Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Орлов, О реализации k -значных функций схемами из функциональных элементов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 431–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:43:25

УДК 519.6

О РЕАЛИЗАЦИИ k -ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. А. Орлов

Рассматриваются вопросы реализации функций из P_k схемами из функциональных элементов в произвольных базисах.

Библиография: 4 названия.

Пусть Φ – произвольная полная в P_k ($k \geq 2$) система функций, каждая из которых существенно зависит от конечного числа всех своих переменных. Системе Φ сопоставим базис B , состоящий из реализующих ее функции элементов, каждому из которых приписано положительное число (вес элемента). Для имеющего не менее двух входов элемента его *приведенным весом* [1] называется отношение веса к уменьшенному на единицу числу входов. Приведенным весом ρ_B базиса B называется минимум приведенных весов его элементов. Всюду в дальнейшем будем рассматривать схемы в базисе B и под ρ понимать ρ_B .

Под *сложностью* $L(S)$ схемы S будем понимать сумму весов ее элементов. Через $L(G)$ обозначается минимальная сложность схемы, реализующей систему функций G , а через $L(k, n, r)$ – максимум $L(F)$ по всем системам F из r функций из P_k от n переменных.

О.Б. Лупанов [1], [2] решил задачу нахождения асимптотики функции Шеннона $L(2, n, r)$.

Предлагается метод реализации функций из P_k для любого $k \geq 2$. С использованием этого метода показано, что для почти любого базиса в P_k асимптотическое поведение функции Шеннона определяется его минимальным приведенным весом.

Отметим, что с использованием этого метода в [3], [4] для любого $k > 3$ показано существование базисов, в которых асимптотическое поведение функции Шеннона зависит от параметров многих элементов.

Пусть

$$\rho(n) = \min_f \frac{L(f)}{n-1}$$

по всем функциям f , существенно зависящим от n переменных, и пусть $\rho^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n)$. Докажем существование этого предела.

Имеющая n входов и m выходов схема называется (n, m) -блоком.

Пусть h_p – существенно зависящая от p переменных функция из P_k такая, что $L(h_p) = \rho(p)(p-1)$, и пусть H_p – реализующий эту функцию $(p, 1)$ -блок.

Пусть S – схема, состоящая из m блоков H_n и $(m+r, 1)$ -блока M , реализующего функцию $\max(z_1, \dots, z_{m+r})$. Входами (выходом) этой схемы являются входы схем H_n (выход блока M). Выходы блоков H_n соединены со входами блока M . Нетрудно проверить, что схема S реализует функцию, существенно зависящую от всех своих $mn+r$ переменных. Таким образом, при любых n, m и r ($r < n$) имеет место соотношение

$\rho(nt + r) < \rho(n) + c/n + c/m$, доказывающее единственность предела (с использованием нижнего предела).

Отметим теперь, что $\rho^* \geq \rho$ и $L(H_p) \sim \rho^* p$.

Верна следующая

ТЕОРЕМА 1. $L(k, n, 1) \lesssim \rho^* k^n / n$.

Доказательство этой теоремы будет проведено ниже с использованием *принципа глобального кодирования*, заключающегося в представлении функции из P_k системой булевых функций.

Вначале опишем несколько вспомогательных блоков и докажем теорему о реализации булевых функций.

Пусть $d_{i,1}, \dots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \dots, d_{i,p}$ ($1 \leq i \leq p$) – набор значений переменных, обеспечивающий существование i -й переменной функции h_p , и пусть $d_{i,i}$ и e_i – значения i -й переменной, на которых функция h_p при этом принимает различные значения a_i и b_i . Пусть $b_{p,i}$ – булев набор длины p , имеющий ровно одну i -ю единичную компоненту. Пусть $HSC_p - (p, p+2)$ -блок, который на наборе $b_{p,i}$ ($1 \leq i \leq p$) выдает набор $d_{i,1}, \dots, d_{i,p}, e_i, b_i$. Нетрудно получить оценку $L(HSC_p) < cp^2$. Здесь и далее c – некоторая, зависящая от базиса, константа.

Пусть BC (BD) – $(2, 1)$ -блок, реализующий функцию, равную 1 на наборе 1, 1 (равную 0 на наборе 0, 0) и равную 0 (1) на остальных наборах. Эти функции будем называть *конъюнкцией* и *дизъюнкцией* и обозначать через $\&$ и $\vee$. Через BD_r ($r \geq 3$) будем обозначать $(r, 1)$ -блок, реализующий функцию $z_1 \vee \dots \vee z_r$.

Пусть $SL - (3, 1)$ -блок, реализующий функцию, равную z_1 при $z_3 = 0$ и равную z_2 в остальных случаях.

Пусть $EQ - (2, 1)$ -блок, реализующий функцию, равную 1 при $z_1 = z_2$ и равную 0 в остальных случаях.

Через $\text{lb}(x)$ будем обозначать $\log_2 x$.

В соответствии с принципом глобального кодирования рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисах из P_k .

ТЕОРЕМА 2. Для произвольной булевой функции f от n переменных выполнено $L(f) \lesssim \rho^* 2^n / n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем первое представление булевых функций [1, с. 68]. А именно, вводим параметры r и s и задаем f булевой $(2^r, 2^{n-r})$ -матрицей M^f , которую разбиваем на полосы M_i^f , каждая из которых, кроме, быть может, последней, содержит s строк. Число полос $p = \lceil 2^r / s \rceil$.

В соответствии с этим переменные функции f разобьем на две группы $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_{n-r}$. Через X (Y) будем обозначать набор $x_1, \dots, x_r$ (набор $y_1, \dots, y_{n-r}$). Через X_j (Y_j) будем обозначать набор X (Y), являющийся двоичной записью числа j . Таким образом, значение $f(X_i, Y_j)$ является элементом $M_{i,j}^f$.

Пусть $U_{i,t}(X, Y)$ – функция, все столбцы i -й полосы матрицы которой являются двоичной записью числа t , а все остальные строки нулевые.

Пусть $CX_j(X)$ (соответственно $CY_j(Y)$) – функция, равная 1 на наборе X_j (на наборе Y_j) и равная 0 на остальных наборах.

Пусть $t_{i,j}^f$ – число, двоичной записью которого является j -й столбец полосы M_i^f . Через $f_{i,j}(X, Y)$ будем обозначать $U_{i,t}(X, Y)$ при $t = t_{i,j}^f$, а через $f_j(X, Y) = dp(f_{1,j}(X, Y), \dots, f_{p,j}(X, Y)) \& CY_j(Y)$, где $dp(z_1, \dots, z_p)$ – функция, равная 0 на наборе $(0, \dots, 0)$, равная 1 на всех булевых наборах, имеющих ровно одну единицу, и принимающая любые

значения на остальных наборах.

Теперь функцию f будем реализовывать в соответствии с разложением $f(X, Y) = f_0(X, Y) \vee \dots \vee f_{v-1}(X, Y)$. Здесь и далее $v = 2^{n-r}$.

Реализующая функцию f схема S состоит из $(r, 2^r)$ -блока CX , $(n-r, v)$ -блока CY , $(2^r, u)$ -блока UB , $(3u, u+1)$ -блока CPU , $(u+1, v)$ -блока BS , $(2v, v)$ -блока CON и блока BD_v . Здесь и далее $u = p2^s$.

Блок CX (CY) реализует все функции $CX_i(X)$ ($CY_j(Y)$). Входы этих блоков являются входами схемы S .

Блок UB , используя функции $CX_i(X)$, реализует все функции $U_{i,t}(X, Y)$.

Блок CPU состоит из u блоков SL и блока HSC_p . Входами блока CPU являются третьи входы его блоков SL . Они соединены с выходами блока UB . Входы блока HSC_p соединены с выходами блока UB , соответствующими характеристическим функциям полос матрицы M^f (функциям $U_{i,t}$ при $t = 2^s - 1$). Первый (второй) вход соответствующего функции $U_{i,t}$ блока SL соединен с i -м ($(p+1)$ -м) выходом блока HSC_p . В блоке CPU $(u+1)$ -м выходом является $(p+2)$ -й выход блока HSC_p .

Блок BS состоит из v блоков H_p , входы которых являются его входами, и v блоков EQ . Выход каждого блока H_p соединен с первым входом соответствующего ему блока EQ . Вторые входы блоков EQ соединены с $(u+1)$ -м входом блока BS , который соединен с $(u+1)$ -м выходом блока CPU . В блоке BS i -й вход j -го блока H_p соединен с выходом блока CPU , соответствующим функции $U_{i,t}$ при $t = t_{i,j}^f$. Выходами блока являются выходы блоков EQ .

Блок CON состоит из v блоков BC . Первый (второй) вход j -го блока BC соединен с j -м выходом блока BS (блока CY).

Входы блока BD_v соединены с выходами блока CON , его выход является выходом схемы S .

Приведем известные (или легко получаемые) оценки сложностей блоков схемы S :

$$\begin{aligned} L(KX) &< c2^r, & L(UB)(L(CPU)) &< cu, \\ L(CY)(L(CON), L(BD_v)) &< cv, & L(BS) &\sim \rho^*pv. \end{aligned}$$

Отметим, что все блоки имеют линейную относительно суммы чисел их входов и выходов сложность. Параметры r и s выбираем так, чтобы основную сложность схемы S составил блок BS . При $r = \lceil 2 \lg(n) \rceil$ и $s = \lceil n - 3 \lg(n) \rceil$ получаем утверждение теоремы 2.

Через q будем обозначать $\lg(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть сначала q – целое число. Пусть g_n – произвольная функция из P_k от n переменных. Опишем реализующую эту функцию схему S и оценим ее сложность. Пусть $m = qn$. Схема S состоит из (n, m) -блока A , (m, q) -блока B и $(q, 1)$ -блока C . Входами блока A являются входы схемы S . Входы блока B (блока C) соединены с выходами блока A (блока B). Выходом схемы S является выход блока C . Блок A реализует двоичную запись числа, k -ичной записью которого является набор значений входов схемы S . По функции g_n и блоку A однозначно определяется система из q булевых функций от m переменных такая, что набор значений ее функций является двоичной записью значения функции g_n . Блок B реализует эту систему булевых функций. Блок C осуществляет восстановление значения функции g_n по его двоичной записи.

Из оценок $L(A) < cqn$, $L(C) < ck$ и теоремы 2 следует утверждение теоремы 1 в случае, когда k является степенью двойки.

Если q не является целым, то функцию g_n разлагаем по $r = [\text{lb}(n)/q]$ переменным и реализуем k^r функций из P_k от $n - r$ переменных с помощью системы из $]qk^r[$ булевых функций от $]q(n - r)[$ переменных, определенных на первых k^{n-r} наборах.

Для завершения доказательства опишем $(t,]qt[)$ -блок $CK2_t$, на выходах которого реализуется двоичная запись числа, k -ичной записью которого является его входной набор. Блок состоит из t $(1,]qt[)$ -блоков CR_j и $(t]qt[,]qt[)$ -блока SM . Вход блока CR_j является j -м входом блока $CK2_t$, на его выходах реализуется двоичная запись числа $z_j k^{j-1}$, где z_j — значение j -го входа блока $CK2_t$. Блок SM осуществляет последовательное суммирование этих чисел. Выходы блока SM являются выходами блока $CK2_t$. Нетрудно получить оценку $L(CK2_t) < ct^2$. Аналогичным образом строится $(]qt[, t)$ -блок $C2K_t$, на выходах которого реализуется k -ичная запись числа, двоичной записью которого является его булев входной набор.

Отметим, что при обычных ограничениях имеет место соотношение

$$L(k, n, r) \lesssim \rho^* \frac{rk^n}{n + \log_k r}.$$

Базис B назовем *оптимальным*, если $L(k, n, 1) \sim \rho k^n / n$.

Покажем оптимальность почти всех базисов.

Существенно зависящая не менее чем от двух переменных функция называется *существенной*. Существенную функцию, существенно зависящую от всех своих переменных, назовем *S-функцией*. Систему существенных функций из P_k назовем *сильно существенной*, если для любого числа t из этих функций можно построить являющуюся *S-функцией* бесповторную суперпозицию от $n > t$ переменных и если любая ее подсистема этим свойством не обладает. Образующую сильно существенную систему функцию назовем *сильно существенной*.

Систему функций всех, имеющих минимальный приведенный вес, элементов базиса назовем его *ядром*. Отметим, что ядро любого базиса не пусто. Базис назовем *сильно существенным*, если его ядро содержит сильно существенную систему. Отметим, что в случае сильно существенных базисов $\rho^* = \rho$.

ТЕОРЕМА 3. *Сильно существенный базис оптимален.*

Доказательство следует из теоремы 1 и из обычных мощностных соображений.

Заметим, что в случае сильно существенных базисов получаем порядок остаточного члена функции Шеннона $L(k, n, r)$.

Оценим число сильно существенных функций.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено другое, под функцией будем понимать функцию из P_k ($k \geq 3$) от n переменных. Через R_f будем обозначать множество значений функции f .

Через $f_{i,s}$ будем обозначать подфункцию, получающуюся из функции f при значении i -й переменной, равном s .

Функцию f назовем *$V_{i,t}$ -функцией*, если существуют отличные друг от друга s и t из R_f такие, что $f_{i,s} = f_{i,t}$.

Функцию f назовем *$Z_{i,j}$ -функцией* ($j \neq i$), если для любого s из R_f подфункция $f_{i,s}$ не зависит существенно от j -й переменной. Функцию, являющуюся *$Z_{i,j}$ -функцией* при некотором j , назовем *Z_i -функцией*.

Функцию f назовем *$W_{i,t}$ -функцией*, если для любого s из R_f подфункция $f_{i,s}$ не принимает значения t из R_f . Функцию, являющуюся *$W_{i,t}$ -функцией* при некотором t , назовем *W_i -функцией*.

Назовем T_i -*функцией* функцию, являющуюся V_i -, Z_i - или W_i -функцией. Функцию, не являющуюся T_i -функцией, назовем NT_i -*функцией*. Отметим, что NT_i -функция не является ни V_i -функцией, ни Z_i -функцией и ни W_i -функцией.

ТЕОРЕМА 4. *S -функция, являющаяся NT_i -функцией при некотором i , сильно существенна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, полагаем $i = n$. Пусть f – произвольная удовлетворяющая условиям теоремы функция.

Из произвольного числа t реализующих функцию f элементов построим цепочку, в которой выход каждого элемента соединен с n -м входом последующего.

Покажем существенность j -го ($1 \leq j < n$) входа m -го ($1 \leq m \leq t$) элемента этой цепочки.

Так как f не является Z_n -функцией, то существует s из R_f такое, что $f_{n,s}$ существенно зависит от j -й переменной. Функцию $f_{n,s}$ обозначим через g . Из существенности j -й переменной функции g следует существование a и b таких, что $g_{j,a} \neq g_{j,b}$. Функцию $g_{j,a}$ ($g_{j,b}$) обозначим через h_a (h_b). Таким образом, существует набор Y_m значений, отличных от n -го и j -го входов m -го элемента, такой, что значения c и d функций h_a и h_b на этом наборе различны.

Так как f не является V_n -функцией, то существует набор Y_{m+1} значений, отличных от n -го входа ($m+1$)-го элемента, такой, что значения функций $f_{n,c}$ и $f_{n,d}$ на этом наборе различны. Аналогичным образом показывается существование таких наборов для последующих элементов цепочки.

Так как f не является W_n -функцией, то существует набор Y_{m-1} значений входов, отличных от n -го, и значение s_{m-1} n -го входа ($m-1$)-го элемента такие, что значение выхода ($m-1$)-го элемента равно s . Аналогичным образом показывается существование таких наборов и значений n -х входов для предыдущих элементов цепочки.

Доказательство существенности n -го входа первого элемента цепочки является более простым случаем рассмотренного выше.

Теорема 4 доказана.

Через M_r будем обозначать множество функций, принимающих r значений, через S_r – множество S -функций из M_r , а через NC_r – множество функций из S_r , не являющихся сильно существенными. Через s_r (c_r) обозначим число функций из S_r (из NC_r). Пусть $d_r = c_r/s_r$ и $k_r = r^{k^n}/s_r$. Из соотношения $s_r \geq r^{k^n} - nr^{k^{n-1}} - r(r-1)^{k^n}$ следует, что k_r быстро стремится к 1.

Оценим число функций из NC_r и их долю d_r .

Функцию, являющуюся T_i -функцией для любого i , назовем T -*функцией*.

Из теоремы 4 следует

ТЕОРЕМА 5. *Число функций из NC_r не превосходит числа T -функций.*

Не ограничивая общности, при проведении доказательства будем полагать, что функции из M_r принимают первые r значений.

Функцию, являющуюся V_i -функцией для любого i , назовем V -*функцией*.

ЛЕММА 1. *Число V -функций из M_r не превосходит $(C_r^n)^n r^{(k-1)^n}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s_i и t_i ($1 \leq i \leq n$) – значения i -го аргумента из определения V -функции, и пусть $s_i < t_i$.

В таблице для функции f удалим наборы, i -я компонента которых равна t_i ($1 \leq i \leq n$). По содержащей $(k-1)^n$ наборов оставшейся части и парам (s_i, t_i) V -функция восстанавливается полностью. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любого i число Z_i -функций из M_r не превосходит

$$(n-1)r^{k^n - r(k-1)k^{n-2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $Z_{i,j}$ -функцию будем рассматривать как набор k^{n-2} функций от двух переменных (i -й и j -й). Каждую такую функцию будем задавать $(k \times k)$ -матрицей, в которой строки (столбцы) соответствуют значениям i -й (j -й) переменной. Во всех этих матрицах каждая из первых r строк состоит из одинаковых элементов, т.е. эти матрицы задаются $k(k-r) + r$ элементами. Лемма доказана.

Через m_r будем обозначать $(r/(r-1))^r$.

Легко проверить, что верна

ЛЕММА 3. Для любого i ($1 \leq i \leq n$) число W_i -функций из M_r не превосходит $r^{k^n+1}m_r^{-k^{n-1}}$.

Из лемм 1–3 следует

ЛЕММА 4. Число T -функций из M_r не превосходит

$$(C_r^2)^n r^{(k-1)^n} + n(n-1)r^{k^n - r(k-1)k^{n-2}} + nr^{k^n+1}m_r^{-k^{n-1}}.$$

Отсюда и из теоремы 5 следует

ТЕОРЕМА 6. Справедлива оценка

$$d_r < k_r((C_r^2)^n r^{(k-1)^n - k^n} + n(n-1)r^{-r(k-1)k^{n-2}} + nrm_r^{-k^{n-1}}).$$

Таким образом, для любого r доля существенно зависящих от всех n своих переменных и принимающих r значений функций из P_k , не являющихся сильно существенными, дважды экспоненциально убывает с ростом n и более чем экспоненциально убывает с ростом k .

Отметим, что при $r = k$ (при $r = 2$) в теореме 6 достаточно взять только первое слагаемое (два первых слагаемых). Кроме того, оценку можно улучшить, учитывая пересечения множеств V_i -, Z_i - и W_i -функций.

Базис с равным 1 приведенным весом назовем *нормированным*. Не ограничивая общности, будем рассматривать нормированные базисы. Для оценки доли сильно существенных базисов множество базисов разобьем на подмножества, элементы которых имеют одинаковые мощности их систем функций и ядер, и будем полагать эквивалентными базисы, имеющие одинаковые системы функций и ядер.

Максимальное число входов элементов базиса назовем его *рангом*. Из теорем 3 и 6 следует, что при растущем ранге или значности почти все базисы в P_k оптимальны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 63–97.
- [2] Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Физматгиз, 1965. С. 31–110.
- [3] Орлов В. А. О реализации функций из P_k схемами в произвольном базисе // XI Международная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докл. Ульяновск, 1996. С. 154–155.
- [4] Орлов В. А. Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 3. С. 308–309.