Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Хрипунова, Об одной мультипликативной функции на множестве сдвинутых простых чисел, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 457–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:05:05

УДК 511.3

ОБ ОДНОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. Хрипунова

Доказано, что если $f(n)$ – мультипликативная функция, принимающая на множестве простых чисел значение ξ , где $\xi^3 = 1$, $\xi \neq 1$ и $f^3(p^r) = 1$ при $r \geq 2$, то существует $\theta \in (0, 1)$, для которого

$$\left| \sum_{p \leq x} f(p+1) \right| \leq \theta \pi(x), \quad \text{где } \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Библиография: 6 названий.

Существует гипотеза о том, что если $f(n)$ – мультипликативная функция и $f(p+1) = 1$ для любого простого p , то $f(n) \equiv 1$. Мейеру [1] удалось доказать, что в этом случае существует $k \leq 4$, при котором $f^k(n) \equiv 1$.

Можно рассмотреть другой вариант этой гипотезы. Предположим, что $|f(n)| \leq 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} f(p+1) = 1, \quad \text{где } \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Тогда ожидается, что $f(n) \equiv 1$. В этом случае Хильдебрант [2] показал, что существует $k \leq c_1$, где c_1 – некоторая большая постоянная, при котором $f^k(n) \equiv 1$. Н. М. Тимофеев [3] доказал, что этот результат верен при $k \leq 4$. Дальнейшие исследования в этом направлении и интересные следствия можно найти в работе Эллиотта [4]. Тем не менее в настоящее время вопрос о верности неравенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{\pi(x)} \left| \sum_{p \leq x} f(p+1) \right| < 1, \quad \text{где } f(n) \neq 1, \quad (n, 2) = 1, \quad (1)$$

остается открытым. Так неравенство (1) не доказано, в частности, для функций $f(n)$ таких, что $f^3(n) \equiv 1$ или $f^2(n) \equiv 1$. Например, неравенство (1) не доказано для $\lambda(n)$ – функции Лиувилля $\lambda(p^r) = (-1)^r$; т.е. пока не удалось получить нетривиальную оценку для суммы

$$\sum_{p \leq x} f(p+1),$$

если f на простых числах принимает значение -1 .

Целью настоящей работы является следующий результат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00502.

ТЕОРЕМА. Если $f(n)$ – мультипликативная функция, принимающая на простых числах значение ζ , где $\zeta^3 = 1$, $\zeta \neq 1$ и $f^3(p^r) = 1$ при $r \geq 2$, то существует постоянная $0 < \theta < 1$ такая, что при $x \geq x_0$

$$\left| \sum_{p \leq x} f(p+1) \right| \leq \theta \pi(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\zeta^k = 1$, ζ – первообразный корень k -й степени из единицы, $k > 3$, то этот результат вытекает из работ Тимофеева [3] и Эллиотта [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать решето и метод Чена, с помощью которого он получил оценку снизу для чисел $p+2$, $p \leq x$, имеющих не более двух простых делителей. Мы будем применять его, следуя схеме работы [5].

Итак, пусть P_2 – числа, имеющие не более двух простых делителей, каждый из которых больше x^β , $\beta = 1/10$, n_1 – четные числа, $n_1 \leq x^\alpha$, $\alpha \leq \beta$, удовлетворяющие некоторым условиям, которые введем позже.

Обозначим

$$P(y) = \prod_{p \leq y} p, \quad S(n_1) = |\{p : p \leq x, p+1 = n_1 P_2\}|.$$

Докажем неравенство

$$\sum'_{n_1} S(n_1) \geq \frac{\pi(x)\Lambda}{\ln x} (0.64 + O(\alpha)) \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)}, \quad (2)$$

где

$$g(n_1) = \prod_{\substack{p|n_1 \\ p \neq 2}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad g(2^r) = 1, \quad \Lambda = \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Здесь и ниже $\sum'$ обозначает, что n_1 пробегает некоторое подмножество, которое будет выбрано позже, и $n_1 \leq x^\alpha$, n_1 – четное, $\alpha \leq 0.1$ – абсолютная постоянная, входящая в символ $O(\alpha)$.

Имеем

$$\begin{aligned} S(n_1) &\geq \left| \left\{ p : p \leq x, p+1 \equiv 0 \pmod{n_1}, \left(\frac{p+1}{n_1}, P(x^\beta) \right) = 1 \right\} \right| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \left| \left\{ p : p \leq x, p+1 \equiv 0 \pmod{p_1 n_1}, \left(\frac{p+1}{p_1 n_1}, P(x^\beta) \right) = 1 \right\} \right| \\ &\quad - \frac{1}{2} \left| \left\{ p : p \leq x, p+1 = n_1 p_1 p_2 p_3, \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/10} \leq p_1 \leq \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3} \leq p_2 \leq \left(\frac{x}{p_1 n_1} \right)^{1/2} \right\} \right| + O\left(\left(\frac{x}{n_1} \right)^{1-\beta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Это неравенство подобно неравенству (2.1) из [6, с. 321] и проверяется аналогично.

Обозначим первое слагаемое в правой части неравенства (3) через $S_1(n_1)$ и, пользуясь линейным решетом, найдем для него оценку снизу (см. [6, теорема 8.4]). Возьмем

$$\xi^2 = \frac{\sqrt{x}}{n_1 \log^A x}, \quad \frac{\rho(d)}{d} = \frac{\varphi(n_1)}{\varphi(n_1 d)},$$

$\varphi(n)$ – функция Эйлера, $X = \pi(x)/\varphi(n)$, $z = x^\beta/n_1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sum'_{n_1} S_1(n_1) \geq \sum'_{n_1} \pi(x) \frac{1}{\varphi(x)} \prod_{p < x^\beta} \left(1 - \frac{\varphi(n_1)}{\varphi(n_1 p)}\right) & \left(f\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right) - B \frac{L}{(\log \xi)^{1/14}} \right) \\ & - \sum'_{n_1} \sum_{\substack{d \leq \xi^2 \\ d|P(x^\beta)}} 3^{\omega(d)} \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv -1 \pmod{dn_1}}} 1 - \frac{\varphi(n_1)}{\varphi(n_1 d)} \frac{\pi(x)}{\varphi(n_1)} \right|. \end{aligned}$$

По теореме Виноградова–Бомбьери [5] получим, что остаток есть

$$O\left(\frac{x}{\log^B x}\right),$$

где $B = B(A)$ – положительная постоянная. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum'_{n_1} S(n_1) \geq \frac{1}{2} \prod_{2 < p < x^\beta} \left(1 - \frac{1}{1-p}\right) \pi(x) \sum'_{n_1} \frac{1}{\varphi(n_1)} \prod_{\substack{p|n_1 \\ p \neq 2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} \\ \times \left(f\left(\frac{\log \xi^2}{\log x^\beta}\right) - B \frac{L}{(\log x)^{1/14}} \right) + O\left(\frac{x}{\log^B x}\right). \end{aligned}$$

Далее проверим выполнение условий линейного решета (см. [6, с. 228]). Имеем

$$\sum_{\omega \leq p < z} \frac{\varphi(n_1 p)}{\varphi(p)} \log p = \sum_{\substack{\omega \leq p < z \\ p|n_1}} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{\omega \leq p < z \\ p \nmid n_1}} \frac{\log p}{p-1} = \log \frac{z}{\omega} + O(1),$$

т.е. условие выполнено с $L = O(1)$.

Так как $f(t)$ – монотонно возрастающая и дифференцируемая функция, имеем

$$f\left(\frac{\log \xi^2}{\log x^\beta}\right) \geq f\left(\frac{1/2 - \alpha}{\beta}\right) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \geq f(5) + O(\alpha).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\beta = 0.1$. Окончательно для первой суммы получим

$$\sum'_{n_1} S_1(n_1) \geq \frac{1}{2} \pi(x) (f(5) + O(\alpha)) \prod_{2 < p < z} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} + O\left(\frac{x}{\log^\beta x}\right). \quad (4)$$

Оценим сверху $S'_1(p_1 n_1)$ – вторую сумму в правой части неравенства (3), просуммировав ее по n_1 . Применив оценку сверху линейного решета (см. [6, теорема 8.4]), получим

$$\begin{aligned} & \sum'_{n_1} \frac{1}{2} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} S'_1(p_1 n_1) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum'_{n_1} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \frac{\pi(x)}{\varphi(p_1 n_1)} \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\varphi(n_1)}{\varphi(n_1 p)}\right) \\ & \quad \times \left(F\left(\frac{\log \xi^2}{\log x^\beta}\right) + O\left(\frac{L}{(\log \xi)^{1/14}}\right) \right) \\ & \quad + \sum'_{n_1} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \sum_{d \leq \xi^2} 3^{\omega(d)} \left| \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{n_1 p_1 d}}} 1 - \frac{\varphi(n_1 p_1)}{\varphi(n_1 p_1 d)} \frac{\pi(x)}{\varphi(n_1 p_1)} \right|. \end{aligned}$$

Мы применили линейное решето с

$$\frac{\rho(d)}{d} = \frac{\varphi(n_1 p_1)}{\varphi(n_1 p_1 d)}, \quad X = \frac{\pi(x)}{\varphi(n_1 p_1)}, \quad L = O(1), \quad \xi^2 = \frac{\sqrt{x}}{n_1 p_1 \log^A x}.$$

Оценим остаток, как и в первом случае. Он будет равен $O(x \log^{-B} x)$. $F(t)$ – монотонно убывающая и дифференцируемая функция, поэтому

$$F\left(\frac{\log \xi^2}{\log z}\right) \leq F\left(5 - 10 \frac{\log p_1}{\log x}\right) + O(\alpha).$$

Следовательно, исследуемая сумма

$$\begin{aligned} & \leq \frac{\pi(x)}{4} \prod_{2 < p < z} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \sum'_{n_1} \frac{1}{\varphi(n_1)} \prod_{\substack{p|n_1 \\ p \neq 2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} \\ & \quad \times \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \frac{1}{\varphi(p_1)} \left(F\left(5 - 10 \frac{\log p_1}{\log x}\right) + O(\alpha) \right) + O\left(\frac{x}{\log^B x}\right). \end{aligned}$$

Преобразуем сумму по p_1 . Учитывая, что части суммы по $p_1 \in [(x/n_1)^{1/3}, x^{1/3}]$ и $p_1 \in [(x/n_1)^{1/10}, x^{1/10}]$ есть $O(\alpha)$, применив суммирование по Абелю, получим, что эта сумма равна

$$\int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t} + O(\alpha).$$

Итак, используя (4), имеем

$$\begin{aligned} & \sum'_{n_1} S_1(n_1) - \frac{1}{2} \sum'_{n_1} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p \leq (x/n_1)^{1/3}} S'(n_1 p) \geq \frac{\pi(x)}{2} \prod_{2 < p < z} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \\ & \quad \times \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \left(f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t} + O(\alpha) \right) + O\left(\frac{x}{\log^B x}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Исследуем третье слагаемое в (3), обозначив его через $S_0(n_1)$. Имеем

$$S_0(n_1) \leq \frac{1}{2} \left| \left\{ p : p_1 p_2 p_3 \leq \frac{x+1}{n_1}, \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/10} \leq p_1 \leq \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3}, \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3} \leq p_2 \leq \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/2}, (n_1 p_1 p_2 p_3 - 1, P(\sqrt{x})) = 1 \right\} \right| + \sqrt{x}.$$

Для его оценки применим опять линейное решето, взяв

$$X = \left| \left\{ p_1 p_2 p_3 \leq \frac{x+1}{n_1}, \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/10} \leq p_1 \leq \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3}, \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/3} \leq p_2 \leq \left(\frac{x}{n_1} \right)^{1/2} \right\} \right|, \\ \frac{\rho(p)}{p} = \begin{cases} \frac{1}{\varphi(p)}, & \text{если } p \nmid n_1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}, \quad \xi^2 = \frac{\sqrt{x}}{n_1 \log^A x}, \quad z = \xi.$$

Получим

$$\frac{1}{2} \sum'_{n_1} S_0(n_1) \leq \frac{1}{2} \sum'_{n_1} X \prod_{\substack{p \leq \xi \\ p \nmid n_1}} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \left(F(2) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/14}} \right) \right) \\ + \sum'_{n_1} \sum_{\substack{d \leq \xi^2 \\ d | P(z) \\ (d, n_1)=1}} 3^{\omega(d)} \left| X(d) - \frac{1}{\varphi(d)} X \right|,$$

где через $X(d)$ обозначено число чисел из X , удовлетворяющих условию $n_1 p_1 p_2 p_3 \equiv 1 \pmod{d}$.

После применения леммы 3 из [5] получим, что вторая сумма в последнем выражении равна $O(x \log^{-B} x)$.

Так как

$$X = \frac{1}{n_1} \sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \sum_{(x/n_1)^{1/3} \leq p_2 \leq (x/n_1)^{1/2}} \left(\frac{x}{p_1 p_2 \log(x/(n_1 p_1 p_2))} \right) \\ + O\left(\frac{x}{p_1 p_2 \log^2 x} \right),$$

используя лемму 11.1 из [6], в силу которой

$$\sum_{(x/n_1)^{1/10} \leq p_1 \leq (x/n_1)^{1/3}} \sum_{(x/n_1)^{1/3} \leq p_2 \leq (x/n_1)^{1/2}} \frac{1}{p_1 p_2 \log(x/(n_1 p_1 p_2))} \leq \frac{0.493}{\log(x/n_1)},$$

получим

$$\frac{1}{2} \sum'_{n_1} S_0(n_1) \leq \frac{1}{2} \frac{0.493}{\log x} \prod_{2 < p < x^{1/4}} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right) \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} (F(2) + O(\alpha)) + O\left(\frac{x}{\log^B x} \right).$$

А теперь, учитывая, что по формуле Мертенса

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),$$

где γ – постоянная Эйлера, из (3) и (5) находим

$$\begin{aligned} \sum'_{n_1} S(n_1) &\geq 2\Lambda \frac{x}{\log^2 x} \sum'_{n_1} \frac{1}{\varphi(n_1)} g(n_1) \left(10e^{-\gamma} \left(f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 0.493 \cdot 4 \cdot e^{-\gamma} F(2) + O(\alpha)\right) + O\left(\frac{x}{\log^B x}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\prod_{2 < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) = 2 \left(\Lambda + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Так как (см. [6, с. 323])

$$20e^{-\gamma} \left(f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t}\right) \geq 2.64056 \quad \text{и} \quad F(2) = e^{\gamma},$$

имеем

$$20e^{-\gamma} \left(f(5) - \frac{1}{2} \int_3^{10} F\left(5 - \frac{10}{t}\right) \frac{dt}{t}\right) - 4 \cdot 0.493 \cdot e^{-\gamma} \cdot F(2) \geq (1.32 - 1)2 \approx 0.64;$$

поэтому справедливо неравенство

$$\sum'_{n_1} S(n_1) \geq \Lambda \frac{x}{\log^2 x} (0.64 + O(\alpha)) \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)}$$

и можно считать, что доказано неравенство (2).

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы. Предположим, что по некоторой последовательности x_l

$$\lim_{x_l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x_l)} \left| \sum_{p \leq x_l} f(p+1) \right| = 1.$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi(x_l)} \left| \sum_{p \leq x_l} f(p+1) \right| = \frac{1}{\pi(x_l)} \sum_{p \leq x_l} f(p+1) e^{-i\varphi(x_l)},$$

где

$$\varphi(x_l) = \arg \sum_{p \leq x_l} f(p+1).$$

Выделим из x_l подпоследовательность, для которой $\varphi(x_l) \rightarrow \varphi_0$. Тогда

$$\frac{1}{\pi(x_l)} \sum_{p \leq x_l} e^{i\varphi_0} f(p+1) \rightarrow 1.$$

Введем функцию

$$f_1(n) = \begin{cases} f(n), & \text{если } (n, 2) = 1, \\ f(2^r)e^{-i\varphi_0}, & \text{если } n = 2^r. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi(x_l)} \sum_{p \leq x_l} f_1(p+1) \rightarrow 1.$$

Последнее равносильно соотношению

$$\frac{1}{\pi(x_l)} \sum_{p \leq x_l} (1 - \operatorname{Re} f_1(p+1)) \rightarrow 0.$$

Следовательно, с одной стороны мы имеем

$$S_1 = \frac{1}{\pi(x_l)} \sum'_{\substack{n_1 P_2 \leq x_l \\ n_1 P_2 = p+1}} (1 - \operatorname{Re} f_1(n_1 P_2)) \rightarrow 0. \quad (6)$$

С другой стороны, мы доказали неравенство (2), по которому

$$\sum'_{n_1} S(n_1) = \sum'_{\substack{n_1 P_2 \leq x_l \\ n_1 P_2 = p+1}} 1 \geq \delta \frac{x_l}{\log^2 x_l} \sum'_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)},$$

где $\delta > 0$ – постоянная.

Теперь уточним дополнительные условия, накладываемые на множество, которому принадлежит n_1 . Пусть это множество таково, что $(1 - \operatorname{Re} f_1(n_1 P_2)) > \gamma > 0$. Обозначим это множество $M = M(x^\alpha, \gamma)$. Тогда

$$S_1 \geq \frac{\gamma}{\pi(x_l)} \sum'_{n_1} S(n_1) \geq \delta \frac{\gamma}{2\pi(x_l)} \frac{x_l}{\log^2 x_l} \sum_{n_1 \in M} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)}.$$

Покажем, что

$$\sum_{n_1 \in M} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \geq \gamma_1 \log x, \quad \gamma_1 > 0, \quad (7)$$

тем самым получим противоречие с (6). Напомним, что $f(P_2)$ равно либо ζ , либо ζ^2 . Если $e^{-i\varphi_0} \neq \zeta, \zeta^2$, то положим

$$M = \{n_1 : n_1 \leq x^\alpha, f(n_1) = 1, n_1 - \text{четное}\}.$$

Если $e^{-i\varphi_0} = \zeta$, то в описании множества M условие $f(n_1) = 1$ заменим на $f(n_1) = \zeta^2$. При $e^{-i\varphi_0} = \zeta^2$ заменим условие $f(n_1) = 1$ на $f(n_1) = \zeta$. При таком выборе множества M , как нетрудно видеть, неравенство $(1 - \operatorname{Re} f_1(n_1 P_2)) > \gamma$ выполняется. Докажем неравенство (7) в случае $f(n_1) = 1$. При $\sigma \leq \alpha$ имеем

$$\sum_{n_1 \in M} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \geq \frac{1}{3} \sum''_{n_1 | P(x^\sigma)} g(n_1) \frac{1 + f(n_1) + f^2(n_1)}{\varphi(n_1)} - \sum_{n_1 | P(x^\sigma), n_1 > x^\alpha} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)}, \quad (8)$$

Σ'' означает, что n_1 – четное число.

Пусть $G(n)$ – мультипликативная функция, которая равна либо 1, либо $f(n_1)$, либо $f^2(n_1)$. Тогда

$$S^* = \sum_{n_1 | P(x^\sigma)}'' \frac{g(n_1)G(n_1)}{\varphi(n_1)} = \prod_{2 < p \leq x^\sigma} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g(p^r)G(p^r)}{\varphi(p^r)} \right) \sum_{r_1=1}^{\infty} \frac{G(2^{r_1})}{\varphi(2^{r_1})}.$$

Пусть $G(p) = 1$. Тогда, так как $g(p^r) = g(p)$, имеем

$$S^* = \prod_{p \leq x^\sigma} \left(1 + \frac{g(p)}{p-1} \frac{p}{p-1} \right) \geq 3 \prod_{2 < p \leq x^\sigma} \left(1 + \frac{1}{p-2} \right) \geq \delta_1 \log x^\sigma, \quad \delta_1 > 0.$$

Если $G(p) = \zeta$ или ζ^2 , то, так как $\operatorname{Re} \zeta = \operatorname{Re} \zeta^2 = -1/2$, имеем

$$|S^*| \ll \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{p \leq x^\sigma} \frac{1}{p} \right) \ll (\log x^\sigma)^{-1/2}.$$

Вычитаемое в правой части неравенства (8) не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha \log x} \sum_{n_1 | P(x^\sigma)} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \log n_1 &\leq \frac{1}{\alpha \log x} \sum_{r, p \leq x^\sigma} \frac{\log p^r}{\varphi(p^r)} \sum_{n_1 | P(x^\sigma)} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \leq \frac{2\sigma}{\alpha} \sum_{n_1} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \\ &\leq \frac{2\sigma}{\alpha} \cdot 3 \cdot \prod_{\substack{p \leq x^\sigma \\ p \neq 2}} \left(1 + \frac{1}{p-2} \right) \ll \sigma^2 \log x. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя найденные оценки в (8), получим

$$\sum_{n_1 \in M} \frac{g(n_1)}{\varphi(n_1)} \geq \gamma_1 \log x, \quad \gamma_1 = \delta_1 \sigma + O(\sigma^2) > 0$$

при малых σ .

Следовательно, в случае $f(n_1) = 1$ неравенство (7) и тем самым теорема доказаны.

Если $f(n_1) = \zeta$ или $f(n_1) = \zeta^2$, заменим $(1 + f(n_1) + f^2(n_1))$ в (8) на $(1 + \zeta^2 f(n_1) + (\zeta^2 f(n_1))^2)$ или $(1 + \zeta f(n_1) + (\zeta f(n_1))^2)$ соответственно и проведем аналогичные рассуждения.

Автор благодарит профессора Н. М. Тимофеева за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Meyer J. Thèse d'Etat. Reims: Université de Reims, 1982.
- [2] Hildebrand A. Additive and multiplicative functions on shifted primes // Proc. London Math. Soc. (3). 1989. V. 59. P. 209–232.
- [3] Тимофеев Н. М. Мультипликативные функции на множестве сдвинутых простых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. С. 1238–1256.
- [4] Elliott P. D. T. A. The multiplicative group of rationals generated by the shifted primes. I // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 463. P. 169–216.
- [5] Тимофеев Н. М. Неравенства Харди–Рамануджана и Халоса для сдвинутых простых чисел // Матем. заметки. 1996. Т. 57. № 5. С. 747–764.
- [6] Halberstam H., Richert H.-E. Sieve Methods. London: Acad. Press, 1974.