Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Малыхин, О подпространствах секвенциальных пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 407–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:35:52

УДК 513.83

О ПОДПРОСТРАНСТВАХ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В. И. Мальных

Доказано, что пространство непрерывных на обычном отрезке функций в топологии поточечной сходимости не субсеквенциально. В секвенциальных пространствах, удовлетворяющих определенным условиям, найдены плотные в себе подпространства без сходящихся последовательностей; такие подпространства найдены в некоторых секвенциальных компактах и полутопологических группах.

Библиография: 6 названий.

0. Введение. Подпространство секвенциального пространства называется *субсеквенциальным*. В данной заметке даются ответы на два вопроса, относящихся к этому классу пространств.

ВОПРОС 1 (А.В. Архангельский). Субсеквенциально ли $C_p(I)$ – пространство непрерывных на отрезке $I = [0, 1]$ функций в топологии поточечной сходимости?

Ответ отрицателен, приводится пример не субсеквенциального подпространства пространства $C_p(I)$.

ВОПРОС 2 (Фольклор?). Должна ли быть сходящаяся последовательность в плотном в себе субсеквенциальном пространстве?

Вопрос интересен тем, что в самом секвенциальном пространстве (если оно не дискретно) сходящихся последовательностей всегда много, их достаточно для определения топологии пространства. (Одна из первых работ по секвенциальным пространствам (С.П. Франклин, 1965) так и названа (в переводе на русский) “Пространства, в которых последовательностей достаточно”.)

Ответ и на этот вопрос отрицателен – доказывается теорема о наличии в секвенциальном пространстве, удовлетворяющем определенным условиям, плотного в себе подпространства без сходящихся последовательностей; приводятся соответствующие примеры.

Напомним определение *секвенциального пространства* – это пространство, в котором множество замкнуто, если и только если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей. В теоретико-множественной топологии это один из важнейших классов пространств. Важное место этот класс занимает и в приложениях, например, в теории функциональных пространств.

Субсеквенциальность, очевидно, наследуется подпространствами.

Приведем два важных свойства субсеквенциальных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X субсеквенциально, $A \subset X$ и $a \in \overline{A} \setminus A$. Тогда a имеет счетную π -сеть из бесконечных подмножеств A , т.е. имеется счетное семейство бесконечных подмножеств A такое, что любая окрестность a содержит некоторый элемент этого семейства.

В сущности, это утверждение доказано Е. Г. Пыткеевым в [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Хаусдорфово секвенциальное пространство и его подпространства имеют следующий вид тесноты: если $a \in \overline{A}$, то существует счетное $B \subset A$, $a \in \overline{B}$ и точки B разделяются дизъюнктивной системой окрестностей.

Доказательство этого предложения проходит стандартным образом по трансфинитной индукции (по индексу секвенциальности) и потому опускается.

1. Несубсеквенциальное подпространство $C_p(I)$. Рассмотрим следующее пространство Z , рассмотренное в [2]. Пусть $\{M_k : k \in \omega\}$ – дизъюнктивное семейство конечных множеств, $\sup\{|M_k| : k \in \omega\} = \infty$. Пусть $M = \bigcup\{M_k : k \in \omega\}$, $* \notin M$ и $Z = \{*\} \cup M$. Пусть все точки M изолированные, а типичная окрестность точки $*$ есть $\{*\} \cup (M \setminus L)$, где $|L \cap M_k| \leq t$ для всякого $k \in \omega$, а t одно и то же для всех $k \in \omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Точка $*$ не имеет счетной π -сети из бесконечных подмножеств M . Следовательно, пространство Z не субсеквенциально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{A_i : i \in \omega\}$ – какое-нибудь семейство бесконечных подмножеств M . По индукции для всякого $k \in \omega$ найдем точку $x_k \in A_k \cap M_{i_k}$, причем все i_k различны. Тогда $Z \setminus \{x_k : k \in \omega\}$ есть окрестность точки $*$, не содержащая ни одного множества A_i . Теперь на основании предложения 1 заключаем, что Z не субсеквенциально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пространство $C_p(D^\omega)$ содержит Z как подпространство.

Для доказательства потребуется следующее утверждение.

КРИТЕРИЙ УСПЕНСКОГО (см., например, [3, с. 105]). Пусть все точки пространства Z , быть может, кроме точки $*$, изолированы в Z . Тогда подпространство $W = \{\chi_F : F \subset Z, * \notin \overline{F}\}$ пространства D^Z является объединением счетного семейства компактов в том и только том случае, если Z гомеоморфно подпространству пространства $C_p(B)$ для некоторого компакта B (χ_F – характеристическая функция подмножества F).

Заметим сразу же, что из доказательства этого критерия в нашем случае ясно, что B гомеоморфно D^ω . Осталось убедиться, что в нашем случае W есть объединение счетного семейства компактов.

Как следует из описания пространства Z , $W = \bigcup\{B_m : m \in \omega\}$, где $B_m = \{\chi_F : |F \cap M_k| \leq m \text{ для всякого } k \in \omega\}$. Докажем, что B_m замкнуто в D^Z . Действительно, если $t \in D^Z \setminus B_m$, то найдется $k_0 \in \omega$ такое, что $|t^{-1}(1) \cap M_{k_0}| > m$. Однако, тогда $C = \{s \in D^Z : s^{-1}(1) \cap M_{k_0} = t^{-1}(1) \cap M_{k_0}\}$ открыто и $C \cap B_m = \emptyset$. Итак, B_m замкнуто.

Приведем теперь несколько следствий.

Известно, что $C_p(B)$, где B – компакт, есть пространство Фреше–Урысона, если и только если B – разреженный компакт (см., например, [3, с. 102]). Если же B не разрежен, то он непрерывно отображается на обычный отрезок I , и тогда $C_p(I)$ есть подпространство $C_p(B)$. Так как $C_p(D^\omega) \subset C_p(I)$, из предложений 3, 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пространство $C_p(B)$ не субсеквенциально, если B – неразрезанный компакт; в частности, $C_p(I)$ не субсеквенциально.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пространство $C_p(X)$ не субсеквенциально, если X – несчетное A -множество (в сепарабельном полном метризуемом пространстве).*

Действительно, X содержит D^ω как подпространство, отсюда следует, что $C_p(D^\omega) \subset C_p(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [4] доказано, что произведение Z и веера Фреше–Урысона V_ϵ размера $\mathfrak{s}$ имеют несчетную тесноту. Следовательно, и произведение $C_p(I) \times Z$ имеет несчетную тесноту. Тем самым, повторен соответствующий результат В.В. Успенского [5].

2. Нахождение подпространств без сходящихся последовательностей. Основным инструментом в работе с такими подпространствами является понятие секвенциальной окрестности.

Все рассматриваемые последовательности предполагаются бесконечными.

Пусть X – произвольное пространство. Для $A \subset X$ пусть $[A]^1 = \{x : x \text{ есть предел сходящейся последовательности точек из } A\}$.

Секвенциальной окрестностью точки x называется любое множество W такое, что $x \notin [X \setminus W]^1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть L – сходящаяся к точке последовательность, W – секвенциальная окрестность этой точки. Тогда $|L \setminus W| < \aleph_0$.*

В противном случае $L \setminus W$ есть сходящаяся к этой точке последовательность, что противоречит тому, что W – ее секвенциальная окрестность.

Кратко можно сказать, что любая секвенциальная окрестность точки почти полностью содержит любую сходящуюся к этой точке последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *К точке сходится какая-нибудь последовательность, если и только если само это одноточечное множество не есть секвенциальная окрестность точки.*

Действительно, если есть сходящаяся к этой точке последовательность, то почти вся эта последовательность содержится в любой секвенциальной окрестности; следовательно, любая секвенциальная окрестность бесконечна. Если же нет сходящихся последовательностей к точке x , то множество $\{x\}$ есть секвенциальная окрестность точки x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Секвенциальные окрестности точки в подпространстве – пересечения с этим подпространством секвенциальных окрестностей этой точки во всем пространстве.*

Просто проверяется.

Из этих предложений вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть $Y \subset X$. В Y нет сходящихся последовательностей, если и только если для всякой точки $y \in Y$ найдется ее секвенциальная окрестность W в X такая, что $W \cap Y = \{y\}$.*

Это предложение и дает способ нахождения и построения подпространств секвенциальных пространств без сходящихся последовательностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Предположим, что у всякой точки x :*

- (*) *есть секвенциальная окрестность W такая, что существует дизъюнктное семейство $\mathcal{V}$ окрестностей точек некоторого множества M , так что $x \in \overline{M}$, но $(\cup \mathcal{V}) \cap W = \emptyset$.*

Тогда существует плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – произвольная точка. Тогда существуют секвенциальная окрестность W_x , множество M_x , точки которого имеют дизъюнктное семейство открытых окрестностей $\mathcal{V}_x = \{V_y : y \in M_x, V_y \ni x\}$, так что $x \in \overline{M_x}$, но $(\cup \mathcal{V}_x) \cap W_x = \emptyset$. Назовем точку x *точкой уровня 0* и обозначим множество $\{x\}$ через K_0 . Назовем точки множества M_x *точками уровня 1* и обозначим множество M_x через K_1 .

Далее, для всякой $y \in K_1$ существуют своя секвенциальная окрестность W_y , множество M_y и семейство $\mathcal{V}_y$ (см. выше). Можно считать, $W_y \cup M_y \cup (\cup \mathcal{V}_y) \subset V_y$. Назовем точки множества $\cup \{M_y : y \in K_1\}$ *точками уровня 2* и обозначим это множество через K_2 ; и т.д. После завершения описываемого индуктивного процесса по всем натуральным числам получим для всякого $i \in \omega$ множество K_i точек уровня i . Пусть N – такое бесконечное подмножество ω , что если $i \in N$, то $i - 1 \notin N$. Пусть теперь $Y = \cup \{K_i : i \in N\}$. Докажем, что Y – искомое подпространство. Так как множество точек какого-нибудь уровня содержит в своем замыкании все точки меньших уровней, Y плотно в себе. А так как $W_y \cap Y = \{y\}$ для всякой точки $y \in Y$, в Y нет сходящихся последовательностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Предположим, что каждая точка хаусдорфова секвенциального пространства лежит на границе некоторой своей замкнутой секвенциальной окрестности. Тогда существует плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что выполняется условие (*) из предложения 9. В самом деле, пусть x – произвольная точка. Тогда $x \in \overline{X \setminus W}$ для некоторой замкнутой секвенциальной окрестности W . Следовательно, на основании предложения 2 существует счетное $B \subset X \setminus W$, $x \in \overline{B}$ и точки B разделяются дизъюнктной системой открытых окрестностей $\mathcal{V}$. Так как $B \cap W = \emptyset$, а W замкнуто, можно считать, что $(\cup \mathcal{V}) \cap W = \emptyset$.

Заметим теперь, что выполнение условия (*) для точки регулярного секвенциального пространства в точности означает, что это – не точка Фреше–Урысона. Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если в регулярном секвенциальном пространстве каждая точка не есть точка Фреше–Урысона, то в нем существует плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.*

ТЕОРЕМА 2. *В однородном регулярном секвенциальном не Фреше–Урысона пространстве существует плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.*

Таково, например, пространство свободной группы бесконечного метризуемого компакта.

Обратимся теперь к подпространствам компактов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $Z = \{*\} \cup \omega$ – счетное бесконечное пространство без сходящихся последовательностей и с одной неизолированной точкой $*$. Тогда Z^ω содержит плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в Z^ω подпространство X , состоящее из точек, все координаты которых, кроме конечного числа, есть $*$ (так называемое σ -произведение с центром в точке $\bar{*} = (*, *, \dots)$). Пусть x – произвольная точка X . Тогда $x(n) = *$ для некоторого $n \in \omega$. Напомним, что $Z = \{*\} \cup \omega$. Для всякого $i \in \omega$ пусть $V_i = \{z \in Z^\omega : z(n) = i\}$ и y_i – точка из V_i , на всех остальных (кроме n) координатах совпадающая с x . Нетрудно проверить, что для (произвольной) точки $x \in X$ условие $(*)$ из предложения 9 выполнено (множество V_i есть дизъюнктные окрестности точек y_i , $X \setminus \{V_i : i \in \omega\}$ есть замкнутая секвенциальная окрестность точки x). Следовательно, согласно предложению 9 X содержит плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.

Напомним далее, что счетное произведение секвенциальных компактов секвенциально. Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 3. Произведение счетного бесконечного числа секвенциальных не Фреше–Урысона компактов содержит плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.

Действительно, каждый из сомножителей имеет подпространство, гомеоморфное пространству Z из предложения 11.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует плотное в себе пространство без сходящихся последовательностей, являющееся плотным подпространством некоторого секвенциального компакта.

Это пространство найдем, используя теорему 3. Возьмем какой-нибудь компакт Франклина F . Это секвенциальный не Фреше–Урысона компакт. Согласно теореме 3 в F^ω есть плотное в себе подпространство Y без сходящихся последовательностей. Замыкание Y в F^ω есть искомым секвенциальный компакт.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот секвенциальный компакт представляет собой секвенциальный компакт нового типа. Ранее не было примера секвенциального компакта без изолированных точек и с плотным множеством, в котором нет сходящихся последовательностей.

3. Построение секвенциальных пространств, содержащих плотные в себе подпространства без сходящихся последовательностей. Если в предыдущей части заметки мы находили плотные в себе и без сходящихся последовательностей подпространства уже известных пространств, то в этой части построим секвенциальные пространства, в которых есть плотные в себе подпространства без сходящихся последовательностей.

“Проколотой” секвенциальной окрестностью точки назовем секвенциальную окрестность этой точки, из которой сама точка удалена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть у точек пространства X существует дизъюнктное семейство “проколотых” секвенциальных окрестностей $\{W_x : x \in X, W_x \ni x\}$. Тогда существует плотное в себе подпространство без сходящихся последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – произвольная точка пространства. Положим $K_0 = \{x\}$. Если множество K_n уже определено, то положим $K_{n+1} = \cup\{W_x : x \in K_n\}$. Построенные множества K_n дизъюнкты. Кроме того, $K_n \subset \overline{K_{n+1}}$ для любого $n \in \omega$. Пусть $Y = \cup\{K_{2n} : n \in \omega\}$. Тогда Y плотно в себе. А поскольку $W_y \cap Y = \emptyset$ для любого $y \in Y$, в Y нет сходящихся последовательностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть y точек счетного пространства существует дизъюнктное семейство “проколотых” секвенциальных окрестностей. Тогда существует плотное подпространство без сходящихся последовательностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заномеруем точки пространства $\{x_n : n \in \omega\}$. Несколько усложним определение множеств K_n из предыдущего доказательства. Именно, на шаге $n + 1$, если x_{n+1} принадлежит множеству $\cup\{K_i : i \leq n\}$, то K_{n+1} оставим прежним, а если не принадлежит, то включим x_{n+1} в K_{n+1} . Далее можно убедиться, что Y плотно во всем пространстве.

Построим, наконец, весьма “хорошее” секвенциальное пространство, распадающееся в сумму двух плотных тоже “хороших” подпространств без сходящихся последовательностей каждое.

Пусть Ω – семейство конечных подмножеств какого-нибудь счетного бесконечного множества ω . Групповой операцией “+” в Ω будет операция симметрической разности. С этой операцией Ω есть булева группа, т.е. группа с элементами только второго порядка. Такая группа абелева. Нуль этой группы есть пустое множество.

Пусть $\mathcal{F}$ – фильтр кофинитных подмножеств ω . Он определяет на Ω топологию τ следующим образом: $V \in \tau$, если и только если для каждого $x \in V$ найдется $F \in \mathcal{F}$ такое, что $F + x \subset V$.

Заметим для дальнейшего, что для каждой точки x семейство ее секвенциальных окрестностей в (Ω, τ) есть семейство $\{F + x : F \in \mathcal{F}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. (Ω, τ) есть полутопологическая группа, пространство которой регулярно и секвенциально.

Доказательство этого предложения не имеет отношения к теме заметки и опускается. Напомним только, что полутопологическая группа – это группа с топологией, относительно которой все сдвиги и взятие обратного элемента есть гомеоморфизмы. Следовательно, как топологическое пространство оно в высшей степени однородно.

Пусть $Z = \{x \in \Omega : |x| \text{ четно}\}$. Тогда Z – подгруппа Ω , плотная в ней. Взаимоотношения группы Ω , ее подгруппы Z суммирует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. С топологией подпространства из (Ω, τ) Z есть полутопологическая группа, пространство которой не содержит сходящихся последовательностей (но, подчеркнем, субсеквенциально).

Сходящихся последовательностей нет потому, что для всякой точки $x \in Z$ найдется элемент F фильтра $\mathcal{F}$ такой, что $(F + x) \cap Z = \{x\}$.

Пространство (Ω, τ) интересно еще и тем, что оно есть пространство со слабой первой аксиомой счетности. Слабая первая аксиома счетности – это некоторое усиление секвенциальности.

Подытожим сказанное следующим утверждением.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Существует счетная полутопологическая группа, пространство которой регулярно и со слабой первой аксиомой счетности; в этой группе есть плотная подгруппа, также являющаяся полутопологической группой; пространство этой подгруппы регулярно, субсеквенциально и не имеет сходящихся последовательностей (и не имеет слабой первой аксиомы счетности).*

Отметим, что дополнение $\Omega \setminus Z$ также плотно в Ω и не имеет сходящихся последовательностей.

Напомним, что группа со слабой первой аксиомой счетности метризуема [6].

Мы не можем получить больше, чем следствие 4, ибо справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Подгруппа секвенциальной группы или дискретна (и, значит, замкнута и секвенциальна), или содержит сходящуюся последовательность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подгруппа не дискретна, то она замкнута или нет. Если она замкнута, то она секвенциальна и, поскольку не дискретна, то содержит сходящуюся последовательность. Если не замкнута, то из нее к некоторой точке дополнения сходится последовательность $\{x_i : i \in \omega\}$. Но тогда $\{x_i x_{i+1}^{-1} : i \in \omega\}$ есть последовательность, лежащая в рассматриваемой подгруппе и сходящаяся к единице группы.

ВОПРОС АВТОРА. Должна ли быть секвенциальной подгруппа секвенциальной группы?

О. В. Сипачёва изящно ответила отрицательно следующим образом.

Пусть K – какой-нибудь секвенциальный не Фреше–Урысона компакт (например, компакт Франклина – см. выше). В таком компакте есть несеквенциальное подпространство; обозначим его X . Свободная группа $F(K)$ компакта K секвенциальна. Докажем, что подгруппа $\tilde{X} \subset F(K)$, порожденная X , несеквенциальна. Действительно, эта подгруппа замкнуто содержит несеквенциальное подпространство X и, значит, сама несеквенциальна.

Автор благодарен участникам семинара А. В. Архангельского в Московском университете за полезное обсуждение данной заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пыткеев Е. Г. О максимальной разложимости пространств // Тр. МИАН. 1983. Т. 154. С. 209–213.
- [2] Malykhin V. I., Tironi G. Weakly FU-spaces // Quaderni Matematica, II Serie. Univ. di Trieste 1996. V. 386. P. 1–9.
- [3] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [4] Bella A., Malykhin V. I. Around tight point // Topology Appl. 1997. V. 20. P. 1–8.
- [5] Успенский В. В. О спектре частот функциональных пространств // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 1. С. 31–35.
- [6] Недев С., Чобан М. М. О метризуемости топологических групп // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1968. № 6. С. 18–20.