Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Об оценке L_1 -нормы одной экспоненциальной суммы, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 465–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:06:59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОЦЕНКЕ L_1 -НОРМЫ ОДНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СУММЫ

А. А. Карацуба

В статье [1] С. В. Бочкарёв предложил оригинальный метод нижних оценок L_1 -нормы экспоненциальных сумм. Метод основан на новых мультипликативных неравенствах С. В. Бочкарёва. Как пример одного из приложений метода приводится следующая

ТЕОРЕМА (С. В. Бочкарёв). *Для любых коэффициентов $\alpha_n = \pm 1$ и любого $\beta \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x [2^{(\log n)^\beta}]) \right| dx \gg (\log N)^{(\beta+1)/2}. \quad (1)$$

Там же подчеркнуто, что: “При $\beta = 1$ оценка (1) может быть получена из неравенства Харди (см. [2, с. 454]). Если $\beta > 1$, то эта оценка не следует из обобщенного неравенства Харди, полученного С. В. Конягиным [3] и О. Мак-Ги, Л. Пиньо, Б. Смитом [4]. Отметим, что оценка (1) сохраняется при произвольном перераспределении точек спектра внутри каждого двоичного интервала. В этом случае не могут быть применены и методы, использующие арифметические свойства последовательности $\varphi(n) = [2^{(\log n)^\beta}]$.”

Цель настоящей заметки дать более точную нижнюю оценку, чем (1), при $1 < \beta < 3/2$ и, что наиболее важно, обратить внимание на арифметическую проблему оценки сверху количества решений специального вида диофантовых уравнений, тесно связанную с задачей С. В. Бочкарёва.

Пусть далее $f(n)$ – строго монотонно возрастающая целозначная функция натурального аргумента, $K(N)$ – количество решений уравнения

$$f(n_1) + f(n_2) = f(n_3) + f(n_4), \quad 1 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 \leq N. \quad (2)$$

Ясно, что $N^2 \leq K(N) \leq N^3$. Пусть $K(N) \leq N^3 \Delta(N)$, где $N^{-1} \leq \Delta(N) \leq 1$. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любых коэффициентов α_n , $|\alpha_n| = 1$, справедливо неравенство*

$$I(N) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x f(n)) \right| dx \geq (\Delta(N))^{-1/2}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(x) \geq 0$. Пользуясь неравенством Гёльдера ($\alpha = 2/3, \beta = 1/3$), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 F^2(x) dx &= \int_0^1 F^{2/3}(x) F^{4/3}(x) dx \leq \left(\int_0^1 (F^{2/3}(x))^{1/\alpha} dx \right)^\alpha \left(\int_0^1 (F^{4/3}(x))^{1/\beta} dx \right)^\beta \\ &= \left(\int_0^1 F(x) dx \right)^{2/3} \left(\int_0^1 F^4(x) dx \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Полагая

$$F(x) = \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x f(n)) \right|$$

и замечая, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 F^2(x) dx &= \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 = N, \\ \int_0^1 F^4(x) dx &\leq K(N) \leq N^3 \Delta(N), \end{aligned}$$

находим

$$\int_0^1 F(x) dx \geq (\Delta(N))^{-1/2}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что

$$I^2(N) \leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x f(n)) \right|^2 dx = N,$$

т.е. $I(N) \leq \sqrt{N}$. Поэтому если для $\Delta(N)$ получить оценку сверху вида $\Delta(N) \leq N^{-1+\varepsilon}$, $N \geq N_1(\varepsilon) > 0$, то из (3) для $I(N)$ следует правильная по порядку нижняя оценка. В частности, это имеет место, если $f(x)$ – многочлен степени $d \geq 2$ с целыми коэффициентами или если $f(x) = g^x$, $g \geq 2$, g – целое число. В приведенной выше теореме Бочкарёва функция $f(x) = [2^{(\log x)^\beta}]$, $\beta > 1$, растёт при $x \rightarrow +\infty$ быстрее любого многочлена. Можно ожидать, что и в этом случае $\Delta(N) \leq N^{-1+\varepsilon}$.

В [5] автор оценил тригонометрическую сумму S следующего вида:

$$S = \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i f(n)), \quad f(n) = e^{(\log n)^\beta}, \quad 1 < \beta < \frac{3}{2}.$$

Оценка выглядит так:

$$|S| \leq c_1 N \exp(-c(\log N)^{3-2\beta}),$$

с и c_1 – положительные абсолютные постоянные. Это был пример нетривиальной оценки сверху модуля тригонометрической суммы с функцией в экспоненте, растущей быстрее многочлена. Недавно О. В. Попов [6] рассмотрел ряд аддитивных проблем с функцией $[f(n)]$. Оценки тригонометрических сумм, полученные Поповым в [6], дают возможность уточнить оценки (1) Бочкарёва при $1 < \beta < 3/2$. Приведу формулировку теоремы 2 из [6].

ТЕОРЕМА (О. В. Попов). Пусть A, B, P, P_1, β – вещественные числа, $A \geq 1$, $1 < \beta < 3/2$, $P/2 < P_1 \leq P$, $P \geq P_0 > 0$,

$$S(\alpha) = \sum_{P_1 < n \leq P} \exp(2\pi i \alpha [f(n)]), \quad f(x) = e^{A(\log x + B)^\beta}$$

и вещественное число α удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{A}{2}(\log P + B)^\beta \leq \log |\alpha| \leq -\log 2.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S(\alpha)| \ll |\alpha| P^{1-\rho} \log^2 P,$$

где

$$\rho = 2^{-10} A^{-2} (\log 2P + B)^{2-2\beta},$$

постоянные в знаке " $\ll$ " зависят только от β, A, B .

Замечу, что условие $A \geq 1$ в этой теореме не существенно, можно считать, что $A \geq A_1 > 0$. От этого изменится только постоянная в ρ . Сформулирую следствие из теоремы Попова, которое будет применено ниже.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A \geq 1/2$, $1 < \beta < 3/2$, $N \geq N_1(A, \beta) > 0$,

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i \alpha [f(n)]), \quad f(x) = e^{A(\log x)^\beta}$$

и вещественное число α удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{A}{8}(\log N)^\beta \leq \log |\alpha| \leq -\log 2.$$

Тогда справедлива оценка

$$|S(\alpha)| \leq N^{1-\rho} \log^2 N, \quad (4)$$

где

$$\rho = 2^{-14} A^{-2} (\log N)^{2-2\beta}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \geq 1/2$, $1 < \beta < 3/2$, $f(n) = [e^{A(\log n)^\beta}]$, $K(N)$ — число решений (2). Тогда при $N \geq N_1(\beta, A) > 0$ справедлива оценка

$$K(N) \leq N^3 \Delta(N), \quad \Delta(N) \leq \exp(-2^{-14} A^{-2} (\log N)^{3-2\beta}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь известным тождеством, находим

$$K(N) = 2 \int_0^\omega |S(\alpha)|^4 d\alpha + 2 \int_\omega^{1/2} |S(\alpha)|^4 d\alpha, \quad (5)$$

где

$$\omega = \exp\left(-\frac{A}{8}(\log N)^\beta\right).$$

Первое слагаемое в правой части (5) оценим тривиально величиной

$$2N^4 \omega \leq 1, \quad N \geq N_1(\beta, A). \quad (6)$$

Второе слагаемое в правой части (5) не превосходит

$$2 \max_{\omega \leq \alpha \leq 1/2} |S(\alpha)|^2 \int_{-1/2}^{1/2} |S(\alpha)|^2 d\alpha = 2 \max_{\omega \leq \alpha \leq 1/2} |S(\alpha)|^2 N. \quad (7)$$

Применяя (4), найдем

$$\max_{\omega \leq \alpha \leq 1/2} |S(\alpha)| \leq N^{1-\rho} \log^2 N. \quad (8)$$

Из (5)–(8) получаем

$$K(N) \leq 1 + N^3 N^{-2\rho} \log^4 N \leq N^3 \Delta(N),$$

где

$$\Delta(N) \leq \exp(-2\rho \log N + 5 \log \log N) \leq \exp(-2^{-14} A^{-2} (\log N)^{3-2\beta}).$$

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \geq 1/2$, $1 < \beta < 3/2$, $f(n) = [e^{A(\log n)^\beta}]$. Тогда для любых коэффициентов α_n , $|\alpha_n| = 1$, и $N \geq N_1(\beta, A) > 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp(2\pi i x f(n)) \right| dx \geq \exp(2^{-15} A^{-2} (\log N)^{3-2\beta}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарёв С. В. // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 74–76.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.
3. Конягин С. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 2. С. 243–265.
4. McGehee O. C., Pigno L., Smith B. // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. № 3. Р. 613–618.
5. Карацуба А. А. // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 241–255.
6. Попов О. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 4. С. 49–53.