Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Попов, Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 437–442

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:52:45

УДК 517.975.5

УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Попов

Для операторов, соответствующих системам дифференциально-разностных уравнений μ -го порядка нейтрального типа, получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно классической билинейной формы. Полученные результаты применяются к квазилинейным системам первого порядка.

Библиография: 14 названий.

1. Система μ -го порядка. Условия потенциальности операторов, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям, рассматривались многими авторами (см. [1]–[6]). В наиболее полном объеме эти условия потенциальности приведены в книге [6]. Там же, а также в монографиях В. М. Филиппова [7] и В. М. Савчина [8] имеется обширная библиография по вариационным методам решений уравнений. Впервые необходимые условия потенциальности для обыкновенных дифференциальных уравнений были получены Гельмгольцем (см. [1], [2]), поэтому подобные условия потенциальности для других классов уравнений в современной литературе принято называть условиями потенциальности Гельмгольца.

В настоящей заметке рассматриваются системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Для операторов, соответствующих системам таких уравнений μ -го порядка, получены необходимые и достаточные условия потенциальности, которые затем применяются для систем уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

$$F_i(t, u^{(m)}(t + \vartheta\tau)) = 0, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$, $m = 0, \dots, \mu$, $\vartheta = -1, 0, 1$, $\tau = \text{const} > 0$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $F_i \in C$.

Введем оператор N

$$N(u) = (F_1, F_2, \dots, F_n). \quad (2)$$

Система (1) эквивалентна операторному уравнению

$$N(u) = 0_V, \quad (3)$$

где 0_V – нулевой элемент в V .

Обозначим через $U = Q^\mu$ множество непрерывных μ раз кусочно-дифференцируемых вектор-функций (называемых в дальнейшем просто функциями) при $t \in [t_1 - \tau, t_2 + \tau]$, $t_2 - t_1 > 2\tau$.

Зададим область определения рассматриваемого оператора N (2) равенством

$$\begin{aligned} D(N) = \{u \in U : u^{(l)}(t) = \varphi_1^{(l)}(t), t \in E_1 = [t_1 - \tau, t_1 + \tau], \\ u^{(l)}(t) = \varphi_2^{(l)}(t), t \in E_2 = [t_2 - \tau, t_2 + \tau]\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_1 и φ_2 – заданные функции, $l = 0, \dots, [\mu/2]$, $[\cdot]$ – целая часть.

Пусть $N: D(N) \rightarrow V$. На множестве $V \times U$ зададим локальную билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\langle \nu, g \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \nu(t)g(t) dt, \quad (5)$$

где $\nu(t)g(t) = \nu_i(t)g_i(t)$. Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей производится суммирование от 1 до n .

Цель настоящей работы – нахождение условий потенциальности операторов, соответствующих дифференциально-разностным уравнениям. В связи с этим приведем определение потенциального оператора [6, с. 10].

Оператор N называется *потенциальным* относительно билинейной формы (5), если существует дифференцируемый по Гато функционал $f_N: D(f_N) \equiv D(N) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta f_N[u, h] = \langle N(u), h \rangle, \quad u \in D(N).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_i \in C^{\mu+1}$. Для того чтобы оператор N (2) уравнения (1) (или, что то же самое, уравнения (3)) был потенциальным в области (4) относительно билинейной формы (5), необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t-\tau)} + \sum_{m=1}^{\mu} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t-\tau)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t+\tau)}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial u_j(t)} + \sum_{m=1}^{\mu} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t)} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t)}, \\ \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t+\tau)} + \sum_{m=1}^{\mu} (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t+\tau)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t-\tau)}, \\ \sum_{m=k}^{\mu} (-1)^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t-\tau)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t+\tau)}, \\ \sum_{m=k}^{\mu} (-1)^m \binom{m}{k} \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t)} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t)}, \\ \sum_{m=k}^{\mu} (-1)^m \binom{m}{k} \left[\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t+\tau)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} &= \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, \mu$, а запись $[\Phi]_{t \rightarrow t+\tau}$ (или $[\Phi]_{t \rightarrow t-\tau}$) означает, что в выражении для Φ вместо t следует подставить $t + \tau$ (или $t - \tau$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой Вольтера–Кернера–Вайнберга (см. [6, с. 15] и [9, с. 66]).

Если оператор N дифференцируем по Гато в каждой точке $u \in U$, причем дифференциал $DN(u, h)$ непрерывен в каждой точке $u \in U$, то для потенциальности N необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\langle N'_u h, g \rangle = \langle N'_u g, h \rangle, \quad u \in U, \quad g, h \in D(N'_u), \quad (7)$$

где

$$D(N'_u) = \{h \in D(N) : h = 0, t \in E_1 \cup E_2\}. \quad (8)$$

Очевидно, что условия дифференцируемости по Гато оператора N и непрерывности дифференциала $DN(u, h)$ выполняются. Проверим условие симметричности (7). Для этого сначала находим $\langle N'_u h, g \rangle$. Применяя интегрирование по частям, соответствующие замены переменной интегрирования, формулу Лейбница и условия (8) для h и g , получим

$$\begin{aligned} \langle N'_u h, g \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{m=0}^{\mu} \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t-\tau)} h_j^{(m)}(t-\tau) + \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t)} h_j^{(m)}(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_i}{\partial u_j^{(m)}(t+\tau)} h_j^{(m)}(t+\tau) \right) g_i(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t-\tau)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} g_i(t+\tau) + \frac{\partial F_i}{\partial u_j(t)} g_i(t) + \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t+\tau)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} g_i(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{m=k}^{\mu} (-1)^m \binom{m}{k} \left(\left[\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j(t-\tau)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} g_i^{(k)}(t+\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j(t)} g_i^{(k)}(t) + \left[\frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} \frac{\partial F_i}{\partial u_j(t+\tau)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} g_i^{(k)}(t-\tau) \right) \right) h_j(t) dt. \quad (9) \end{aligned}$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} \langle N'_u h, g \rangle &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(m)}(t-\tau)} g_i(t-\tau) + \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(m)}(t)} g_i(t) + \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(m)}(t+\tau)} g_i(t+\tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\mu} \left(\frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t-\tau)} g_i^{(k)}(t-\tau) + \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t)} g_i^{(k)}(t) + \frac{\partial F_j}{\partial u_i^{(k)}(t+\tau)} g_i^{(k)}(t+\tau) \right) \right) h_j(t) dt. \quad (10) \end{aligned}$$

Сравнивая выражения (9) и (10) и принимая во внимание произвольность допустимых функций $h(t)$ и $g(t)$, заключаем, что для каждой точки $u \in U$ условия (6) являются необходимыми и достаточными для выполнения критерия потенциальности (7) для оператора (2), а следовательно, и для системы (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для потенциального оператора N его потенциал f_N находится по формуле [8, с. 66]

$$f_N[u] = f_N[u_0] + \int_0^1 \langle N(u_0 + s(u - u_0)), u - u_0 \rangle ds,$$

где u_0 – фиксированный элемент из $D(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказанной теоремы легко сделать вывод, что операторы, соответствующие дифференциально-разностным уравнениям запаздывающего типа, не могут быть потенциальными относительно билинейной формы (5).

2. Система первого порядка. Для системы первого порядка

$$F_i(t, u(t + \vartheta\tau), u'(t + \vartheta\tau)) = 0 \quad (11)$$

условия потенциальности Гельмгольца (6) имеют вид

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t - \tau)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t - \tau)} \right]_{t \rightarrow t + \tau} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t + \tau)}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t)} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t)}, \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u_j(t + \tau)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t + \tau)} \right]_{t \rightarrow t - \tau} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i(t - \tau)}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t - \tau)} \right]_{t \rightarrow t + \tau} + \frac{\partial F_j}{\partial u'_i(t + \tau)} &= 0, \\ \frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t)} + \frac{\partial F_j}{\partial u'_i(t)} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial u'_j(t + \tau)} \right]_{t \rightarrow t - \tau} + \frac{\partial F_j}{\partial u'_i(t - \tau)} = 0,$$

где $i, j = 1, \dots, n$.

Из условий (12)–(14) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_i}{\partial u'_l(t - \tau) \partial u'_j(t - \tau)} &= 0, \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial u'_l(t) \partial u'_j(t)} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial u'_l(t + \tau) \partial u'_j(t + \tau)} = 0, \\ i, j, l &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

для выполнения которых необходимо и достаточно, чтобы функции F_i (11) зависели от $u'_j(t - \tau)$, $u'_j(t)$ и $u'_j(t + \tau)$ линейно, т.е. чтобы система (11) имела вид

$$F_i \equiv A_i^k u'_k(t - \tau) + B_i^k u'_k(t) + C_i^k u'_k(t + \tau) + P_i = 0, \quad (16)$$

где функции A_i^k, B_i^k, C_i^k, P_i зависят от переменных $t, u_j(t - \tau), u_j(t), u_j(t + \tau), i, j, k = 1, \dots, n$.

Применяя условия (12)–(15) к левым частям системы (16), получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Необходимыми и достаточными условиями потенциальности оператора, соответствующего системе (16), являются условия*

$$\frac{\partial A_j^k}{\partial u_i(t+\tau)} = 0, \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial A_i^k}{\partial u_j(t-\tau)} - \frac{\partial A_i^j}{\partial u_k(t-\tau)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} = \frac{\partial B_j^k}{\partial u_i(t+\tau)},$$

$$\left[\frac{\partial B_i^k}{\partial u_j(t-\tau)} - \frac{\partial A_i^j}{\partial u_k(t)} \right]_{t \rightarrow t+\tau} = \frac{\partial C_j^k}{\partial u_i(t+\tau)}, \quad (18)$$

$$\left[\frac{\partial P_i}{\partial u_j(t-\tau)} - \frac{\partial A_i^j}{\partial t} \right]_{t \rightarrow t+\tau} = \frac{\partial P_j}{\partial u_i(t+\tau)},$$

$$\frac{\partial A_i^k}{\partial u_j(t)} - \frac{\partial B_i^j}{\partial u_k(t-\tau)} = \frac{\partial A_j^k}{\partial u_i(t)},$$

$$\frac{\partial B_i^k}{\partial u_j(t)} - \frac{\partial B_i^j}{\partial u_k(t)} = \frac{\partial B_j^k}{\partial u_i(t)},$$

$$\frac{\partial C_i^k}{\partial u_j(t)} - \frac{\partial B_i^j}{\partial u_k(t+\tau)} = \frac{\partial C_j^k}{\partial u_i(t)},$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial u_j(t)} - \frac{\partial B_i^j}{\partial t} = \frac{\partial P_j}{\partial u_i(t)}, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial B_i^k}{\partial u_i(t+\tau)} - \frac{\partial C_i^j}{\partial u_k(t)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} = \frac{\partial A_j^k}{\partial u_i(t-\tau)},$$

$$\left[\frac{\partial C_i^k}{\partial u_j(t+\tau)} - \frac{\partial C_i^j}{\partial u_k(t+\tau)} \right]_{t \rightarrow t-\tau} = \frac{\partial B_j^k}{\partial u_i(t-\tau)}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_j^k}{\partial u_i(t-\tau)} = 0, \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial P_i}{\partial u_j(t+\tau)} - \frac{\partial C_i^j}{\partial t} \right]_{t \rightarrow t-\tau} = \frac{\partial P_j}{\partial u_i(t-\tau)}, \quad (22)$$

$$[A_i^k]_{t \rightarrow t+\tau} + C_k^j = 0, \quad (23)$$

$$B_i^k + B_k^i = 0, \quad (24)$$

$$[C_i^k]_{t \rightarrow t-\tau} + A_k^j = 0; \quad (25)$$

здесь $i, j, k = 1, \dots, n$.

Отметим, что условия (17), (18) получены из равенства (12), условия (19) – из равенства (13), условия (20)–(22) – из равенства (14), а условия (23)–(25) – из соответствующих равенств (15). Кроме того, из условия (17) следует, что функции A_i^k не зависят от $u_j(t+\tau)$, а из условия (21) вытекает, что C_i^k не зависят от $u_j(t-\tau)$. Наконец, условия (23) и (25) эквивалентны.

В заключение заметим, что теории вариационных задач для функционалов с отклоняющимся аргументом и связанных с ними краевых задач посвящены работы [10]–[14].

Автор благодарен В. М. Савчину за конструктивное обсуждение заметки и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Helmholtz H. Über die Physikalische Bedeutung des Prinzips der Kleinsten Wirkung // J. Reine Andew. Math. 1887. V. 100. P. 137–166.
- [2] Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия // Вариационные принципы механики / ред. Л. С. Полак. М., 1959. С. 430–459.
- [3] Havas P. The connection between conservation laws and invariance groups: folklore, fiction, and fact // Acta Phys. Austriaca. 1973. V. 38. № 2. P. 145–167.
- [4] Santilli R. M. Foundations of Theoretical Mechanics. The Inverse Probleme in Newtonian Mechanics. New York: Springer, 1978.
- [5] Obadeanu V., Marinca V. Le problème inverse dans la mécanique newtonienne (théorème analytique fondamental) // Sem. Mech. Univ. Timisoara. 1986. V. 1. P. 1–32.
- [6] Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 40. М.: ВИНТИ, 1992.
- [7] Филиппов В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1985.
- [8] Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1991.
- [9] Вайнберг М. М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
- [10] Эльсгольц Л. Э. Вариационные задачи с запаздывающим аргументом // УМН. 1957. Т. 12. № 1. С. 57–58.
- [11] Каменский Г. А. Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 8. С. 1349–1358.
- [12] Каменский Г. А. О вариационном методе решения краевых задач для некоторых линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 7. С. 1185–1191.
- [13] Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Экстремумы функционалов с отклоняющимися аргументами. М.: Изд-во МАИ, 1979.
- [14] Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд-во МАИ, 1992.

Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступило
14.05.97