Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Равномерные оценки осциллирующих интегралов с фазой серии $\tilde{R}_m$, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 468–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:10:32

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ С ФАЗОЙ СЕРИИ $\tilde{R}_m$

В. Н. Карпушкин

В настоящей работе доказана точная равномерная оценка сверху модуля осциллирующего интеграла с большим параметром τ и с фазой серии $\tilde{R}_m$, т.е. $\tilde{T}_{3,m,m}$, величиной $C\tau^{-1}(\varphi)_2$; ранее была известна равномерная оценка сверху подобного интеграла величиной $C\tau^{-1} \ln \tau(\varphi)_2$ (см. [1]). Здесь $(\varphi)_k$ – норма амплитуды осциллирующего интеграла в пространстве $C_0^k(\mathbb{R}^3)$.

Будем пользоваться обозначениями работы [1].

По поводу асимптотики интегралов Лапласа с непрерывной фазой см. [2], [3].

ТЕОРЕМА. Пусть росток $g \in 0$ принадлежит $\tilde{R}_m$. Тогда $M(g, 0) \prec (-1, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование теоремы проходит по той же схеме, что и в работах [1], [4] и с теми же обозначениями.

Пусть $g \in \tilde{R}_m$. Тогда 3-струя функции g есть $f = x(\pm x^2 + y^2 + z^2)$. Заметим, что f имеет вещественно-изолированную критическую точку в $0 \in \mathbb{R}^3$. Сделаем замену координат $x = x_1 t^{-1/3}$, $y = y_1 t^{-1/3}$, $z = z_1 t^{-1/3}$ и проведем регуляризацию интеграла, как в работе [1]. Рассмотрим полином $f + \lambda$. Обозначения t , λ взяты из работы [1]. Если коранг полинома $f + \lambda$ в критической точке a не превосходит 1, то теорема доказана. Из леммы 2.2 работы [1] следует, что коранг полинома $f + \lambda$ в критической точке a не превосходит 2. Далее, для определенности считаем, что $a = 0$. Разберем случай коранга 2.

Пусть $f + \lambda - (f + \lambda)(0)$ в окрестности точки 0 есть $x(\pm x^2 + y^2 + z^2) \pm (\delta x + \beta y + \alpha z)^2$. Обозначим $f + \lambda - (f + \lambda)(0)$ через f_1 .

Пусть $|\alpha| + |\beta| > 0$. Предположим для определенности, что $\beta \neq 0$. Сделаем замену координат $y_1 = y + (\delta/\beta)x + (\alpha/\beta)z$, $x_1 = x$, $z_1 = z$. Получим

$$f_1 = \pm \beta^2 y_1^2 + x_1 z_1^2 \pm x_1^3 + x_1 \left(y_1 - \frac{\delta}{\beta} x_1 - \frac{\alpha}{\beta} z_1 \right)^2.$$

Заметим, что этот полином вещественно-аналитической заменой координат приводится к виду $\pm y_2^2 + \Phi(x_2, z_2)$. При этом $\Phi(x_2, z_2)$ – вещественно-аналитическая функция с 3-струей в 0, равной

$$x_2 z_2^2 \pm x_2^3 + \left(\frac{\delta}{\beta} \right)^2 x_2^3 + 2 \frac{\delta}{\beta} \frac{\alpha}{\beta} x_2^2 z_2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 z_2^2 x_2.$$

Заметим, что 3-струя функции Φ в 0 не эквивалентна x^3 и не 0.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 96-0713.

Из работ [4], [5] следует, что $M(\Phi, 0) \asymp (-1/2, 0)$ и, таким образом, $M(f + \lambda, a) \asymp (-1, 0)$.
Разберем случай $\alpha = \beta = 0$. Получим

$$f_1 = \pm \delta^2 x^2 + x(\pm x^2 + y^2 + z^2), \quad \delta \neq 0.$$

Тогда существует вещественно-аналитическая система координат x_1, y_1, z_1 в 0, в которой главная квазиоднородная часть функции f_1 в весах $\alpha_1 = 1/2, \alpha_2 = \alpha_3 = 1/4$ имеет вид $\pm x_1^2 + (y_1^2 + z_1^2)^2$. Из работ [4], [5] следует, что $M(f + \lambda, a) \asymp (-1, 0)$. Из работы [1] вытекает, что $M(g, 0) \asymp (-1, 0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точность равномерных оценок сверху модуля осциллирующего интеграла величиной порядка $C\tau^{-1}(\varphi)_2$ вытекает из того, что существует росток Q в $0 \in \mathbb{R}^3$ с 4-струей $\pm x^2 + (y^2 + z^2)^2$ и росток Q примыкает к ростку g в $0 \in \mathbb{R}^3$, но осциллирующий интеграл с фазой Q убывает как τ^{-1} (см. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Автору неизвестен главный член асимптотики осциллирующего интеграла с фазой $g \in \tilde{R}_m$. Если осциллирующий интеграл с фазой g убывает быстрее, чем τ^{-1} при $\tau \rightarrow +\infty$, то это дает простой контрпример к гипотезе В. И. Арнольда о полунепрерывности показателя осцилляции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для всех q , принадлежащих серии $T \setminus \tilde{R}_m$, равномерные оценки осциллирующих интегралов имеют вид $M(q, 0) \asymp (-1, 1)$ (см. [1]). Из работы [6] следует, что главный член асимптотики осциллирующих интегралов с фазой q имеет порядок $\tau^{-1} \ln \tau$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Таким образом, для всех фаз $q \in T \setminus \tilde{R}_m$ верна гипотеза В. И. Арнольда о равномерных оценках (см. [5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [6, с. 132, 9 строка сверху] следует читать $a_{0,0,0} > 0$ вместо $a_{0,0,0} \neq 0$. На этой же странице третий абзац снизу следует читать так: $\psi(a) = 1$, интеграл

$$\int_{S^2} e^{i\rho(v_1^2 - v_2^2)} \psi dv_1 dv_2$$

имеет вид $A\rho^{-1} + B$, где $A > 0$ и $|B| \leq K\rho^{-3/2}$ при $\rho \geq 2$. Здесь K – константа, не зависящая от ρ и зависящая от ψ . Отсюда имеем

$$\tau^{-1} \int_1^{c\tau} \varphi \int_{S^2} e^{i\rho(v_1^2 - v_2^2)} a_{0,0,0} \psi dv_1 dv_2 d\rho = A_1 \tau^{-1} \ln \tau + O(\tau^{-1})$$

при $\tau \rightarrow +\infty$. Здесь $A_1 \in \mathbb{R}$ не зависит от τ и $A_1 > 0$, если $\varphi(0) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [1, с. 6] в таблице 3 в нормальной форме для серии $\tilde{T}_{p,m} = \tilde{T}_{p,m,m}$ имеется опечатка: надо читать $x(y^2 + z^2) \pm x^p + ay^m$ вместо $x(y^2 + x^2) \pm x^p + ay^m$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпушкин В. Н. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Т. 9. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 1–39.
2. Маслов В. П., Федорюк М. В. // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 5. С. 763–768.
3. Чеботарёв А. М. // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 273–280.
4. Карпушкин В. Н. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Т. 10. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 150–169.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
6. Карпушкин В. Н. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 131–133.

Институт проблем передачи информации РАН

Поступило

15.03.95

Исправленный вариант

19.02.98