Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Функции класса Шенберга $\mathcal{S}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры. II, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 423–430

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:46:46

УДК 517

ФУНКЦИИ КЛАССА ШЕНБЕРГА $\mathcal{T}$ ДЕЙСТВУЮТ В КОНУСЕ ДИССИПАТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ. II

А. Р. Миротин

Развивается функциональное исчисление от нескольких коммутирующих диссипативных элементов комплексной банаховой алгебры с единицей, основы которого заложены в предшествующей работе автора. Устанавливаются теоремы единственности, непрерывности и устойчивости исчисления, теоремы о сложной функции и формула для резольвенты. Указаны применения к теории секториальных операторов в гильбертовом пространстве.

Библиография: 6 названий.

В [1] заложены основы n -мерного функционального исчисления диссипативных элементов комплексной банаховой алгебры A с единицей 1 , использующего класс функций $\mathcal{T}_n$. Данная работа посвящена развитию этого исчисления. В ней устанавливаются теоремы о сложной функции, о единственности, непрерывности и устойчивости исчисления, а также дается формула, выражающая резольвенту функции от элементов алгебры через резольвенты самих этих элементов. В заключение показано, что рассматриваемое исчисление позволяет строить секториальные операторы в гильбертовом пространстве из диссипативных. Отсюда следует, что функции класса $\mathcal{T}_n$ действуют и в конусах секториальных операторов. Терминология и обозначения из [1], если не оговорено противное, сохраняются и в ряде случаев будут использоваться без дополнительных пояснений. Напомним, что класс $\mathcal{T}_n$ состоит из функций $\psi: (-\infty, 0)^n \rightarrow (-\infty, 0)$ класса C^∞ , все частные производные которых неотрицательны, и, очевидно, является конусом относительно обычных операций сложения функций и умножения на скаляр. Каждая функция $\psi \in \mathcal{T}_n$ имеет единственное интегральное представление

$$\psi(x) = c_0 + c_1 x + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{u \cdot x} - 1) d\mu(u), \quad x \in (-\infty, 0)^n, \quad (1)$$

где $c_0 \leq 0$, $c_1 \in \mathbb{R}_+^n$, μ – положительная мера, $u \cdot x = \sum_{i=1}^n u_i x_i$. Диссипативность элемента b из A означает, что $\|e^{tb}\| \leq 1$ при $t \geq 0$. Конус всех диссипативных элементов алгебры A будем обозначать через $\text{Diss}(A)$.

Если $a = (a_1, \dots, a_n)$ есть набор попарно коммутирующих элементов из $\text{Diss}(A)$, то формула

$$\psi(a) = c_0 1 + c_1 a + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{u \cdot a} - 1) d\mu(u) \quad (2)$$

корректно определяет элемент из $\text{Diss}(A)$. Возникающее при этом функциональное исчисление будем называть $\mathcal{T}_n$ -исчислением.

1. Пусть h – ограниченная абсолютно монотонная функция на $(-\infty, 0)^n$ с интегральным представлением

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot x} d\nu(u), \quad (3)$$

где ν – ограниченная положительная мера. Положим

$$h(a) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot a} d\nu(u), \quad (4)$$

причем это функциональное исчисление согласовано с голоморфным [2]. Отметим также, что для абсолютно монотонной функции f на $(-\infty, 0)$ и $\psi \in \mathcal{T}_n$ композиция $f \circ \psi$ абсолютно монотонна на $(-\infty, 0)^n$ [1]. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему о сложной функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$, f абсолютно монотонна и ограничена на $(-\infty, 0)$, $h = f \circ \psi$. Тогда для любого набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ коммутирующих элементов из $\text{Diss}(A)$

$$h(a) = f(\psi(a)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varepsilon \in (0, +\infty)^n$ положим $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x - \varepsilon)$, $h_\varepsilon(x) = h(x - \varepsilon) = f \circ \psi_\varepsilon(x)$. Если h имеет представление (3), то очевидно, что

$$h_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot x} e^{-u \cdot \varepsilon} d\nu(u). \quad (5)$$

По формуле (5) h_ε голоморфно продолжается в область $\{\text{Re } z_j < \varepsilon_j, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}^n$. Заметим, что $\text{Sp}(\psi_\varepsilon(a)) \subset \{\text{Re } \zeta \leq \psi(-\varepsilon)\}$. В самом деле, пусть $z = s + iy$, где $s \in (-\infty, 0]^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Полагая в (2) $a = (z - \varepsilon)\mathbf{1}$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \psi_\varepsilon(z) &= \text{Re } \psi(z - \varepsilon) = c_0 + c_1(s - \varepsilon) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{u \cdot (s - \varepsilon)} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \\ &= c_0 + c_1(s - \varepsilon) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{-u \cdot \varepsilon} - 1) d\mu(u) + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} e^{-u \cdot \varepsilon} (e^{u \cdot s} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \\ &= \psi(-\varepsilon) + c_1 s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} e^{-u \cdot \varepsilon} (e^{u \cdot s} \cos(y \cdot u) - 1) d\mu(u) \leq \psi(-\varepsilon) < 0. \end{aligned}$$

Теперь по теореме об отображении спектров

$$\text{Sp}(\psi_\varepsilon(a)) = \psi_\varepsilon(\text{Sp}(a)) \subset \{\text{Re } \zeta \leq \psi(-\varepsilon)\}.$$

Поскольку f голоморфно продолжается в окрестность $\{\text{Re } \zeta < 0\}$ множества $\text{Sp}(\psi_\varepsilon(a))$ и для голоморфного функционального исчисления в поликруговой области справедлива теорема о сложной функции, имеет место $h_\varepsilon(a) = f(\psi_\varepsilon(a))$. Таким образом, если β – (ограниченная) представляющая мера для f , то в силу (5)

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot a} e^{-u \cdot \varepsilon} d\nu(u) = \int_0^\infty e^{s\psi_\varepsilon(a)} d\beta(s).$$

Но $\psi_\varepsilon(a) \rightarrow \psi(a)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ [1]; осталось применить теорему Лебега об ограниченной сходимости.

СЛЕДСТВИЕ. Для $t \geq 0$ положим $g_t(x) = e^{t\psi(x)}$. Тогда $g_t(a) = e^{t\psi(a)}$.

2. Установим несколько простых свойств отображения $\psi \mapsto \psi(a)$ и покажем, что они однозначно определяют $\mathcal{T}_n$ -исчисление. Под *сходимостью* последовательности ψ_k к ψ_0 в $\mathcal{T}_n$ будем понимать поточечную сходимость, дополненную условием $\psi_k(-0) \rightarrow \psi_0(-0)$, $k \rightarrow \infty$. Скажем, что направленность d_α элементов $\text{Diss}(A)$ *сходится* к d_0 из $\text{Diss}(A)$ в *слабом резольвентном смысле*, если направленность резольвент $(\lambda 1 - d_\alpha)^{-1}$ слабо сходится к резольвенте $(\lambda 1 - d_0)^{-1}$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Для фиксированного набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ попарно коммутирующих элементов из $\text{Diss}(A)$ имеется единственное отображение $\Phi_a: \mathcal{T}_n \rightarrow \text{Diss}(A)$ такое, что

- а) Φ_a непрерывно при наделении $\mathcal{T}_n$ и $\text{Diss}(A)$ топологиями сходимости в $\mathcal{T}_n$ и слабой резольвентной сходимости соответственно;
- б) Φ_a аддитивно и положительно однородно;
- в) $\Phi_a(-1) = -1$; $\Phi_a(x_j) = a_j$, $j = 1, \dots, n$; $\Phi_a(e^{u \cdot x} - 1) = e^{u \cdot a} - 1$, где $u \in \mathbb{R}_+^n$, $x_1, \dots, x_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Это отображение задается равенством $\Phi_a(\psi) = \psi(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства существования положим $\Phi_a(\psi) = \psi(a)$. Пусть $g_t^k(x) = e^{t\psi_k(x)}$, где $t \geq 0$, $k \geq 0$, $\psi_k \rightarrow \psi_0$ в $\mathcal{T}_n$. Функция g_t^k имеет представление

$$g_t^k(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot x} d\omega_t^k(x) = (\mathcal{L}\omega_t^k)(-x),$$

где ω_t^k – ограниченная положительная мера на $\mathbb{R}_+^n$, $\mathcal{L}$ – преобразование Лапласа, причем это равенство справедливо и при $x = 0$, если взять $g_t^k(0) := g_t^k(-0)$. Тогда очевидно, что последовательность $\mathcal{L}\omega_t^k$ сходится поточечно на $(-\infty, 0)^n \cup \{0\}$ к функции $\mathcal{L}\omega_t^0$, непрерывной в нуле. По теореме 3 из [3, с. 530] при $S = (-\infty, 0)^n \cup \{0\}$, $X = (-\infty, 0]^n$, $M = \mathbb{R}_+^n$ последовательность ω_t^k сходится к ω_t^0 узко. Из (4) следует тогда, что $g_t^k(a)$ сходится к $g_t^0(a)$ слабо, и справедливость а) следует теперь из формулы

$$(\lambda 1 - \psi_k(a))^{-1} = (\mathcal{L}g_t^k(a))(\lambda)$$

(преобразование Лапласа производится по переменной t , $\text{Re } \lambda > 0$), которая вытекает из следствия теоремы 1. Поскольку свойства б) и в) сразу следуют из (2), то существование доказано.

Для доказательства единственности предположим, что Φ_a и Φ'_a – два отображения, удовлетворяющие условиям теоремы. В силу (1) функцию ψ из $\mathcal{T}_n$ можно сколь угодно точно в смысле сходимости в $\mathcal{T}_n$ аппроксимировать суммами вида

$$\sigma(x) = c_0 + c_1 x + \sum_{l=1}^n (e^{u_l \cdot x} - 1)\alpha_l, \quad \alpha_l > 0.$$

В силу свойств б) и в) $\Phi_a(\sigma) = \Phi'_a(\sigma)$, осталось воспользоваться свойством а). Теорема доказана.

3. Следующая теорема выражает свойство устойчивости $\mathcal{T}_n$ -исчисления.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi \in \mathcal{T}_n$. Отображение $a \mapsto \psi(a)$, определенное на всевозможных наборах n коммутирующих элементов из $\text{Diss}(A)$, непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при всех $l = 1, \dots, n$ направленность диссипативных элементов a_l^α сходится к a_l , причем элементы $a_1^\alpha, \dots, a_n^\alpha$ попарно коммутируют. Тогда направленность

$$g_t(a^\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{s \cdot a^\alpha} d\omega_t(s) = e^{t\psi(a^\alpha)}$$

сходится в A к $g_t(a)$ по теореме Лебега. Производя, как и выше, преобразование Лапласа по переменной t , получаем отсюда, что при $\lambda > 0$ направленность $(\lambda 1 - \psi(a^\alpha))^{-1}$ сходится к $(\lambda 1 - \psi(a))^{-1}$, откуда сразу следует утверждение теоремы.

4. Композиция функций сохраняет принадлежность к классу $\mathcal{T} := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{T}_n$. Точнее, если $\psi_1(x) \in \mathcal{T}_n$ и $\psi_2(y) \in \mathcal{T}_m$, то, например, функция $\psi(y, x) = \psi_1(\psi_2(y), x)$ принадлежит $\mathcal{T}_{m+n-1}$ (мы полагаем $x = (x_2, \dots, x_n)$). Это проверяется непосредственно с учетом того, что утверждение 2) предложения из [1] обобщается на абсолютно монотонные функции f нескольких переменных.

ТЕОРЕМА 4. Для функций ψ_1, ψ_2 и ψ , введенных выше, и любого набора $a = (a_1, \dots, a_{m+n-1})$ попарно коммутирующих элементов из $\text{Diss}(A)$ справедливо равенство

$$\psi(a) = \psi_1(\psi_2(a_1, \dots, a_m), a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним [1], что любая функция из $\mathcal{T}_n$ голоморфно продолжается в область $\{\text{Re } z_j < 0, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}^n$. Пусть $z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^m$, причем $'z = (z_2, \dots, z_n)$, и пусть $\varepsilon \in (0, +\infty)^{m+n-1}, \varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \varepsilon'' = (\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{m+n-1})$. Тогда

$$\psi(w - \varepsilon', 'z - \varepsilon'') = \psi_1(\psi_2(w - \varepsilon'), 'z - \varepsilon''),$$

где $\text{Re } w < \varepsilon', \text{Re}('z) < \varepsilon''$ (неравенства покоординатные). Положим $a' = (a_1, \dots, a_m), a'' = (a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1})$. Тогда функция $w \mapsto \psi_2(w - \varepsilon'')$ голоморфна в окрестности $\{\text{Re } w < \varepsilon'\}$ совместного спектра $\text{Sp}(a')$ системы a' . Далее, как показано в доказательстве теоремы 1,

$$\text{Sp}(\psi_2(a' - \varepsilon'1)) \subset \{\text{Re } \zeta < \psi_2(-\varepsilon')\} \subset \{\text{Re } \zeta < 0\},$$

поэтому функция $z \mapsto \psi_1(z_1, 'z - \varepsilon'')$ голоморфна в окрестности $\{\text{Re } z_1 < 0, \text{Re}('z) < \varepsilon''\}$ совместного спектра системы $(\psi_2(a' - \varepsilon'1), a'' - \varepsilon''1)$. Поскольку $\mathcal{T}_n$ -исчисление согласовано с голоморфным функциональным исчислением (см. доказательство теоремы в [1]), по теореме о сложной функции для последнего исчисления справедливо равенство

$$\psi(a' - \varepsilon'1, a'' - \varepsilon''1) = \psi_1(\psi_2(a' - \varepsilon'1), a'' - \varepsilon''1).$$

Полагая здесь $\varepsilon \rightarrow 0$ и применяя теорему 3, получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ. Если $a \in \text{Diss}(A)$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$, то $((-a^\alpha))^\beta = (-a)^{\alpha\beta}$.

5. Выведем формулу, выражающую резольвенту элемента $\psi(a)$ через резольвенты элементов $a_1, \dots, a_n$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть для любого $\lambda > 0$ существует положительная мера τ_λ на $\mathbb{R}_+^n$ с преобразованием Стильеса

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{d\tau_\lambda(\xi)}{(\xi_1 + z_1) \cdots (\xi_n + z_n)} = \frac{1}{\lambda - \psi(-z)}, \quad \operatorname{Re} z_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Тогда при $\lambda > 0$

$$(\lambda \mathbf{1} - \psi(a))^{-1} = \int_{\mathbb{R}_+^n} (\xi \mathbf{1} - a)^{-1} d\tau_\lambda(\xi), \quad (7)$$

где $(\xi \mathbf{1} - a)^{-1} = (\xi_1 \mathbf{1} - a_1)^{-1} \cdots (\xi_n \mathbf{1} - a_n)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве теоремы 1, из (2) при $a = -z \mathbf{1}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Re} z > 0$ следует, что $\operatorname{Re} \psi(-z) \leq 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\psi(-z)} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\omega_t(u) \right) dt$$

при $\lambda > 0$, где ω_t – (положительная ограниченная) представляющая мера для абсолютно монотонной функции $x \mapsto e^{t\psi(x)}$. С другой стороны, в силу (6) и теоремы Фубини

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} e^{-\xi \cdot u} du \right) d\tau_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\omega_t(u) \right) dt. \quad (8)$$

Заметим теперь, что для любой ограниченной непрерывной функции $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{C}$ справедлива формула

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} F(u) d\omega_t(u) \right) dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} F(u) d \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \omega_t(u) dt \right) \quad (9)$$

($\omega_t(u)$ – функция распределения меры ω_t , $\lambda > 0$). В самом деле, (9) легко проверяется, когда F – простая функция. В общем же случае достаточно представить F в виде предела равномерно ограниченной п.в. сходящейся последовательности простых функций и воспользоваться теоремой Лебега, которая применима в силу неравенства $\omega_t(\mathbb{R}_+^n) = e^{t\psi(-0)} \leq 1$.

В частности, из (9) следует, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d\omega_t(u) \right) dt = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \omega_t(u) dt \right).$$

Сопоставляя последнее равенство с (8), при $\operatorname{Re} z_j > 0$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-z \cdot u} d \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \omega_t(u) dt \right),$$

откуда следует равенство для мер

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = d \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \omega_t(u) dt \right).$$

С учетом этого равенства и (9) получаем теперь в силу (4)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} (\xi \mathbf{1} - a)^{-1} d\tau_\lambda(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-u \cdot \xi} e^{u \cdot a} du \right) d\tau_\lambda(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot a} \left(\int_0^\infty e^{-u \cdot \xi} d\tau_\lambda(\xi) \right) du = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot a} d \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \omega_t(u) dt \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{u \cdot a} d\omega_t(u) \right) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\psi(a)} dt = (\lambda \mathbf{1} - \psi(a))^{-1}, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Обоснуем применение теоремы Фубини во втором из этих равенств. Полагая $z_j \downarrow 0$, $j = 1, \dots, n$, выводим из (6), что функция $\xi \mapsto 1/(\xi_1 \cdots \xi_n)$ τ_λ -интегрируема. Поскольку $\|e^{u \cdot a}\| \leq 1$, это означает, что интеграл в левой части доказываемого равенства абсолютно сходится, что и завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $n = 1$. Как следует из одной теоремы Крейна [4, с. 522, теорема П.4], уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда $\psi(-\infty) = -\infty$ и при $\lambda > 0$ функция $f_\lambda(z) = 1/(\lambda - \psi(z))$ продолжается до голоморфной в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и отображает ее в свое замыкание. При этом τ_λ можно найти из (6), используя различные формулы обращения преобразования Стильтьеса (см., например, [5, гл. 5, § 1]). В частности, рассматривая τ_λ как распределение, имеем

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow +0} (f_\lambda(\xi + iy) - f_\lambda(\xi - iy)), \quad (10)$$

где предел понимается в смысле сходимости в $\mathcal{D}'_+$.

ПРИМЕРЫ. Пусть $\psi(x) = -\log(1 - x)$, $x < 0$. Тогда $\psi(z) = -\log(1 - z)$, где выбирается та ветвь логарифма в области $\{-\pi < \arg z < \pi\}$, которая положительна на $(1, +\infty)$. Условия теоремы 5 легко проверяются (см. предыдущее замечание), поэтому меру τ_λ можно найти по формуле (10). Таким образом,

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\lambda + \log(1 - \xi - i0)} - \frac{1}{\lambda + \log(1 - \xi + i0)} \right).$$

Поскольку

$$\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x),$$

где θ — функция Хевисайда [5, с. 43, пример 6; с. 51, пример 4], имеет место

$$\tau_\lambda(\xi) = \frac{\theta(\xi - 1)}{\pi^2 + (\lambda + \log|\xi - 1|)^2}.$$

Теперь по формуле (7) получаем для $a \in \operatorname{Diss}(A)$, $\lambda > 0$

$$(\lambda \mathbf{1} + \log(\mathbf{1} - a))^{-1} = \int_1^{+\infty} \frac{(\xi \mathbf{1} - a)^{-1} d\xi}{\pi^2 + (\lambda + \log(\xi - 1))^2}.$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что

$$(\lambda \mathbf{1} + (-a)^\alpha)^{-1} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(\xi \mathbf{1} - a)^{-1} d\xi}{\lambda^2 + 2\lambda \xi^\alpha \cos \pi \alpha + \xi^{2\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

(аналог формулы Като для резольвенты дробной степени оператора).

6. Укажем на связь $\mathcal{T}_n$ -исчисления с теорией секториальных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть Y_θ – замыкание сектора $\{|\arg z| < \theta/2\}$ для $\theta \in [0, \pi]$, а Y_θ^* – замыкание сектора $\{\pi/2 + \theta/2 < \arg z < 3\pi/2 - \theta/2\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $b \in A$ называется *секториальным с углом θ* , если $\|e^{zb}\| \leq 1$ при $z \in Y_\theta$.

Множество всех таких элементов обозначим через $\text{Sect}_\theta(A)$. Ясно, что $\text{Sect}_\theta(A) \subset \text{Diss}(A)$, причем $\text{Sect}_0(A) = \text{Diss}(A)$.

Напомним (см. [6, с. 52]), что *числовым образом* элемента $b \in A$ называется множество

$$V(b) = \{f(b) : f \in A', \|f\| = f(1) = 1\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Элемент b из A принадлежит $\text{Sect}_\theta(A)$ тогда и только тогда, когда $V(b) \subset Y_\theta^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $b \in \text{Sect}_\theta(A)$, если и только если $e^{i\alpha b} \in \text{Diss}(A)$ при $|\alpha| \leq \theta/2$. Поскольку $V(e^{i\alpha b}) = e^{i\alpha}V(b)$, осталось воспользоваться тем, что $a \in \text{Diss}(A)$ тогда и только тогда, когда $V(a) \subset \{\text{Re } \lambda \leq 0\}$ [6, с. 55].

Как показывает следующая теорема, при помощи $\mathcal{T}_n$ -исчисления можно строить секториальные операторы из диссипативных.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A есть C^* -алгебра, $\psi \in \mathcal{T}_n$, причем $\nabla\psi(-\infty) = 0$. Если попарно коммутирующие элементы a_j из $\text{Diss}(A)$ таковы, что $\text{Sp}(a_j) \subset Y_\theta^*$, $j = 1, \dots, n$, то $\psi(a) \in \text{Sect}_\theta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся предыдущим предложением. Поскольку $c_1 = \nabla\psi(-\infty)$, для $f \in A'$, $\|f\| = f(1) = 1$, имеем

$$f(\psi(a)) = c_0 + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} f(e^{u \cdot a} - 1) d\mu(u).$$

Не нарушая общности, можно считать алгебру A коммутативной, т.е. изоморфной алгебре непрерывных функций на компакте M комплексных гомоморфизмов алгебры A . Тогда функционал f положительный [6, гл. 5, § 38, лемма 9], а потому имеет вид

$$f(b) = \int_M \varphi(b) d\nu(\varphi),$$

причем ν – вероятностная мера на M . Следовательно,

$$f(e^{u \cdot a}) - 1 = \int_M (e^{u \cdot \varphi(a)} - 1) d\nu(\varphi),$$

где $\varphi(a) = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$. Заметим, что $\varphi(a) \in \text{Sp}(a_1) \times \dots \times \text{Sp}(a_n) \subset (Y_\theta^*)^n$. Пусть $z = s + iy \in (Y_\theta^*)^n$, $z \neq 0$, т.е. $s_j < 0$ и $|y_j|/(-s_j) \leq \text{ctg}(\theta/2)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $\text{Re}(e^{u \cdot z} - 1) < 0$ при $u \in \mathbb{R}_+^n$, $u \neq 0$, и

$$\left| \frac{\text{Im}(e^{u \cdot z} - 1)}{\text{Re}(e^{u \cdot z} - 1)} \right| = \frac{|e^{u \cdot s} \sin(u \cdot y)|}{1 - e^{u \cdot s} \cos(u \cdot y)} = \frac{|\sin(u \cdot y)|}{e^{-u \cdot s} - \cos(u \cdot y)} \leq \frac{|u \cdot y|}{(1 - u \cdot s) - 1} \leq \text{ctg } \frac{\theta}{2},$$

т.е. $e^{u \cdot z} - 1 \in Y_\theta^*$. В частности, $e^{u \cdot \varphi(a)} - 1 \in Y_\theta^*$. Поэтому число $f(e^{u \cdot a}) - 1$, а вместе с ним и $f(\psi(a))$, принадлежит Y_θ^* , что и требовалось доказать.

Из теоремы 6 вытекает, что функции класса $\mathcal{T}_n$ действуют в каждом из конусов $\text{Sect}_\theta(A)$. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 7. Пусть A есть C^* -алгебра, $\psi \in \mathcal{T}_n$. Если попарно коммутирующие элементы $a_1, \dots, a_n$ принадлежат $\text{Sect}_\theta(A)$, то и $\psi(a)$ принадлежит $\text{Sect}_\theta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi_0(x) = \psi(x) - c_1x$. Тогда ψ_0 удовлетворяет условиям теоремы 6, причем $\text{Sp}(a_j) \subset V(a_j) \subset Y_\theta^*$. Следовательно,

$$\psi(a) = c_1a + \psi_0(a) \in \text{Sect}_\theta(A),$$

что и требовалось доказать.

Неизвестно, справедливы ли теоремы 6 и 7 для произвольной комплексной банаховой алгебры A с единицей.

В заключение отметим, что теоремы 1–5 данной работы остаются справедливыми и для наборов $(a_1, \dots, a_n)$ попарно коммутирующих элементов из A , удовлетворяющих условию $\|e^{ta_j}\| \leq M$ при $t \geq 0$ ($M = \text{const}$, $j = 1, \dots, n$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Миротин А. Р. Функции класса Шенберга $\mathcal{T}$ действуют в конусе диссипативных элементов банаховой алгебры // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 630–633.
- [2] Миротин А. Р. О функциональном исчислении диссипативных элементов банаховой алгебры // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1997. № 4.
- [3] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Меры на отдельных пространствах. М.: Наука, 1977.
- [4] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [5] Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.
- [6] Bonsall F.F., Duncan J. Complete Normal Algebras. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1973.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило
01.08.97