Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Тимофеев, С. Т. Туляганов, Задачи типа аддитивной проблемы делителей, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 443–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:18:08

УДК 511.3

ЗАДАЧИ ТИПА АДДИТИВНОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Н. М. Тимофеев, С. Т. Туляганов

Для мультипликативных функций $f(n)$, удовлетворяющих условиям: $f(n) \geq 0$, $f(p^r) \leq A^r$, $A > 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные A_ε , $\alpha > 0$ такие, что $f(n) \leq A_\varepsilon n^\varepsilon$ и $\sum_{p \leq x} f(p) \ln p \geq \alpha x$, — доказано соотношение

$$\sum_{n \leq x} f(n) \tau(n-1) = C(f) \sum_{n \leq x} f(n) \ln x (1 + o(1)).$$

Здесь $\tau(n)$ — число делителей n , $C(f)$ — постоянная.

Библиография: 13 названий.

Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, т.е. $f(nm) = f(n)f(m)$ для любых взаимно простых n, m , $f(1) = 1$. В работе исследуется поведение при $x \rightarrow \infty$ суммы

$$S(f, x) = \sum_{n \leq x} f(n) \tau(n-1),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n . Основной целью является доказательство при возможно более слабых ограничениях на $f(n)$ соотношения

$$S(f, x) = C(f) \sum_{n \leq x} f(n) \ln x (1 + o(1)). \quad (1)$$

Если $f(n) = \tau_k(n)$ — число представлений n в виде k сомножителей, то эта задача хорошо известна в теории чисел и носит название аддитивной проблемы делителей. Впервые ее безусловное решение при любом k было получено Ю. В. Линником [1].

В дальнейшем рассматривались различные обобщения этой задачи: А. И. Виноградов [2] исследовал случай, когда $f(n) = \tau_k^m(n)$, Л. И. Уфимцевой [3] найдена асимптотика $S(f, x)$, если $f(n) \geq 0$ и $f(p) = f_0$ — целое число, в работе Б. М. Бредихина и Л. И. Уфимцевой [4] изучен случай, когда $f(p)$ “в среднем” равна f_0 . Если $|f(n)| \leq 1$, то полное исследование $S(f, x)$ проведено в работе [5]. М. Б. Хрипунова [6] рассмотрела случай $f(n) = \tau_k(n)$, где $|f(n)| \leq 1$, а $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде произведения k сомножителей.

Основной результат работы следующий.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ТЕОРЕМА. Пусть мультипликативная функция $f(n) \geq 0$ удовлетворяет следующим условиям: существует число A такое, что $f(p^r) \leq A^r$, $r \geq 1$; для любого $\varepsilon > 0$ существует константа A_ε такая, что при всех n $f(n) \leq A_\varepsilon n^\varepsilon$; существует число $\alpha > 0$ такое, что при $x \geq x_0$

$$\sum_{p \leq x} f(p) \ln p \geq \alpha x. \quad (2)$$

Тогда имеет место (1) с постоянной

$$C(f) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varphi(\delta_i)} E(f, \delta_i) F(f, \delta_i),$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана,

$$E(f, \delta) = \prod_{p|\delta} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + 1} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right)^{-1},$$

$$F(f, \delta) = \prod_{p \nmid \delta} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) \chi_{\delta}^*(p^r)}{p^r} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right)^{-1},$$

$\varphi(n)$ – функция Эйлера, $\chi_{\delta_i}^*$ ($i = 1, \dots, k$) – те примитивные характеры, для которых

$$\sum_p \frac{f(p)(1 - \chi_{\delta_i}^*(p))}{p} < \infty, \quad (3)$$

$1 \leq \delta_1 < \delta_2 \leq \dots \leq \delta_k$ – их модули.

ЗАМЕЧАНИЕ. Будет показано, что число примитивных характеров k , для которых ряд (3) сходится, не превосходит A/α .

В качестве следствия можно получить решение некоторых аддитивных задач.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое множество степеней простых чисел,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{P}}} \ln p > \alpha x, \quad \alpha > 0, \quad x \geq x_0,$$

f – мультипликативная функция,

$$f(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } p^k \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда справедливо (1) с

$$C(f) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \sum_{k=1}^k \frac{1}{\varphi(\delta_i)} E_{\delta_i}(\mathcal{P}) F_{\delta_i}(\mathcal{P}),$$

где

$$E_{\delta}(\mathcal{P}) = \prod_{p \nmid \delta} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + 1} \left(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ p^r \in \mathcal{P}}}^{\infty} \frac{1}{p^r} \right)^{-1},$$

$$F_{\delta}(\mathcal{P}) = \prod_{p \nmid \delta} \left(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ p^r \in \mathcal{P}}}^{\infty} \frac{\chi_{\delta}^*(p^r)}{p^r} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} \right) \left(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ p^r \in \mathcal{P}}}^{\infty} \frac{1}{p^r} \right)^{-1},$$

$\chi_{\delta_i}^*$ ($i = 1, \dots, k$) – примитивные характеры, для которых

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 - \chi_{\delta_i}^*(p)}{p} < \infty, \quad k \leq \frac{1}{\alpha}.$$

В следствии 1 найдена асимптотика для числа решений уравнений $n - ks = 1$, $k, s \in \mathbb{N}$, $n \leq x$, у которых все степени простых чисел, входящих в каноническое разложение, содержатся в множестве $\mathcal{P}$. В частном случае, когда $\mathcal{P}$ состоит из степеней 2, всех степеней простых чисел вида $4k+1$ и четных степеней простых чисел вида $4k+3$, мы приходим к следующему результату, доказанному в [7].

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n = m^2 + k^2}} \tau(n-1) = C \sum_{\substack{n \leq x \\ n = m^2 + k^2}} 1 \cdot \ln x (1 + o(1)),$$

где

$$C = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + 1} \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} \frac{(p^2+1)(p-1)}{p^2(p^2 - p + 1)}.$$

При доказательстве будет часто использоваться следующий результат Шиу [8].

ЛЕММА 1 (Теорема Шиу). Пусть $f(n)$ – мультипликативная функция, $|f(p^r)| \leq A^r$; для любого $\varepsilon > 0$ существует A_{ε} такое, что $|f(n)| \leq A_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$ при $n \geq 1$. Тогда для $0 < \alpha, \beta < 1/2$, $0 < a \leq k$, $(a, k) = 1$, $a, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ n \equiv a \pmod{k}}} |f(n)| \ll \frac{y}{\varphi(k) \ln x} \exp \left(\sum_{\substack{p \leq x \\ p \nmid k}} \frac{|f(p)|}{p} \right)$$

равномерно по a, k и y таким, что $k \leq y^{1-\alpha}$, $x^{\beta} < y \leq x$.

Далее будем пользоваться следующими обозначениями: $P(x) = \prod_{p \leq x} p$, $d \mid P(x)$ означает, что все простые делители d не превосходят x ,

$$\Pi_f(x) = \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right).$$

ЛЕММА 2. Пусть $z_0 \leq z \leq \sqrt{x}/\ln^\beta x = Q$, $d_1 \mid P(\sqrt{z})$, $d_2 \mid P(z)$, $(d_2, P(\sqrt{z})) = 1$, $(d_3, P(z)) = 1$; a – фиксированное число, $f(n)$ – комплекснозначная мультипликативная функция, $|f(n)|$ удовлетворяет условиям теоремы. Если $B \geq 3 + 2A^2 + 3\gamma$, то

$$\Delta(z) = \sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 \leq Q \\ (d_1 d_2 d_3, a) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_3)} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1 d_2} \\ (n, d_3) = 1}} f(n) - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1} \\ (n, d_2 d_3) = 1}} f(n) \right| \ll R,$$

где $R = x(\ln z)^{-\gamma} \Pi_{|f|}(x)$ и γ – любая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть суммы $\Delta(z)$, в которой $d_1 d_2 > u$, после применения леммы 1 будет

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x}{\ln x} \sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 \leq Q \\ d_1 d_2 > u}} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2 d_3)} \Pi_{|f|}(x) \\ &\ll \frac{x}{\ln x} \Pi_{|f|}(x) \frac{1}{\ln u} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq Q} \frac{\ln d_1 d_2}{\varphi(d_1 d_2 d_3)} \ll \frac{x}{\ln u} \ln z \Pi_{|f|}(x). \end{aligned}$$

Заметим, что в условиях теоремы

$$\exp \sum_{p \leq x} \frac{|f(p)|}{p} \asymp \Pi_{|f|}(x).$$

Возьмем $u = \exp(\ln^{\gamma+1} z)$. Если $u > Q$, то эта часть суммы равна 0. Значит, в любом случае оцениваемая часть равна $O(R)$. Представим $n = n_1 n_2 n_3$, где $n_1 \mid P(y_1)$, $n_2 \mid P(y_2)$, $(n_2, P(y_1)) = 1$, $(n_3, P(y_2)) = 1$, $y_1 < y_2$. Покажем, что с точностью до $O(R)$ можно считать, что $u_1 < n_1 \leq u_2$, $v_1 < n_3 \leq v_2$, где u_1, u_2, v_1, v_2 – некоторые параметры $\leq x^{1/3}$, зависящие от z и x . Часть оцениваемой суммы с $n_1 \leq u \leq x^{1/3}$ после применения леммы 1 будет

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2 d_3)} \sum_{n_1 \leq u_1} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \frac{x}{\ln x} \exp \left(\sum_{y_1 < p \leq x} \frac{|f(p)|}{p} \right) \\ &\ll x \ln^A u_1 \exp \left(- \sum_{p \leq y_1} \frac{|f(p)|}{p} \right) \Pi_{|f|}(x) \ll x \Pi_{|f|}(x) \frac{\ln^A u_1}{\ln^\alpha y_1}. \end{aligned}$$

Если $\ln^A u_1 \leq \ln^\alpha y_1 \cdot \ln^{-\gamma} z$, то оцениваемая часть равна $O(R)$. Действуя аналогично и учитывая (2), получим, что часть суммы, в которой $n_2 \leq v_1 \leq x^{1/3}$, будет

$$\ll x \left(\frac{\ln v_1}{\ln y_1} \right)^A \exp \left(- \sum_{y_1 < p \leq y_2} \frac{|f(p)|}{p} \right) \Pi_{|f|}(x) \ll \frac{\ln^A v_1}{\ln^A y_1} \left(\frac{\ln y_1}{\ln y_2} \right)^\alpha \Pi_{|f|}(x).$$

Если

$$(\ln v_1)^A \ll \frac{\ln^{A+\alpha} y_2}{\ln^\alpha y_1} (\ln z)^{-\gamma},$$

то и эта часть суммы будет равна $O(R)$. Оценим часть суммы, в которой $n_1 \geq u_2$. Разобьем ее на две: в первой $u_2 \leq n_1 < x^{1/3}$, во второй $n_1 \geq x^{1/3}$. Для оценки первой снова применим лемму 1. Получим, что она

$$\begin{aligned} & \ll \frac{x}{\ln x} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2 d_3)} \sum_{u_2 < n_1} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \exp\left(\sum_{y_1 < p \leq x} \frac{|f(p)|}{p}\right) \\ & \ll \frac{x}{\ln u_2} \sum_{n_1} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \ln n_1 \exp\left(\sum_{y_1 < p \leq x} \frac{|f(p)|}{p}\right) \\ & \ll \frac{x}{\ln u_2} \sum_{\substack{p \leq y_1 \\ r \geq 1}} \frac{|f(p^r)| \ln p^r}{p^r} \sum_{n_1} \frac{|f(n_1)|}{n_1} \exp\left(\sum_{y_1 < p \leq x} \frac{|f(p)|}{p}\right) \ll \frac{x}{\ln u_2} \ln y_1 \Pi_{|f|}(x). \end{aligned}$$

Если $\ln y_1 \leq \ln u_2 (\ln z)^{-\gamma}$, то оцениваемая часть суммы равна $O(R)$. Вторая сумма будет

$$\ll \sum_{\substack{n \leq x \\ n_1 > x^{1/3}}} |f(n)| \tau(n-a) \ln x \ll \left(\sum_{n \leq x} f^4(n)\right)^{1/4} \left(\sum_{n \leq x} \tau^4(n)\right)^{1/4} \left(\sum_{x^{1/3} < n_1 \leq x} \frac{x}{n_1}\right)^{1/2} \ln x.$$

Будем предполагать, что

$$y_1 < y_2 \leq \exp\left(\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}\right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{x^{1/3} < n_1 \leq x} \frac{1}{n_1} & \ll x^{-1/(3 \ln y_1)} \sum_{n_1} n_1^{-1+1/\ln y_1} \ll \exp\left(-\frac{\ln x}{3 \ln y_1} + \sum_{p \leq y_1} p^{-1} \exp\left(\frac{\ln p}{\ln y_1}\right)\right) \\ & \ll \exp\left(-\frac{\ln x}{3 \ln y_1} + e \ln \ln y_1\right), \end{aligned}$$

получим при нашем условии на y_1

$$\sum_{x^{1/3} < n_1 \leq x} \frac{1}{n_1} \ll \exp\left(-\frac{1}{4}(\ln \ln x)^2\right),$$

т.е. и эта часть суммы равна $O(R)$. Действуя аналогично, получим, что если $\ln y_2 \leq \ln v_2 (\ln z)^{-\gamma}$, то часть суммы $\Delta(z)$, в которой $n_2 > v_2$, будет равна $O(R)$. Пусть $v = u_2 v_2$. Если $n_3 \leq x/(v \ln^\gamma z)$, то $n_1 n_2 n_3 \leq x/(\ln^\gamma z)$, и вклад таких слагаемых после применения леммы 1 будет равен $O(R)$. Подводя итог, при $z \leq \exp((\ln \ln x)^2)$ получим

$$\Delta(z) \leq \sum_{d_3 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{x/(v \ln^\gamma z) < n_3 \leq x/(u_1 v_1)} |f(n_3)| \delta(z, d_3, n_3) + R,$$

где

$$\delta(z, d_3, n_3) = \sum'_{d_1 d_2 \leq Q/d_3} \left| \sum''_{n_3 n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1 d_2}} f(n_1 n_2) - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum''_{\substack{n_3 n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1} \\ (n_1 n_2, d_2)=1}} f(n_1 n_2) \right|.$$

Здесь $\sum'$ означает, что $d_1 d_2 \leq u$, $(d_1 d_2, a n_3) = 1$, $\sum''$ означает, что $n_1 n_2 n_3 \leq x$, $u_1 < n_1 \leq u_2$, $v_1 < n_2$. Возьмем

$$y_1 = \exp(\ln^{\gamma_1} z), \quad y_2 = \exp(\ln^{\gamma_2} z), \quad u_1 = \exp(\ln^{\sigma_1} z), \quad u_2 = \exp(\ln^{\sigma_2} z), \\ v_1 = \exp(\ln^{\delta_1} z), \quad v_2 = \exp(\ln^{\delta_2} z).$$

Условия на параметры примут следующий вид:

$$A\sigma_1 \leq \alpha\gamma_1 - \gamma, \quad A\delta_1 \leq (A + \alpha)\gamma_2 - \alpha\gamma_1 - \gamma, \quad \gamma_1 \leq \sigma_2 - \gamma, \quad \gamma_2 \leq \delta_2 - \gamma.$$

Сделаем суммирования по n_2 и n_1 независимыми.

С этой целью разобьем промежутки изменения n_1 , т.е. $[u_1, u_2]$ на промежутки вида $\mathcal{J}_l = [u_1(1 + \ln^{-D} z)^l, u_1(1 + \ln^{-D} z)^{l+1})$. Число таких промежутков

$$L = O\left(\ln^D z \cdot \ln \frac{u_2}{u_1}\right) = O((\ln z)^{D+\sigma_2+\sigma_1}).$$

Когда $n_1 \in \mathcal{J}_l$, будем считать, что $n_2 \leq x/(n_3 M_l)$, где $M_l = u_1(1 + \ln^{-D} z)^l$. Возникающая при этом ошибка в сумме $\Delta(z)$ будет

$$\ll L \max_l \sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 \leq Q \\ (d_1 d_2, a) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{n_1 \in \mathcal{J}_l} |f(n_1)| \left(\sum_{\substack{x/M_{l+1} < n_2 n_3 \leq x/M_l \\ n_3 n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1 d_2}}} |f(n_2 n_3)| \right. \\ \left. + \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{x/M_{l+1} < n_2 n_3 \leq x/M_l \\ n_3 n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1}}} |f(n_2 n_3)| \right).$$

После применения леммы 1 получим, что эта ошибка

$$\ll \frac{L \Pi_{|f|}(x)}{\ln^D z} \max_l \frac{1}{M_{l+1}} \sum_{n_1 \in \mathcal{J}_l} |f(n_1)| \\ \leq x \ln^{\sigma_2} z \Pi_{|f|}(x) \max_l \left(\frac{1}{M_{l+1}} \sum_{n_1 \leq M_{l+1}} f^2(n_1) \right)^{1/2} \ln^{-D/2} z \\ \ll x (\ln z)^{\sigma_2 + A^2 \gamma_1 / 2 - D/2} \ll R,$$

если $D/2 > \sigma_2 + A^2 \gamma_1 / 2 + \gamma$. Таким образом, задача свелась к оценке

$$\delta'_l(z, d_3, n_3) = \sum'_{d_1 d_2 \leq u} \left| \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{J}_l \\ (n_1, d_2) = 1}} f(n_1) \left(\sum_{\substack{v_1 < n_2 \leq x/(n_3 M_l) \\ n_1 n_3 n_2 \equiv a \pmod{d_1 d_2}}} f(n_2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{v_1 < n_2 \leq x/(n_3 M_l) \\ n_1 n_3 n_2 \equiv a \pmod{d_1} \\ (n_2, d_2) = 1}} f(n_2) \right) \right| \\ \leq \sum_{d_1 d_2 \leq u} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2)} \sum_{\substack{\chi_{d_1}, \chi_{d_2} \\ \chi_{d_2} \neq \chi_0}} \left| \sum_{n_1 \in \mathcal{J}_l} \chi_{d_1 d_2}(n_1) f(n_1) \right| \cdot \left| \sum_{v_1 < n_2 \leq x/(n_3 M_l)} \chi_{d_1 d_2}(n) f(n_2) \right|.$$

Перейдем к примитивным характеристам. Так как $\chi_{d_2} \neq \chi_0$ и $(d_2, P(\sqrt{z})) = 1$, модуль примитивного характера, порождающего $\chi_{d_1}\chi_{d_2}$, будет $\geq \sqrt{z}$. Следовательно, получим

$$\delta'_l(z, d_3, n_3) \leq \sum_{\sqrt{z} < \delta \leq u} \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{m|P(z) \\ m \leq u/\delta}} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi_\delta^*} |S_l(\chi_\delta^*)| \cdot |F_l(\chi_\delta^*)|,$$

где

$$S_l(\chi_\delta^*) = \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{J}_l \\ (n_1, md_3)=1}} \chi_\delta^*(n_1) f(n_1),$$

$$F_l(\chi_\delta^*) = \sum_{\substack{v_1 < n_2 \leq x/(n_3 M_l) \\ (n_2, md_3)=1}} \chi_\delta^*(n_2) f(n_2).$$

Разобьем промежутки изменения δ , т.е. $[\sqrt{z}, u)$, на промежутки $N_t = [2^t \sqrt{z}, 2^{t+1} \sqrt{z})$. В результате получим

$$\begin{aligned} \delta'_l(z, d_3, n_3) &\ll \ln \frac{u}{\sqrt{z}} \max_t \frac{1}{2^t \sqrt{z}} \sum_{\delta \in N_t} \frac{\delta}{\varphi(\delta)} \sum_{\substack{m \leq u/\delta \\ m|P(z)}} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi_\delta^*} |S_l(\chi_\delta^*)| \cdot |F_l(\chi_\delta^*)| \\ &\ll (\ln^{\gamma+2} z) \max_{t,m} \frac{1}{2^t \sqrt{z}} \left(\sum_{\delta \in N_t} \frac{\delta}{\varphi(\delta)} \sum_{\chi_\delta^*} |S_l(\chi_\delta^*)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\delta \in N_t} \frac{\delta}{\varphi(\delta)} \sum_{\chi_\delta^*} |F_l(\chi_\delta^*)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство большого решета (см. [9, теорема 2.5]), получим

$$\begin{aligned} \delta'_l(z, d_3, n_3) &\ll \ln^{\gamma+2} z \cdot \max_t \frac{1}{2^t \sqrt{z}} \left(\left((2^t \sqrt{z})^2 + \frac{M_l}{\ln^D z} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{M_l < n_1 \leq M_l+1} |f^2(n_1)| \left((2^t \sqrt{z})^2 + \frac{x}{M_l n_3} \right) \sum_{n_2 \leq x/(M_l n_3)} |f^2(n_2)| \right)^{1/2} \\ &\ll \ln^{\gamma+2} z \cdot \left(\sum_{n_1 n_2 \leq 2x/n_3} |f^2(n_1 n_2)| \right)^{1/2} \left(u + \sqrt{u_2} + \frac{1}{\sqrt{u_1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n_3}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n_3}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta(z) &\ll (\ln z)^{D+\sigma_2+\gamma+2} \sum_{d_3 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{x/(v \ln^\gamma z) < n_3 \leq x/(u_1 v_1)} |f(n_3)| \\ &\quad \times \left(\sum_{n_1 n_2 \leq 2x/n_3} |f^2(n_1 n_2)| \right)^{1/2} \left(u + \sqrt{u_2} + \frac{1}{\sqrt{u_1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n_3}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n_3}} \right). \end{aligned}$$

Так как $n_3 \leq x/(u_1 v_1)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n_3}} \geq \sqrt{v_1} > \exp\left(\frac{1}{2} \ln^{\delta_1} z\right) > \sqrt{u_2}$$

при $\delta_1 > \sigma_2$. Кроме того, $\sqrt{x}/\sqrt{u_1 n_3} > u$ при $\delta_1 > 1 + \gamma$. Эти предположения не противоречат ранее принятым условиям на параметры. Поэтому

$$\Delta(z) \ll (\ln z)^{D+\sigma_2+\gamma+1} \frac{x \ln x}{\sqrt{u_1}} \sum_{x/(v \ln^\gamma z) < n_3 \leq x/(v_1 u_1)} \frac{|f(n_3)|}{n_3} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq y_2} \frac{|f^2(p)|}{p}\right).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{x/(v \ln^\gamma z) < n_3 \leq x/(v_1 u_1)} \frac{|f(n_3)|}{n_3} &\leq \ln \frac{2v \ln^\gamma z}{v_1 u_1} \max_{x/(v \ln^\gamma z) \leq T \leq x/(v_1 u_1)} \frac{1}{T} \sum_{n_3 \leq 2T} |f(n_3)| \\ &\ll \ln \frac{2v \ln^\gamma z}{v_1 u_1} \Pi_{|f|}(x), \end{aligned}$$

получаем

$$\Delta(z) \ll x(\ln z)^{B_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \ln^{\sigma_1} z\right) \exp(A^2 \ln \ln y_2) \Pi_{|f|}(x) \ll R.$$

Пусть теперь $\exp((\ln \ln x)^2) < z \leq Q$. В этом случае представим n в виде $n = n_1 n_2$, где $n_1 \mid P(y_1)$, а $(n_2, P(y_1)) = 1$. Действуя, как и ранее, мы можем считать, что $u_1 < n_1 \leq u_2 \leq x^{1/3}$, $n_2 \geq x/(u_2 \ln^\gamma z) = v_1$, где

$$(\ln u_1)^\Delta \leq (\ln y_1)^\alpha (\ln z)^{-\gamma}, \quad y_1 = \exp\left(\frac{\ln x}{(\ln \ln x)^2}\right).$$

Возьмем $u_1 = \exp((\ln \ln x)^2)$. Область изменения n_1 разобьем на промежутки $\mathcal{J}_l = [u_1(1 + (\ln x)^{-D})^l, u_1(1 + (\ln x)^{-D})^{l+1})$. Число промежутков $L = O((\ln x)^{D+1})$. Когда $n_1 \in \mathcal{J}_l$, будем считать, что $n_2 \leq x/M_l$, где $M_l = u_1(1 + (\ln x)^{-D})^l$, а не $n_2 \leq x/n_1$. Возникающая при этом ошибка будет

$$\begin{aligned} &\ll L \max_l \sum_{\substack{d_1 d_2 d_3 \leq Q \\ (d_1 d_2 d_3, a) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{n_1 \in \mathcal{J}_l} |f(n_1)| \left(\sum_{\substack{x/M_{l+1} < n_2 \leq x/M_l \\ n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1 d_2}}} |f(n_2)| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{x/M_{l+1} < n_2 \leq x/M_l \\ n_1 n_2 \equiv a \pmod{d_1}}} |f(n_2)| \right). \end{aligned}$$

После применения леммы 1 получим, что эта ошибка

$$\begin{aligned} &\ll x \ln x \max_l \frac{1}{M_l} \sum_{n_1 \in \mathcal{J}_l} |f(n_1)| \Pi_{|f|}(x) \\ &\ll x \ln x \max_l \left(\frac{1}{M_{l+1}} \sum_{n_1 \leq M_{l+1}} |f(n_1)|^2 (\ln x)^{-D} \right)^{1/2} \\ &\ll x (\ln x)^{1+A^2/2-D/2} \Pi_{|f|}(x) \ll R, \end{aligned}$$

если $D \geq A^2 + 1 + 2\gamma$.

Далее, как и ранее, используя характеры, избавимся от условия, что $n_1 n_2$ входит в прогрессии. Затем перейдем к примитивным характерам. В результате получим

$$\Delta(z) \ll L \max_l \sum_{m \leq x} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\sqrt{z} < \delta \leq Q} \frac{1}{\varphi(\delta)} \sum_{\chi_\delta^*} |S_l(\chi_\delta^*)| \cdot |F_l(\chi_\delta^*)| + R,$$

где

$$S_l(\chi_\delta^*) = \sum_{\substack{n_1 \in \mathcal{J}_l \\ (n_1, m)=1}} \chi_\delta^*(n_1) f(n_1), \quad F_l(\chi_\delta^*) = \sum_{\substack{v_1 < n_2 \leq x/M_l \\ (n_2, m)=1}} \chi_\delta^*(n_2) f(n_2).$$

Разбив промежуток изменения δ на промежутки вида $N_t = [2^t \sqrt{z}, 2^{t+1} \sqrt{z})$, применив неравенство Коши и неравенство большого решета, получим

$$\begin{aligned} \Delta(z) &\ll (\ln x)^{D+2} \max_l \max_t \frac{1}{2^t \sqrt{z}} ((2^t \sqrt{z})^2 + M_{l+1}) \\ &\quad \times \left(\sum_{n \leq M_{l+1}} |f(n)|^2 \left((2^t \sqrt{z})^2 + \frac{x}{M_l} \right) \sum_{n \leq x/M_l} |f(n)|^2 \right)^{1/2} \\ &\ll (\ln x)^{D+2+A^2} \left((Q + \sqrt{u_2}) \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{u_1}} + \frac{x}{\sqrt{z}} \right) \ll \frac{x}{\ln^\gamma x}, \end{aligned}$$

если $B \geq D + 2 + A^2 + \gamma \geq A^2 + 1 + 2\gamma + 2 + A^2 + \gamma = 3 + 2A^2 + 3\gamma$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $f(n)$ – комплекснозначная мультипликативная функция, $|f(n)|$ удовлетворяет условиям теоремы, a – фиксированное число. Тогда при $Q \leq \sqrt{x} \times (\ln x)^{-B}$, $B \geq 3 + 2A^2 + 3\gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(z) &= \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq Q, d_1 | P(z) \\ (d_2, P(z))=1, (d_1 d_2, a)=1}} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1 d_2}}} f(n) - \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1} \\ (n, d_2)=1}} f(n) \right| \\ &\ll \frac{x}{\ln^\gamma z} \Pi_{|f|}(x). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим d_2 в виде $d'_2 d_3$, где $d'_2 \mid P(z^2)$, $(d'_2, P(z)) = 1$, $(d_3, P(z^2)) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1} \\ (n, d_2)=1}} f(n) &= \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1 d'_2} \\ (n, d_3)=1}} f(n) - \frac{1}{\varphi(d_3)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1 d'_2} \\ (n, d_3)=1}} f(n) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(d_3 d'_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{d_1} \\ (n, d'_2 d_3)=1}} f(n). \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{\delta}(z) \leq \tilde{\delta}(z^2) + \Delta(z)$. Повторив это k раз, имеем

$$\tilde{\delta}(z) \leq \tilde{\delta}(z^{2^k}) + \Delta(z) + \Delta(z^2) + \dots + \Delta(z^{2^{k-1}}).$$

Подставляя из леммы 2 оценку

$$\Delta(z^{2^k}) \ll \frac{x \Pi_f(x)}{2^{\gamma k} \ln^\gamma z}$$

и учитывая, что при $2^k \geq \ln Q / \ln z$ $\tilde{\delta}(z^{2^k}) = 0$, получим утверждение леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Представив $\tau(n-1)$ как сумму по делителям и просуммировав под гиперболой, получим

$$S(f, x) = 2 \sum_{d \leq Q} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{d}}} f(n) + O \left(\sum_{Q < d \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{d}}} f(n) + \sum_{d \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x}d \\ n \equiv 1 \pmod{d}}} f(n) \right).$$

Возьмем $Q = \sqrt{x} / \ln^B x$, где $B \geq 3 + 2A^2 + 3\gamma$. Согласно лемме 1 остаточный член

$$\ll \frac{1}{\ln x} \Pi_f(x) \left(x \sum_{Q < d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(d)} + \sqrt{x} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{d}{\varphi(d)} \right) \ll \frac{x \ln \ln x}{\ln x} \Pi_f(x).$$

К главному члену применим лемму 3. Тогда имеем

$$S(f, x) = 2 \sum_{\substack{d_1 d_2 \leq Q, d_1 | P(z) \\ (d_2, P(z)) = 1}} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{d_1} \\ (n, d_2) = 1}} f(n) + O(R),$$

где

$$R = \frac{x}{\ln^\gamma z} \Pi_f(x).$$

Часть суммы, в которой $d_1 > e^z$, будет

$$\ll \frac{x \Pi_f(x)}{z \ln x} \sum_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{\ln d_1}{\varphi(d_1 d_2)} \ll x \Pi_f(x) \frac{\ln z}{z}.$$

Во внутренней сумме избавимся от условия $(n, d_2) = 1$. Допускаемая ошибка при этом будет

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{z < p \leq Q} \frac{f(p)}{\varphi(p)} \sum_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x/p \\ pn \equiv 1 \pmod{d_1}}} f(n) \\ &+ \sum_{\substack{p^r \leq y \\ r \geq 2, p > z}} \frac{f(p^r)}{p^r} \sum_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x/p^r \\ p^r n \equiv 1 \pmod{d_1}}} f(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ \exists p^r, r \geq 2, p^r > y, p^r | n}} f(n) \tau(n-1). \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, получим, что две первые суммы равны $O\left(\frac{x}{z} \Pi_f(x)\right)$. А к третьей сумме применяем неравенство Коши и, пользуясь теоремой п. 10 из [10], находим, что она

$$\begin{aligned} & \ll \left(\sum_{n \leq x} f^4(n) \sum_{n \leq x} \tau^4(n) \right)^{1/4} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ \exists p^r, r \geq 2, p^r > y, p^r | n}} 1 \right)^{1/2} \\ & \ll \left(x^2 (\ln x)^{A^4 + 2^4} \right)^{1/4} x^{1/2} \left(\sum_{\substack{p^r > y \\ r \geq 2}} \frac{1}{p^r} \right)^{1/2} \ll \frac{x}{\sqrt{y}} \ln^{A^4/4 + 4} x. \end{aligned}$$

Выбирая $y = (\ln x)^{2\gamma + A^4/2 + 8}$, убедимся, что эта ошибка равна $O(R)$. Следовательно,

$$S(f, x) = 2 \sum'_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{d_1}}} f(n) + O(R).$$

Здесь штрих означает, что сумма распространяется по $d_1 \mid P(z)$, $d_1 \leq e^z$, $(d_2, P(z)) = 1$. Используя характеры, избавимся от условия, что n входит в прогрессии. Характеры, для которых ряд (3) сходится, обозначим через χ' , остальные – через χ'' .

Тогда можно записать

$$S(f, x) = 2(S' + S'') + O(R),$$

где

$$\begin{aligned} S' &= \sum'_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2)} \sum_{\chi'_{d_1}} \sum_{n \leq x} \chi'_{d_1}(n) f(n), \\ S'' &= \sum_{d_1 d_2 \leq Q} \frac{1}{\varphi(d_1 d_2)} \sum_{\chi''_{d_1}} \sum_{n \leq x} \chi''_{d_1}(n) f(n). \end{aligned}$$

Оценим S'' . Если при $t \neq 0$ сходится ряд

$$\sum_p \frac{f(p)(1 - \operatorname{Re} \chi''_{d_1}(p)p^{-it})}{p},$$

то сходится ряд, в котором $\chi''_{d_1}(p)p^{-it}$ заменено на $(\chi''_{d_1}(p)p^{-it})^n$, где n – натуральное. Возьмем n таким, что $(\chi''_{d_1}(p))^n = \chi_0(p)$. Тогда получим, что ряд

$$\sum_p \frac{f(p)(1 - \cos nt \ln p)}{p}$$

сходится. Расходимость последнего ряда при $t \neq 0$ следует из леммы 4 [11]. Поэтому согласно теореме 1 [11]

$$\sum_{n \leq x} \chi''_{d_1}(n) f(n) = o\left(\sum_{n \leq x} f(n)\right).$$

Отметим, что в [11] теорема 1 доказана при предположении $|f(p^r)| \leq C$. Однако, затем эта теорема была доказана (см. [12, теорема 2]) для более широкого класса, в который входят функции $\chi(n)f(n)$, где $f(n)$ удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом,

$$S'' = o\left(e^z \ln x \sum_{n \leq x} f(n)\right).$$

Если для χ'_{d_1} ряд (3) сходится, то для примитивного характера χ_δ^* , порождающего характер χ'_{d_1} , этот ряд также сходится. Однако, число примитивных характеров, для которых ряд (3) сходится, ограничено и будет $\leq A/\alpha$. Действительно, пусть $\chi_{\delta_1}^*, \dots, \chi_{\delta_k}^*$ – различные примитивные характеры, для которых сходится ряд (3). Если d делится на $\delta_1, \dots, \delta_k$, то по модулю d найдется k различных характеров $\chi_1, \dots, \chi_k$, порожденных $\chi_{\delta_1}^*, \dots, \chi_{\delta_k}^*$. Обозначим через H подгруппу Z_d^* , на которой $\chi_1, \dots, \chi_k \equiv 1$. Пусть G – группа характеров Z_d^* и G_1 – подгруппа G , состоящая из всех характеров $\chi(a) = 1$ для всех $a \in H$. Тогда (см., например, [13, с. 474–476]) факторгруппа Z_d^*/H будет изоморфна группе характеров G_1 . Тем самым, $|Z_d^*/H| = |G_1|$. Так как $|G_1| \geq k$, то $|H| \leq \varphi(d)/k$.

С другой стороны, из сходимости ряда (3) следует, что

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \chi_i(p) \neq 1}} \frac{f(p)}{p} = O(1),$$

поэтому

$$\sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} = \sum_{a \in H} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{d}}} \frac{f(p)}{p} + O(1) \leq \frac{A}{k} \ln \ln x + O(1).$$

Если $k > A/\alpha$, то последнее противоречит (2). Таким образом, если $\chi_{\delta_1}^*, \dots, \chi_{\delta_k}^*$ – все примитивные характеры, удовлетворяющие условию (3), то

$$S' = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varphi(\delta_i)} \sum_{n \leq x} \chi_{\delta_i}^*(n) f(n) \sum_{\substack{\delta_i d_1 d_2 \leq Q \\ (d_1, n)=1 \\ \delta_i d_1 \leq e^z}} \frac{\varphi(\delta_i)}{\varphi(\delta_i d_1 d_2)}.$$

Внутренняя сумма равна

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{d_1 | P(z) \\ (d_1, n)=1}} \frac{\varphi(\delta_i)}{\varphi(\delta_i d_1)} + O\left(\sum_{d_1 > e^z / \delta_i} \frac{1}{\varphi(d_1)} \right) \right) \left(\sum_{d_1 | P(z)} \frac{1}{\varphi(d_1)} + O\left(\sum_{\substack{d_1 > Q \\ d_1 | P(z)}} \frac{1}{\varphi(d_1)} \right) \right)^{-1} \\ & \times \sum_{\substack{d_1 | P(z) \\ d_1 \leq Q}} \frac{1}{\varphi(d_1)} \left(\sum_{\substack{d_2 \leq Q/d_1 \\ (d_2, P(z))=1}} \frac{1}{\varphi(d_2)} + O\left(\sum_{Q/(\delta_i d_1) < d \leq Q/d_1} \frac{1}{\varphi(d)} \right) \right) \\ & = \frac{\zeta(2)\zeta(3) \ln x}{2\zeta(6)} \prod_{p | \delta_i} \frac{p(p-1)}{p^2 - p + 1} \prod_{\substack{p | n \\ p \leq z}} \frac{(p-1)^2}{p^2 - p + 1} + O\left(\frac{\ln^3 z}{z} \ln x \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (см., например, [9, с. 140])

$$\sum_{d \leq Q} \frac{1}{\varphi(d)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{2\zeta(6)} \ln x + O(1).$$

Следовательно,

$$S' = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln x \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varphi(\delta_i)} \prod_{p|\delta_i} \frac{p(p-1)}{p^2-p+1} \sum_{n \leq x} f_i(n),$$

где $f_i(n)$ – мультипликативная функция такая, что

$$f_i(p^r) = \begin{cases} \chi_{\delta_i}^*(p^r) f(p^r) \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} & \text{при } p \leq z, \\ \chi_{\delta_i}^*(p^r) f(p^r) & \text{при } p > z. \end{cases}$$

Ряды

$$\sum_p \frac{1}{p} (f(p) - f_i(p))$$

сходятся, поэтому, применяя теорему 2 из [11], получим

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln x \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varphi(\delta_i)} \prod_{p|\delta_i} \frac{p(p-1)}{p^2-p+1} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right)^{-1} \\ &\times \prod_{p \nmid \delta_i} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_{\delta_i}^*(p^r) f(p^r)}{p^r} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \right)^{-1} \\ &\times \prod_{p > z} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_{\delta_i}^*(p^r) f(p^r)}{p^r} \right) \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_{\delta_i}^*(p^r) f(p^r)}{p^r} \frac{(p-1)^2}{p^2-p+1} \right)^{-1} \\ &\times (1 + o(1)) \sum_{n \leq x} f(n) + O\left(\frac{x \ln^3 z}{z} \Pi_f(x)\right). \end{aligned}$$

Из сходимости рядов

$$\sum_p \frac{f(p)}{p} (1 - \chi_{\delta_i}^*(p))$$

следует, что произведение по $p > z$ равно $1 + O(\varepsilon(z))$, где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

В работах [11], [12] (см., например, [11, с. 42]) доказано, что если $f(n)$ удовлетворяет условиям теоремы, то

$$\frac{x}{\ln x} \Pi_f(x) \ll \sum_{n \leq x} f(n).$$

Таким образом, имеем

$$S(f, x) = C(f) \ln x (1 + o(1) + O(\varepsilon(z))) \sum_{n \leq x} f(n)$$

при любом фиксированном z , где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Отсюда следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
- [2] Виноградов А. И. О плотностной гипотезе для L -рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 4. С. 903–934.
- [3] Уфимцева Л. И. Обобщение аддитивной проблемы делителей // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 477–482.
- [4] Бредихин Б. М., Уфимцева Л. И. Бинарные аддитивные задачи и мультипликативные функции // Тр. МИАН. 1972. Т. 128. С. 66–75.
- [5] Тимофеев Н. М. Аналог теоремы Халоса в случае обобщения аддитивной проблемы делителей // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 1. С. 116–127.
- [6] Хрипунова М. Б. Суммы мультипликативных функций со сдвинутыми аргументами // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 136–138.
- [7] Гедири Х. Асимптотика среднего значения функции делителей по сдвинутым гауссовым числам. Автореферат дисс. ... к. ф.-м. н. М., 1996.
- [8] Shiu P. A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 313. P. 161–170.
- [9] Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.
- [10] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [11] Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Теорема сравнения для мультипликативных функций // Acta Arith. 1982. V. 42. P. 21–47.
- [12] Туляганов С. Т. Средние значения мультипликативных функций // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 117–127.
- [13] Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1972.

Владимирский педагогический государственный университет
Институт математики АН Республики Узбекистан

Поступило
08.01.97