K$, то g действует на Σ , причем $g(\Sigma_{\pm}) = \Sigma_{\pm}$. Неподвижные точки инволюции $g: \Sigma_{\pm} \rightarrow \Sigma_{\pm}$ будем называть *вещественными тэта-характеристиками*, множества которых обозначим через $\Sigma(\mathbb{R})_{\pm}$. Число точек в $\Sigma(\mathbb{R})_{\pm}$ будем обозначать через $|\Sigma(\mathbb{R})_{\pm}|$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА. *Имеют место утверждения:*

1) *если множество $X(\mathbb{R})$ разбивает X , то*

$$|\Sigma(\mathbb{R})_+| = 2^{p-1}(2^{s-1} + 1), \quad |\Sigma(\mathbb{R})_-| = 2^{p-1}(2^{s-1} - 1);$$

2) *если $s > 0$, но $X(\mathbb{R})$ не разбивает X , то*

$$|\Sigma(\mathbb{R})_+| = |\Sigma(\mathbb{R})_-| = 2^{p+s-2};$$

3) *если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и p – четное, то*

$$|\Sigma(\mathbb{R})_+| = 2^p, \quad |\Sigma(\mathbb{R})_-| = 0;$$

4) если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и p – нечетное, то

$$|\Sigma(\mathbb{R})_+| = 3 \cdot 2^{p-1}, \quad |\Sigma(\mathbb{R})_-| = 2^{p-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы приведем общие замечания о множестве тэта-характеристик (см. подробности в [1], [2]). На множестве Σ канонически определена структура аффинного пространства с подлежащим линейным пространством $H^1(X, \mathbb{F}_2)$. Действительно, группа элементов второго порядка ${}_2\text{Pic } X$ группы Пикара равна группе $H^1(X, \mu_2) = H^1(X, \mathbb{F}_2)$, поэтому для двух точек $M_1, M_2 \in \Sigma$ определен вектор $\overline{M_1 M_2} \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$, если положить

$$\overline{M_1 M_2} = M_2 \otimes M_1^{-1} \in {}_2\text{Pic } X.$$

Наоборот, если $a \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$ и $L_a \in {}_2\text{Pic } X$ – соответствующий элемент, то определен параллельный перенос на вектор a по правилу: $M \mapsto M \otimes L_a$. Напомним теперь, как выбор симплектического базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$ группы $H_1(X, \mathbb{Z})$ определяет четную тэта-характеристику $M_{(\alpha, \beta)}$. Возьмем базис голоморфных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_p$ на X такой, что

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, p,$$

и положим

$$\Omega_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Тогда матрица $\Omega = (\Omega_{ij})$ будет симметричной, причем ее мнимая часть положительно определена. Следовательно, можно рассмотреть на $\mathbb{C}^p$ тэта-функцию Римана

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \exp\{\pi i {}^t n \Omega n + 2\pi i {}^t n z\},$$

где векторы $n \in \mathbb{Z}^p$, $z \in \mathbb{C}^p$ записаны в виде столбцов. Благодаря квазипериодичности $\theta(z, \Omega)$ относительно сдвигов на векторы из решетки $\mathbb{Z}^p + \Omega \mathbb{Z}^p \subset \mathbb{C}^p$ уравнение $\theta(z, \Omega) = 0$ определяет гиперповерхность $\Theta_{(\alpha, \beta)}$ на многообразии Якоби

$$\text{Pic}^{(0)} X = \text{Jac } X = \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p + \Omega \mathbb{Z}^p.$$

С другой стороны, на многообразии $\text{Pic}^{(p-1)} X$ внутренним образом определена гиперповерхность Θ как множество точек $L \in \text{Pic}^{(p-1)} X$ таких, что $\dim H^0(X, \mathcal{O}(L)) > 0$. Тэта-дивизоры $\Theta_{(\alpha, \beta)}$, Θ связаны между собой следующим образом. Существует единственная четная тэта-характеристика $M_{(\alpha, \beta)}$ такая, что $\Theta = \Theta_{(\alpha, \beta)} \otimes M_{(\alpha, \beta)}$. После этих общих замечаний перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Сначала мы покажем, что при специальном выборе базиса (α, β) точка $M_{(\alpha, \beta)}$ будет вещественной. Выбор специального базиса производится следующим образом. В случае, когда $X(\mathbb{R})$ разбивает X , существует базис (α, β) такой, что матрица отображения $g: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $k = (p - s + 1)/2$, I_{s-1}, I_k – единичные матрицы размера $(s - 1) \times (s - 1)$ и $k \times k$ соответственно. В случае, когда $s > 0$, но $X(\mathbb{R})$ не разбивает X , существует базис (α, β) такой, что матрица отображения $g: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $k = (p - s)/2$. В случае, когда $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и p – четное, существует базис (α, β) такой, что соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 & 0 \\ I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_k \\ 0 & 0 & -I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $k = p/2$. В случае, когда $X(\mathbb{R}) = \emptyset$ и p – нечетное, существует базис (α, β) такой, что соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $k = (p - 1)/2$. Все матрицы (1)–(4) имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix},$$

где A, B – соответствующие каждому случаю матрицы размера $p \times p$, а отображение $g: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ в специальном симплектическом базисе (α, β) имеет вид

$$g \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Существование соответствующего специального базиса (α, β) в каждом случае проверяется с помощью топологического рассмотрения инволюции $g: X \rightarrow X$; подробности этого рассмотрения мы опускаем. Тогда действие инволюции g на якобиане $\text{Jac } X = \mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^p + \Omega \mathbb{Z}^p$ описывается следующим образом. Векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ мы отождествляем с единичными векторами в $\mathbb{C}^p$, а векторам $\beta_1, \dots, \beta_p$ соответствуют столбцы матрицы Ω . Тогда из равенства (5) и антилинейности действия g на $\mathbb{C}^p$ вытекает, что

$$g(z) = {}^t[A + B\Omega] \cdot \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}^p,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Отсюда получаем, что

$$\overline{\theta(g(z), \Omega)} = \theta({}^t[-A + B\Omega'] \cdot z, \Omega'), \quad (6)$$

где $\Omega' = -\overline{\Omega}$. Рассмотрим теперь новый симплектический базис (α', β') такой, что $\alpha' = g(\alpha)$, $\beta' = -g(\beta)$. Тогда из равенства $\beta = \Omega\alpha$ получаем $\beta' = \Omega'\alpha'$, т.е. матрица Ω' является матрицей периодов в базисе (α', β') . Матрица перехода от базиса (α', β') к базису (α, β) равна

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (7)$$

поэтому $\Omega = (B + A\Omega')(A - B\Omega')^{-1}$. Матрица (7) во всех четырех случаях принадлежит подгруппе $\Gamma_{1,2}$ группы $\mathrm{Sp}(2p, \mathbb{Z})$, поэтому можно применить функциональное уравнение (см. [2]). Так как матрицы A, B, Ω' симметричные, имеем равенства

$$\begin{aligned} \theta(\iota[-A + B\Omega'] \cdot z, \Omega') &= h(z) \cdot \theta([A - B\Omega']^{-1} \cdot \iota[-A + B\Omega'] \cdot z, \Omega) \\ &= h(z) \cdot \theta(-z, \Omega) = h(z) \cdot \theta(z, \Omega), \end{aligned}$$

где $h(z) \neq 0$. Тогда из равенства (6) получаем, что множество нулей функции $\overline{\theta(g(z), \Omega)}$ совпадает с множеством нулей функции $\theta(z, \Omega)$. Следовательно, выполняется равенство $g(\Theta_{(\alpha, \beta)}) = \Theta_{(\alpha, \beta)}$. Так как $g(\Theta) = \Theta$, из этих равенств вытекает, что $M_{(\alpha, \beta)}$ — вещественная точка Σ ; обозначим ее через M_0 . Тогда тэта-характеристика $M \in \Sigma$ будет вещественной, если и только если вектор $\overline{M_0 M} \in H^1(X, \mathbb{F}_2)$ вещественный. Запишем это условие через координаты. Пусть $\alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*, \beta_1^*, \dots, \beta_p^*$ — двойственный по Пуанкаре базис $H^1(X, \mathbb{Z})$. Тогда имеем разложение

$$\overline{M_0 M} = \sum_{i=1}^p \delta_i \alpha_i^* + \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \beta_i^*,$$

где $\delta_i, \varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Вектор $\overline{M_0 M}$ будет вещественным, если и только если выполняется сравнение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \pmod{2}. \quad (8)$$

Напомним теперь, что тэта-характеристика $M \in \Sigma$ будет четной тогда и только тогда, когда выполняется условие (см. [1], [2])

$$\sum_{i=1}^p \delta_i \varepsilon_i = {}^t\delta \cdot \varepsilon \equiv 0 \pmod{2}. \quad (9)$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, остается найти число решений сравнения (8), а также число решений системы сравнений (8), (9). Первое число равно $|\Sigma(\mathbb{R})|$, а второе — $|\Sigma(\mathbb{R})_+|$. Соответствующие вычисления мы опускаем. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Возьмем в качестве X плоскую кривую степени 4. Тогда нечетные тэта-характеристики X соответствуют бикасательным к кривой X (см. [1]). Таким образом, теорема дает число вещественных бикасательных к кривой. Например, для M -кривой ($s = 4$) их будет 28, но некоторые из них могут иметь комплексно-сопряженные точки касания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984.
- [2] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.