Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Фейгин, Квазиинварианты диэдральных систем, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 776–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:19:42

УДК 512

КВАЗИИНВАРИАНТЫ ДИЭДРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

М. В. Фейгин

Для двумерных систем Кокстера с произвольными кратностями явно построен базис модуля квазиинвариантов над инвариантами. Доказано, что построенный базис состоит из m -гармонических многочленов, тем самым обобщены более ранние результаты Веселова и автора для систем с постоянной кратностью.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Введем главный объект наших исследований – алгебру квазиинвариантов. Рассмотрим систему Кокстера $\mathcal{R}$ в $\mathbb{R}^n$, состоящую из неколлинеарных пар векторов $\{\pm\alpha\}$ с предписанными кратностями $m_\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Соответствующая группа Кокстера G порождена отражениями s_α , $\alpha \in \mathcal{R}$:

$$s_\alpha u = u - \frac{2(\alpha, u)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Группа G должна быть конечна, и набор отражений $\{s_\alpha\}$ является набором всех отражений входящих в G . Функция кратности $m_\alpha = m(\alpha)$ предполагается инвариантной: $m_\alpha = m_{g(\alpha)}$ для любых $g \in G$, $\alpha \in \mathcal{R}$.

Полином $p(x)$ называется *квазиинвариантом*, связанным с системой $\mathcal{R}$, если он удовлетворяет условиям

$$s_\alpha p(x) - p(x) = O((\alpha, x)^{2m_\alpha+1}) \quad (1)$$

вблизи гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$ для любого $\alpha \in \mathcal{R}$. Как легко видеть, множество квазиинвариантов образует кольцо. Эквивалентно (1) $p(x)$ является квазиинвариантом, если

$$\partial_\alpha^{2s-1} p = 0 \quad \text{при } (\alpha, x) = 0, \quad s = 1, \dots, m_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{R},$$

где ∂_α – производная вдоль направления α . Например, если полином $p(x)$ принадлежит кольцу S^G полиномов, инвариантных относительно геометрического действия группы Кокстера, то $s_\alpha p(x) = p(x)$ для любого $\alpha \in \mathcal{R}$; тем самым, свойство (1) выполняется. Таким образом, кольцо квазиинвариантов $Q^{\mathcal{R}}$ содержит кольцо инвариантов S^G .

Кольца квазиинвариантов были введены Веселовым и Чалых в 1990 году в контексте квантовых интегрируемых систем [1]. Авторы показали, что каждому квазиинварианту $q(x)$ соответствует дифференциальный оператор $\mathcal{L}_q = \chi(q)$ вида

$$\mathcal{L}_q(x, \partial_x) = q(\partial_x) + \text{члены младших порядков по } \partial,$$

На заключительном этапе работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ, грант № МК-2050.2003.01, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-2185.2003.1.

и все такие операторы $\mathcal{L}_q$ коммутируют. При гомоморфизме χ квазиинвариант $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ переходит в обобщенный оператор Калоджеро–Мозера [2]–[4]

$$\mathcal{L}_{x^2} = \Delta - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \frac{2m_\alpha}{(\alpha, x)} \partial_\alpha. \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{R}_+$ обозначает подмножество векторов из $\mathcal{R}$ принадлежащих некоторому полупространству, а Δ является оператором Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Тем самым, каждому квазиинварианту $q(x)$ отвечает квантовый интеграл $\mathcal{L}_q$ задачи Калоджеро–Мозера (2). Как объясняется в [5], коммутативное кольцо всех квантовых интегралов для (2) изоморфно кольцу квазиинвариантов $Q^{\mathcal{R}}$.

Отметим, что на инвариантных полиномах гомоморфизм χ рассматривался Хекманом и Опдамом без условия целочисленности функции кратности [6]. Существенно, что для целочисленной функции кратности кольцо $Q^{\mathcal{R}}$ квантовых интегралов становится больше кольца инвариантов S^G , и кольцо интегралов зависит от выбранных целочисленных кратностей, как это было обнаружено Веселовым и Чалых [1]. Необходимость рассмотрения целых кратностей для получения больших коммутативных колец была недавно доказана Танигучи [7].

Первое исследование кольца $Q^{\mathcal{R}}$ было проведено Волченко, Козачко и Мишачевым [8] в случае диэдральных систем с единичной кратностью. В работе [8] были найдены мультипликативные образующие кольца. Более полное описание кольца $Q^{\mathcal{R}}$ для диэдральных систем с постоянной кратностью $m_\alpha = m \in \mathbb{Z}_+$ было сделано Веселовым и автором [5]. Оказалось, что для диэдральной системы $I_2(N)$, состоящей из N прямых на плоскости $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, кольцо $Q^{I_2(N)}$ является свободным модулем над подкольцом инвариантов $S^{I_2(N)} = \mathbb{C}[z\bar{z}, z^N + \bar{z}^N]$. Этот модуль имеет $2N$ образующих $h_1, \dots, h_{2N}$ таких, что линейное пространство $H_m = \langle h_1, \dots, h_{2N} \rangle$, порожденное этими образующими, является пространством решений следующей системы из двух уравнений:

$$\mathcal{L}_{z\bar{z}} h = 0, \quad \mathcal{L}_{z^N + \bar{z}^N} h = 0.$$

Также были найдены детерминантные формулы для h_i . В [9] было предположено, что кольцо квазиинвариантов $Q^{\mathcal{R}}$ является свободным модулем над инвариантами S^G для любой кокстеровской системы $\mathcal{R}$. Также было предположено, что можно взять m -гармонические многочлены в качестве базиса этого свободного модуля. Напомним, что пространство m -гармонических многочленов H_m состоит из решений следующей системы уравнений:

$$\chi(\sigma)h = 0,$$

где σ является произвольным элементом из кольца S_+^G , инвариантных полиномов, не имеющих свободного члена (см. [9]).

Этингоф и Гинзбург доказали в [10], что кольцо $Q^{\mathcal{R}}$ действительно свободно над инвариантами S^G для любой системы Кокстера $\mathcal{R}$. Однако выбор базиса в H_m в качестве свободного базиса для квазиинвариантного модуля в общем случае невозможен (см. контрпример в [10]). Тем не менее, степени однородных образующих совпадают со степенями однородного базиса в H_m , как было доказано в [10]. Свободные образующие должны быть базисом в дополнении к идеалу, порожденному однородными инвариантами положительной степени в $Q^{\mathcal{R}}$. Задача выбора такого базиса остается открытой.

Помимо свойства коэн-маколевости для квазиинвариантной алгебры, Этингоф и Гинзбург также установили свойство горенштейновости [10]. Одно из двух доказательств, приведенное в [10], основано на результатах работы Фельдера и Веселова [11]. В последней работе, в частности, был найден полином Пуанкаре для пространства m -гармонических многочленов H_m . Свойство горенштейновости отвечает палиндромичности полинома Пуанкаре для H_m , предположенной в [9] и доказанной в [11].

Дифференциальные операторы на особых алгебраических многообразиях, соответствующих $Q^{\mathcal{R}}$, изучались Берестом, Этингофом и Гинзбургом. В работе [12] было доказано, что алгебра дифференциальных операторов проста и Морита эквивалентна алгебре Вейля полиномиальных дифференциальных операторов в n -мерном пространстве.

В данной работе мы, следуя [13], описываем квазиинварианты диэдральных систем $I_2(2N)$ с произвольными (инвариантными) кратностями (m, n) ¹. Мы предлагаем явные формулы для образующих кольца $Q^{I_2(2N)}$ как модуля над инвариантами $S^{I_2(2N)}$, обобщая формулы из [5]. Оказывается, что в этом случае, как и в случае диэдральных систем с постоянной кратностью [5], можно взять в качестве образующих однородный базис пространства m -гармонических многочленов H_m ². Тем самым, получаются явные детерминантные формулы для базисных m -гармонических многочленов для произвольных диэдральных систем.

Техника, используемая в данной работе, отличается от подхода в [5], где рассматривались диэдральные системы с постоянной кратностью. Теперь мы существенно используем результаты Этингофа и Гинзбурга [10], а также Фельдера и Веселова [11]. Такой подход позволяет заметно сократить явные вычисления. Схема рассмотрений такова.

В п. 2 напомним результат Фельдера и Веселова о полиноме Пуанкаре для m -гармонических многочленов и явно выписывается полином Пуанкаре P_{H_m} для диэдральных m -гармоник. По теореме Этингофа и Гинзбурга степени однородных образующих для квазиинвариантов задаются P_{H_m} . В п. 3 доказывается, что эти образующие могут быть взяты в определенной форме. Чтобы доказать это, мы рассуждаем следующим образом. Возьмем произвольный полином рассматриваемой степени и наложим условия квазиинвариантности. Из теоремы Этингофа и Гинзбурга следует, что эта система уравнений разрешима. Из вида уравнений следует, что она также должна иметь решение в нужной нам форме. Далее проверяется, что линейная оболочка выбранных квазиинвариантов не принадлежит идеалу, порожденному однородными инвариантами положительной степени. Эту проверку можно легко сделать, вновь используя теорему Этингофа и Гинзбурга. Таким образом, мы заключаем (по теореме Этингофа–Гинзбурга), что построен свободный базис с элементами определенного вида.

В п. 4 вначале проверяется, что построенный базис является m -гармоническим. Это следует из специального вида элементов, входящих в базис; здесь опять используется теорема Этингофа–Гинзбурга. Затем мы возвращаемся к системе квазиинвариантных условий, задающих наш базис. Мы замечаем, что для многочлена рассматриваемого вида набор квазиинвариантных условий приводит к m -гармоничности этого многочлена. В частности, полином рассматриваемого вида однозначно определяется набором ква-

¹В этом случае имеется две орбиты относительно действия группы Кокстера G на множестве корней $\mathcal{R}$. Кратность на одной из них равняется $m \in \mathbb{Z}_+$, и кратность равняется $n \in \mathbb{Z}_+$ на второй орбите.

²В обозначении H_m , под m имеется в виду функция кратности $m = m(\alpha)$. Для системы $I_2(2N)$ функция кратности принимает два значения m и n .

зиинвариантных условий. Этот факт позволяет получить явные детерминантные формулы для m -гармонических многочленов и, тем самым, для базиса квазиинвариантного модуля.

2. Полином Пуанкаре для диэдральных систем. Пусть $P_{H_m}(t)$ обозначает полином Пуанкаре пространства m -гармонических многочленов H_m , связанных с системой Кокстера $\mathcal{R}$,

$$P_{H_m}(t) = \sum_{i \geq 0} \dim(H_m^{(i)}) t^i,$$

где $H_m^{(i)}$ – пространство однородных m -гармонических полиномов степени i . Следующая формула для $P_{H_m}(t)$ была получена Фельдером и Веселовым в [11]:

$$P_{H_m}(t) = \sum_{V_j} t^{\sum_a m_a d_a^-(V_j)} P_j(t). \quad (3)$$

В этой формуле внешнее суммирование ведется по всем неизоморфным неприводимым представлениям группы Кокстера G . Внутреннее суммирование ведется по классам C_a сопряженных отражений в G . Полином P_j обозначает полином Пуанкаре представления V_j в пространстве $H_0 \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_0$, где I_0 – идеал в кольце полиномов, порожденный однородными инвариантами положительной степени. То есть коэффициент при t^k равняется размерности изотипической компоненты представления V_j в k -й градуировке $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_0$. Далее,

$$d_a^-(V_j) = \frac{2N_a \dim V_{j,\alpha}^-}{\dim V_j},$$

где N_a – число элементов в классе C_a и

$$V_{j,\alpha}^- = \{v \in V_j \mid s_\alpha v = -v\}, \quad s_\alpha \in C_a,$$

m_a – кратность отражений $s_\alpha \in C_a$.

Для диэдральной группы $I_2(N)$ с нечетным N имеется два неизоморфных одномерных неприводимых представления и $(N-1)/2$ двумерных. Все отражения сопряжены и $N_a = N$. Так как в комплексных координатах кольцо инвариантов изоморфно $\mathbb{C}[z\bar{z}, z^N + \bar{z}^N]$, можно выбрать образующие в факторпространстве следующим образом:

$$\mathbb{C}[z, \bar{z}]/I_0 \simeq \langle 1, z, \bar{z}, \dots, z^{N-1}, \bar{z}^{N-1}, z^N - \bar{z}^N \rangle.$$

Для одномерных представлений часть суммы (3) имеет вид

$$1 + t^{(2m+1)N},$$

где первый член соответствует тривиальному представлению V_{triv} , реализованному на константах. Второй член соответствует знаковому представлению V_{sign} , которое реализуется на векторе $z^N - \bar{z}^N$. Мы также пользуемся тем, что

$$d_a^-(V_{\text{triv}}) = \frac{2N \cdot 0}{1} = 0, \quad d_a^-(V_{\text{sign}}) = \frac{2N \cdot 1}{1} = 2N.$$

Теперь рассмотрим двумерные представления. Представление V_i реализуется как $\langle z^i, \bar{z}^i \rangle$ и как $\langle z^{N-i}, \bar{z}^{N-i} \rangle$. Далее,

$$d_a^-(V_i) = \frac{2N \cdot 1}{2} = N.$$

Объединяя вычисления, получаем

$$P_{H_m} = 1 + t^{(2m+1)N} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} 2t^{mN} (t^i + t^{N-i}) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} t^{mN+i} + t^{(2m+1)N}.$$

Теперь рассмотрим четные диэдральные системы $I_2(2N)$. В группе имеется два класса C_a и C_b сопряженных отражений, каждый из которых состоит из N элементов. Обозначим кратности отражений через $m_a = m$ и $m_b = n$. Как и в нечетном случае,

$$\mathbb{C}[z, \bar{z}]/I_0 \simeq \langle 1, z, \bar{z}, \dots, z^{2N-1}, \bar{z}^{2N-1}, z^{2N} - \bar{z}^{2N} \rangle.$$

Вначале проанализируем одномерные представления и вычислим соответствующий кусок полинома Пуанкаре. Имеется четыре одномерных представления для $I_2(2N)$, зависящих от того, действуют ли классы отражений C_a, C_b как 1 или -1 .

- $V_{\text{triv}} = \langle 1 \rangle$. Соответствующий член в (3) равняется 1.
- $V_{\text{sign}} = \langle z^{2N} - \bar{z}^{2N} \rangle$, $d_a^-(V_{\text{sign}}) = d_b^-(V_{\text{sign}}) = \frac{2N \cdot 1}{1} = 2N$. Вклад в полином Пуанкаре равен $t^{(m+n+1)2N}$.
- $V_{\text{sign}^1} = \langle z^N + \bar{z}^N \rangle$. Получаем

$$m_a d_a^-(V_{\text{sign}^1}) + m_b d_b^-(V_{\text{sign}^1}) = m \cdot \frac{2N \cdot 0}{1} + n \cdot \frac{2N \cdot 1}{1} = 2nN,$$

что приводит к члену $t^{(2n+1)N}$ в (3).

- $V_{\text{sign}^2} = \langle z^N - \bar{z}^N \rangle$. Получаем

$$m_a d_a^-(V_{\text{sign}^2}) + m_b d_b^-(V_{\text{sign}^2}) = m \cdot \frac{2N \cdot 1}{1} + n \cdot \frac{2N \cdot 0}{1} = 2mN,$$

что приводит к члену $t^{(2m+1)N}$ в (3).

Действительно, представления $V_{\text{sign}^1}, V_{\text{sign}^2}$ определяются свойством, что для любых $s \in C_a, \tau \in C_b$

$$s|_{V_{\text{sign}^1}} = \text{Id}, \quad s|_{V_{\text{sign}^2}} = -\text{Id}, \quad \tau|_{V_{\text{sign}^1}} = -\text{Id}, \quad \tau|_{V_{\text{sign}^2}} = \text{Id}.$$

Группа диэдра порождается двумя отражениями $s \in C_a, \tau \in C_b$ такими, что $(s\tau)^{2N} = 1$. Она также порождается s и $s\tau$. В наших обозначениях мы можем думать об s как об отражении относительно прямой $z = \bar{z}$, и $s\tau$ является поворотом на угол $\phi = \pi/N$. Таким образом, верны следующие формулы:

$$s: z \rightarrow \bar{z}, \quad \bar{z} \rightarrow z, \quad s\tau: z \rightarrow \varepsilon z, \quad \bar{z} \rightarrow \bar{\varepsilon} \bar{z}, \quad (4)$$

где $\varepsilon = e^{i\pi/N}$. Далее, представление V_{sign^1} характеризуется свойством

$$s|_{V_{\text{sign}^1}} = \text{Id}, \quad \tau|_{V_{\text{sign}^1}} = -\text{Id}$$

или, эквивалентно,

$$s|_{V_{\text{sign}^1}} = \text{Id}, \quad (s\tau)|_{V_{\text{sign}^1}} = -\text{Id}.$$

Очевидно, групповые элементы действуют следующим образом:

$$s(z^N + \bar{z}^N) = \bar{z}^N + z^N$$

и

$$(s\tau)(z^N + \bar{z}^N) = \varepsilon^N z^N + \bar{\varepsilon}^N \bar{z}^N = -(z^N + \bar{z}^N).$$

Таким образом, $V_{\text{sign}^1} = \langle z^N + \bar{z}^N \rangle$, и если $m_s = m$, $m_\tau = n$, то вклад данного неприводимого представления в полином Пуанкаре будет $t^{(2n+1)N}$. Аналогично, $V_{\text{sign}^2} = \langle z^N - \bar{z}^N \rangle$, так как

$$s(z^N - \bar{z}^N) = \bar{z}^N - z^N = -(z^N - \bar{z}^N)$$

и

$$(s\tau)(z^N - \bar{z}^N) = \varepsilon^N z^N - \bar{\varepsilon}^N \bar{z}^N = -(z^N - \bar{z}^N);$$

соответствующий член в полиноме Пуанкаре равен $t^{(2m+1)N}$.

Теперь обратимся к двумерным неприводимым представлениям. Представление V_i реализуется дважды в $\mathbb{C}[z, \bar{z}]/I_0$ как пространство $\langle z^i, \bar{z}^i \rangle$ и как $\langle z^{2N-i}, \bar{z}^{2N-i} \rangle$, $i = 1, \dots, N-1$. Таким образом, $P_i(t) = 2t^i + 2t^{2N-i}$ в (3). Для всех отражений $s \in C_a$, $\tau \in C_b$ выполняется $\dim V_i^- = 1$; следовательно,

$$d_a^-(V_i) = d_b^-(V_i) = \frac{2N \cdot 1}{2} = N,$$

и мы получаем член полинома Пуанкаре, равный $2t^{(m+n)N}(t^i + t^{2N-i})$. Суммируя, получаем

$$P_{H_m} = 1 + t^{(m+n+1)2N} + t^{(2m+1)N} + t^{(2n+1)N} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} t^{(m+n)N}(t^i + t^{2N-i}). \quad (5)$$

3. Образующие квазиинвариантов. Напомним следующую ключевую теорему, доказанную Этингофом и Гинзбургом [10] (см. также [9]).

ТЕОРЕМА 1 [10]. *Для любой системы Кокстера $\mathcal{R}$ кольцо квазиинвариантов $Q^{\mathcal{R}}$ является свободным модулем над подкольцом инвариантов S^G соответствующей группы Кокстера G . В качестве образующих можно взять базис однородных представителей факторпространства $Q^{\mathcal{R}}/I$, где I – идеал в $Q^{\mathcal{R}}$, порожденный однородными инвариантными полиномами положительных степеней. Степени однородных образующих совпадают со степенями однородного базиса в пространстве t -гармонических многочленов H_m .*

Мы собираемся определить, каковы полиномы, которые могут быть выбраны как образующие для диэдральных систем. Так как случай постоянной кратности уже был рассмотрен в работе [9], будем считать, что наша группа является четной диэдральной

группой $I_2(2N)$ с различными кратностями, для определенности $m > n$. По теореме 1 степени образующих для $Q^{I_2(2N)}$ над инвариантами совпадают со степенями базисных m -гармонических полиномов. В соответствии с (5) они удовлетворяют

$$(2n+1)N < (m+n)N + i < (2m+1)N < (m+n+1)2N,$$

где $1 \leq i \leq 2N-1$, $i \neq N$. И мы получаем следующую таблицу для числа образующих в определенной степени.

ТАБЛИЦА 1

степень	0	$(2n+1)N$	$(m+n)N + i$	$(2m+1)N$	$(m+n+1)2N$
число образующих	1	1	2	1	1

Введем нормальные вектора α_i , $i = 0, \dots, 2N-1$, к линиям отражений. Именно, $\alpha_i = (-\sin(\pi i/(2N)), \cos(\pi i/(2N)))$, положим кратности $m_i = m$ для четных i и $m_i = n$ для нечетных i . Введем следующие четыре квазиинварианта:

$$\begin{aligned} q^0 &= 1, \quad q^1 = (z^N + \bar{z}^N)^{2n+1} = \mu_1 \prod_{\substack{i=1 \\ i=2j+1}}^{2N-1} (\alpha_i, x)^{2n+1}, \\ q^2 &= (z^N - \bar{z}^N)^{2m+1} = \mu_2 \prod_{\substack{i=0 \\ i=2j}}^{2N-2} (\alpha_i, x)^{2m+1}, \\ q^3 &= (z^N + \bar{z}^N)^{2n+1} (z^N - \bar{z}^N)^{2m+1} = \mu_3 \prod_{i=0}^{2N-1} (\alpha_i, x)^{2m_i+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – некоторые константы. Очевидно, что q^0 и q^3 являются квазиинвариантами. Полином q^1 также квазиинвариантен. Действительно, условия на прямых $(\alpha_i, x) = 0$ с нечетным i , очевидно, выполняются. Если i четно, то условия следуют из инвариантности $s_{\alpha_i} q^1 = q^1$. Аналогично, $q^2 \in Q^{I_2(2N)}$. Эти квазиинварианты будут составлять часть базиса для $Q^{I_2(2N)}$ над инвариантами, который мы строим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Квазиинварианты q^0, q^1, q^2, q^3 , определенные в (6), не принадлежат идеалу I , порожденному однородными инвариантами положительной степени $S_+^{I_2(2N)}$ в кольце $Q^{I_2(2N)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 1 степени свободных образующих для $Q^{I_2(2N)}$ над инвариантами заданы таблицей 1. Тем самым, не существует квазиинвариантов степени меньше, чем $\deg q^1$, которые не являются инвариантами. Так как q^1 не является инвариантом, мы заключаем, что $q^1 \notin I$. Покажем, что $q^2 \notin I$. Пусть $r_i^{1,2}$ – независимые элементы в дополнении к I степеней $(m+n)N + i$, $1 \leq i \leq 2N-1$, $i \neq N$. Предположим, что $q_2 \in I$, т.е.

$$q^2 = s_0 q^0 + s_1 q^1 + \sum_i s_i^1 r_i^1 + \sum_i s_i^2 r_i^2, \quad (7)$$

где s_0, s_1, s_i^1, s_i^2 инварианты, т.е. элементы $\mathbb{C}[z\bar{z}, z^{2N} + \bar{z}^{2N}]$. Так как $\deg r_i^{1,2} \neq 0 \pmod{N}$, полиномы $s_i^{1,2}$ делятся на $z\bar{z}$. Рассмотрим соотношение (7) по модулю членов, делящихся на $z\bar{z}$. Получаем

$$z^{(2m+1)N} - \bar{z}^{(2m+1)N} = \lambda_1 (z^{2N} + \bar{z}^{2N})^a (z^{(2n+1)N} + \bar{z}^{(2n+1)N}) + \lambda_2 (z^{2N} + \bar{z}^{2N})^b + O(z\bar{z}).$$

Теперь мы приходим к противоречию, так как получаем одновременно $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = -1$. Тем самым, соотношение (7) невозможно и $q^2 \notin I$.

Покажем, наконец, что $q^3 \notin I$. Как и выше, предполагая обратное, получаем, что должно выполняться следующее соотношение:

$$\begin{aligned} z^{2(m+n+1)N} - \bar{z}^{2(m+n+1)N} &= \lambda_1(z^{2N} + \bar{z}^{2N})^a(z^{(2m+1)N} - \bar{z}^{(2m+1)N}) \\ &\quad + \lambda_2(z^{2N} + \bar{z}^{2N})^b(z^{(2n+1)N} + \bar{z}^{(2n+1)N}) \\ &\quad + \lambda_3(z^{2N} + \bar{z}^{2N})^c + O(z\bar{z}). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, так как для любых a, b степени мономов по z и по $\bar{z}$, получаемые из первых двух членов правой части (8), имеют вид $N \cdot$ (нечетное число). А в левой части результат деления степени на N равен $2(m+n+1)$, что четно. Далее, заключаем, что правая часть (8) принимает вид $\lambda_3(z^{2Nc} + \bar{z}^{2Nc}) + O(z\bar{z})$ и равенство (8) невозможно. Следовательно, $q^3 \notin I$, и предложение доказано.

Доказанное предложение показывает, что полиномы q^0, q^1, q^2, q^3 могут быть выбраны как часть свободного базиса $Q^{I_2(2N)}$ над инвариантами. Оставшиеся $2N - 4$ многочлена в базисе состоят из пар многочленов степеней $(m+n)N + i$ при $1 \leq i \leq 2N - 1$, $i \neq N$. Следующие предложение и теорема показывают, что эти квазиинварианты могут быть выбраны в более или менее простой форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют квазиинварианты $q_i^{1,2}$ вида*

$$q_i^1 = \sum_{s=0}^{m+n} a_s z^{(m+n-s)N+i} \bar{z}^{Ns}, \quad a_0 = 1, \quad q_i^2 = \sum_{s=0}^{m+n} b_s \bar{z}^{(m+n-s)N+i} z^{Ns}, \quad b_s = \bar{a}_s \quad (9)$$

для $1 \leq i \leq 2N - 1$, $i \neq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $r_i^{1,2}$ какой-нибудь базис в однородном дополнении к I в степени $(m+n)N + i$, $1 \leq i \leq 2N - 1$, $i \neq N$. Рассмотрим двумерное пространство $\langle r_i^1, r_i^2 \rangle$. Так как оно не пересекает I , мы можем считать, что

$$r_i^1 = z^{(m+n)N+i} + O(z\bar{z}), \quad r_i^2 = \bar{z}^{(m+n)N+i} + O(z\bar{z}).$$

Рассмотрим квазиинвариантные условия для первого многочлена:

$$r_i^1 = \sum_{s=0}^{(m+n)N+i-1} a_s z^{(m+n)N+i-s} \bar{z}^s, \quad a_0 = 1.$$

Прямые $(\alpha_j, x) = 0$, $j = 0, \dots, 2N - 1$, задаются уравнениями $z = \varepsilon^j \bar{z}$, где $\varepsilon^{2N} = 1$, и ε — примитивный корень. Условия квазиинвариантности $\partial_{\alpha_j}^{2t-1} r_i^1 = 0$ при $(\alpha_j, x) = 0 \iff z = \varepsilon^j \bar{z}$ эквивалентны уравнениям

$$\sum_{s=0}^{(m+n)N+i-1} a_s ((m+n)N + i - 2s)^{2t-1} \varepsilon^{((m+n)N+i-s)j} = 0$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{s=0}^{(m+n)N+i-1} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^s}\right)^j = 0.$$

Пусть t удовлетворяет $1 \leq t \leq n < m$. Тогда условия квазиинвариантности нетривиальны для всех $2N$ прямых $j = 0, \dots, 2N-1$. Эти условия можно переписать в виде

$$\sum_{p=0}^{2N-1} A_p \left(\frac{1}{\varepsilon^p}\right)^j = 0,$$

где

$$A_p = \sum_{s \equiv p(2N)} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1}.$$

Последняя система уравнений имеет вид системы Вандермонда. Так как $\varepsilon^{p_1} \neq \varepsilon^{p_2}$, если $p_1 \neq p_2$, мы заключаем, что

$$A_p = 0, \quad p = 0, \dots, 2N-1.$$

Теперь рассмотрим оставшиеся квазиинвариантные условия, соответствующие $n < t \leq m$. Эти условия соответствуют прямым с четным номером j . Имеем

$$\sum_{s=0}^{(m+n)N+i-1} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^s}\right)^j = 0,$$

где $j = 0, 2, \dots, 2N-2$. Эквивалентно,

$$\sum_{p=0}^{N-1} B_p \left(\frac{1}{\varepsilon^{2p}}\right)^j = 0,$$

где

$$B_p = \sum_{s \equiv p(N)} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1}$$

и $j = 0, 1, \dots, N-1$. Эта система уравнений также имеет вид системы Вандермонда. Так как $\varepsilon^{2p_1} \neq \varepsilon^{2p_2}$, если $p_1 \neq p_2$ и $0 \leq p_i \leq N-1$, заключаем, что

$$B_p = 0, \quad p = 0, \dots, N-1.$$

Таким образом, квазиинвариантность полинома

$$r_i^1 = \sum_{s=0}^{(m+n)N+i-1} a_s z^{(m+n)N+i-s} \bar{z}^s$$

эквивалентна следующим условиям на его коэффициенты:

$$\begin{aligned} \sum_{s \equiv p(2N)} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1} &= 0, \quad p = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad 1 \leq t \leq n, \\ \sum_{s \equiv p(N)} a_s((m+n)N+i-2s)^{2t-1} &= 0, \quad p = 0, 1, \dots, N-1, \quad n < t \leq m. \end{aligned} \quad (10)$$

Эти уравнения распадаются на системы уравнений на наборы коэффициентов $\{a_s\}$ с индексами s , имеющими одинаковый остаток после деления на N . Так как у системы (10) имеется решение с $a_0 = 1$, заключаем, что имеется и решение, в котором единственные ненулевые коэффициенты суть

$$a_0, a_N, a_{2N}, \dots, a_{(m+n+\delta)N},$$

где $\delta = 0$, если $1 \leq i \leq N - 1$, и $\delta = 1$, если $N + 1 \leq i \leq 2N - 1$. Соответствующий квазиинвариант имеет вид

$$R_i^1 = \sum_{s=0}^{m+n+\delta} a_{sN} z^{(m+n-s)N+i} \bar{z}^{Ns} \quad (11)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq s \leq m+n+\delta \\ s=2k}} a_{sN} ((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad 1 \leq t \leq n, \\ \sum_{\substack{0 \leq s \leq m+n+\delta \\ s=2k+1}} a_{sN} ((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad 1 \leq t \leq n, \\ \sum_{s=0}^{m+n+\delta} a_{sN} ((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad n < t \leq m. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как уравнения квазиинвариантности (10) (или (12)) вещественны, комплексно-сопряженный к квазиинварианту также является квазиинвариантом. Тем самым, существуют квазиинварианты

$$R_i^2 = \bar{R}_i^1 = \sum_{s=0}^{m+n+\delta} b_{sN} \bar{z}^{(m+n-s)N+i} z^{Ns}$$

с $b_{sN} = \bar{a}_{sN}$. Для $i \leq N - 1$ мы имеем $\delta = 0$ и можем определить $q_i^1 = R_i^1$. Далее, q_i^1 имеют вид, требуемый в утверждении предложения. Для $i \geq N + 1$ последний ненулевой коэффициент в R_i^1 есть $a_{(m+n+1)N}$. Покажем, что можно сделать $a_{(m+n+1)N} = 0$. Для этого рассмотрим квазиинвариант

$$q_i^1 = R_i^1 - a_{(m+n+1)N} (z\bar{z})^{i-N} R_{2N-i}^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} (z\bar{z})^{i-N} R_{2N-i}^2 &= (z\bar{z})^{i-N} \sum_{s=0}^{m+n} b_{sN} \bar{z}^{(m+n-s)N+2N-i} z^{Ns} \\ &= \sum_{s=0}^{m+n} b_{sN} \bar{z}^{(m+n-s+1)N} z^{Ns+i-N} \\ &= \sum_{\bar{s}=0}^{m+n} b_{(m+n-\bar{s})N} z^{(m+n-\bar{s})N+i-N} \bar{z}^{N\bar{s}+N}. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$q_i^1 = z^{(m+n)N+i} + \sum_{s=1}^{m+n+1} z^{(m+n-s)N+i} \bar{z}^{Ns} (a_{sN} - a_{(m+n+1)N} b_{m+n-s+1}),$$

и последний член в сумме выше равняется нулю, так как $b_0 = 1$. Таким образом, q_i^1 для $i \geq N+1$ также имеет вид, требуемый в предложении. Применяя комплексное сопряжение, мы получаем квазиинварианты в виде

$$q_i^2 = \sum_{s=0}^{m+n} b_s \bar{z}^{(m+n-s)N+i} z^{Ns}, \quad b_s = \bar{a}_s.$$

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2. *Квазиинварианты $q_i^{1,2}$ вместе с q^0, q^1, q^2, q^3 образуют свободный базис для $Q^{I_2(2N)}$ над $S^{I_2(2N)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 множество векторов образует базис для $Q^{I_2(2N)}$ над $S^{I_2(2N)}$, если этот набор образует базис в дополнении к идеалу I . По предложению 1 полиномы q^0, q^1, q^2, q^3 образуют часть базиса для $Q^{I_2(2N)}$ над инвариантами. Нам остается доказать, что построенные в предложении 2 квазиинварианты не принадлежат идеалу I , порожденному однородными инвариантами положительной степени. Более точно, нужно доказать, что линейная оболочка $\langle q_i^1, q_i^2 \rangle \cap I = 0$. Если пересечение нетривиально, то

$$\lambda_1 q_i^1 + \lambda_2 q_i^2 \in I$$

и

$$\lambda_1 z^{(m+n)N+i} + \lambda_2 \bar{z}^{(m+n)N+i} + O(z\bar{z}) = p(z, \bar{z}) \in I,$$

где $O(z\bar{z})$ является полиномом, делящимся на $z\bar{z}$, а λ_1, λ_2 – некоторые константы. Теперь в правой части мы можем представить $p(z, \bar{z})$ как линейную комбинацию базисных векторов для дополнения к I , умноженных на полиномиальные коэффициенты по $z\bar{z}$ и $z^{2N} + \bar{z}^{2N}$. Степени базисных векторов приведены в таблице 1. Мы видим, что не существует базисных векторов со степенями меньшими, чем $(m+n)N+i$, но равными $(m+n)N+i$ по модулю $2N$. Тем самым, $p(z, \bar{z})$ должен делиться на $z\bar{z}$; следовательно,

$$\lambda_1 z^{(m+n)N+i} + \lambda_2 \bar{z}^{(m+n)N+i} \quad \text{делится на } z\bar{z},$$

что возможно, только если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Таким образом, теорема доказана.

4. Явные формулы для m -гармонического базиса. Покажем, что базис для $Q^{I_2(2N)}$, рассмотренный в теореме 2, является в действительности m -гармоническим. Обозначим квантовые интегралы, соответствующие инвариантам $z\bar{z}$ и $z^{2N} + \bar{z}^{2N}$, через $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно. Соответствующие операторы имеют вид (ср. [5])

$$\mathcal{L}_1 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} - 4m \sum_{\substack{k=0 \\ k=2j}}^{2N-1} \frac{e^{i\varphi_k} \partial_z - e^{-i\varphi_k} \partial_{\bar{z}}}{-e^{-i\varphi_k} z + e^{i\varphi_k} \bar{z}} - 4n \sum_{\substack{k=1 \\ k=2j+1}}^{2N-1} \frac{e^{i\varphi_k} \partial_z - e^{-i\varphi_k} \partial_{\bar{z}}}{-e^{-i\varphi_k} z + e^{i\varphi_k} \bar{z}}, \quad (13)$$

где $\varphi_k = \pi k / (2N)$. Оператор $\mathcal{L}_2$ имеет следующий вид (с точностью до мультипликативной константы):

$$\mathcal{L}_2 = \partial_z^{2N} + \partial_{\bar{z}}^{2N} + \text{члены младших порядков по } \partial.$$

ТЕОРЕМА 3. *Полиномы (6), (9) являются m -гармоническими, т.е. выполняются следующие равенства:*

- 1) $\mathcal{L}_1(q^s) = \mathcal{L}_2(q^s) = 0, \quad 0 \leq s \leq 3;$
- 2) $\mathcal{L}_1(q_i^s) = \mathcal{L}_2(q_i^s) = 0, \quad 1 \leq i \leq 2N - 1, i \neq N, s = 1, 2.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим вначале, что полиномы q^s m -гармонические. Имеем $\mathcal{L}_1(1) = \mathcal{L}_2(1) = 0$, так как $\deg \mathcal{L}_i(1) < 0$, но, с другой стороны, $\mathcal{L}_i(Q^{I_2(2N)}) \subset Q^{I_2(2N)}$ (см. [9], где это объяснено в общем случае), т.е. образ полиномиален. Далее, докажем, что квазиинвариант q^3 m -гармонический. Заметим, что

$$q^3 = \mu_3 \prod_{i=0}^{2N-1} (\alpha_i, x)^{2m_i+1}$$

характеризуется свойством, что он является антиинвариантным квазиинвариантом для группы $I_2(2N)$ минимальной возможной степени. Так как операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ являются $I_2(2N)$ -инвариантными и так как их степени отрицательны, получаем

$$\mathcal{L}_1(q^3) = \mathcal{L}_2(q^3) = 0.$$

Квазиинварианты q^1, q^2 являются антиинвариантными квазиинвариантами минимальной возможной степени для подгрупп $I_2(N) \subset I_2(2N)$, соответствующих двум разным орбитам зеркал системы $I_2(2N)$. Так как $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ инвариантны по отношению к этим подгруппам, мы получаем оставшиеся равенства из первого утверждения теоремы, а именно,

$$\mathcal{L}_1(q^{1,2}) = \mathcal{L}_2(q^{1,2}) = 0.$$

Перейдем ко второй части. Рассмотрим двумерное пространство $V = \langle q_i^1, q_i^2 \rangle$, порожденное полиномами q_i^1, q_i^2 . Введем двумерные пространства U, W , порожденные образом V при действии операторов $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, а именно,

$$U = \langle \mathcal{L}_1 q_i^1, \mathcal{L}_1 q_i^2 \rangle, \quad W = \langle \mathcal{L}_2 q_i^1, \mathcal{L}_2 q_i^2 \rangle.$$

Так как операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ инвариантны при действии $I_2(2N)$, они являются сплетающими операторами между представлениями V, U и между V, W соответственно. По лемме Шура эти операторы либо нулевые, либо один или два из них являются скалярными операторами. Первый случай соответствует условиям 2) в утверждении теоремы. Во втором случае соответствующее представление U (или W) изоморфно представлению V .

Представление V является двумерным неприводимым представлением. В базисе q_i^1, q_i^2 порождающие матрицы s и $s\tau$ (см. (4)) принимают вид

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s\tau = (-1)^{m+n} \begin{pmatrix} \varepsilon^i & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-i} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для любого $q \in W$ имеем $\deg q = (m+n)N + i - 2N < (m+n)N$. Так как $Q^{I_2(2N)}$ свободно порождается $q^i, q_i^{1,2}$ над $S^{I_2(2N)}$, двумерные неприводимые представления в $Q^{I_2(2N)}$ встречаются в степенях, больших или равных

$$\min_i (\deg q_i^{1,2}) = (m+n)N + 1.$$

Следовательно, $W = 0$. Покажем, что также $U = 0$. Заметим, что, как следует из (14), среди представлений $V_i = \langle q_i^1, q_i^2 \rangle$ каждое неприводимое двумерное представление $I_2(2N)$ встречается дважды. Именно, $V_i \cong V_{2N-i}$, и при этом изоморфизме

$$q_i^1 \rightarrow \lambda q_{2N-i}^2, \quad q_i^2 \rightarrow \lambda q_{2N-i}^1.$$

Если $1 \leq i \leq N-1$, то представление V_i не встречается в пространстве $Q^{I_2(2N)}$ в степенях, меньших i . Тем самым,

$$\mathcal{L}_1(q_i^1) = \mathcal{L}_1(q_i^2) = 0.$$

Нам остается рассмотреть случай $N+1 \leq i \leq 2N-1$. Вообще говоря, мы имеем

$$\mathcal{L}_1(q_i^1) = p q_{2N-i}^2, \quad \mathcal{L}_1(q_i^2) = \bar{p} q_{2N-i}^1,$$

где $p \in S^{I_2(2N)}$. Покажем, что должно выполняться равенство $p = 0$. Вспомним, что

$$q_i^1 = \sum_{s=0}^{m+n} a_s z^{(m+n-s)N+i} \bar{z}^N s, \quad q_{2N-i}^2 = \sum_{s=0}^{m+n} b_s \bar{z}^{(m+n-s)N+2N-i} z^N s.$$

Заметим, что степень q_i^1 по отношению к переменной $\bar{z}$ равняется $(m+n)N$. Ввиду формы (13) оператора $\mathcal{L}_1$ получаем

$$\deg_{\bar{z}} \mathcal{L}_1(q_i^1) \leq (m+n)N.$$

С другой стороны, если $p \neq 0$, мы получаем

$$\deg_{\bar{z}}(p q_{2N-i}^2) \geq \deg_{\bar{z}} q_{2N-i}^2 = (m+n)N + 2N - i > (m+n)N.$$

Противоречие показывает, что $p = 0$, и, следовательно, многочлены q_i^1, q_i^2 являются m -гармоническими. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Квазиинварианты q_i^1, q_i^2 вида (9) определены однозначно.*

Действительно, линейное пространство m -гармоник определено однозначно (см. [9]). Пространство H_i однородных m -гармоник степени $(m+n)N+i$ двумерно. Следовательно, квазиинварианты q_i^1, q_i^2 однозначно характеризуются как однородные m -гармонические многочлены вида

$$z^{(m+n)N+i} + O(z\bar{z}), \quad \bar{z}^{(m+n)N+i} + O(z\bar{z})$$

соответственно, где $O(z\bar{z})$ обозначает полиномы, делящиеся на $z\bar{z}$.

Наконец, представим явные детерминантные формулы для квазиинвариантов q_i^1, q_i^2 . Введем следующую $(m+n+1) \times (m+n+1)$ -матрицу $A = A(i)$:

$$A = \begin{pmatrix} z^{(m+n)N+i} & \bar{z}^N z^{(m+n-1)N+i} & \bar{z}^{2N} z^{(m+n-2)N+i} & & & & & \\ (m+n)N+i & 0 & (m+n-4)N+i & & & & & \\ ((m+n)N+i)^3 & 0 & ((m+n-4)N+i)^3 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n)N+i)^{2n-1} & 0 & ((m+n-4)N+i)^{2n-1} & & & & & \\ 0 & (m+n-2)N+i & 0 & & & & & \\ 0 & ((m+n-2)N+i)^3 & 0 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & ((m+n-2)N+i)^{2n-1} & 0 & & & & & \\ ((m+n)N+i)^{2n+1} & ((m+n-2)N+i)^{2n+1} & ((m+n-4)N+i)^{2n+1} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n)N+i)^{2m-1} & ((m+n-2)N+i)^{2m-1} & ((m+n-4)N+i)^{2m-1} & & & & & \\ & & & & & & & \bar{z}^{(m+n)N} z^i \\ & 0 & (m+n-8)N+i & 0 & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & ((m+n-8)N+i)^3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & 0 & ((m+n-8)N+i)^{2n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \\ (m+n-6)N+i & 0 & & & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n-6)N+i)^3 & 0 & & & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n-6)N+i)^{2n-1} & 0 & & & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n-6)N+i)^{2n+1} & ((m+n-8)N+i)^{2n+1} & \dots & & & & & -(m+n)N+i)^{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ ((m+n-6)N+i)^{2m-1} & ((m+n-8)N+i)^{2m-1} & \dots & & & & & -(m+n)N+i)^{2m-1} \end{pmatrix}.$$

Если мы обозначим $b_t = (m+n-2(t-1))N+i, t = 1, \dots, m+n+1$, то числовые коэффициенты матрицы $A = (d_{st})$ определяются следующим образом. При $s = 2, \dots, n+1$ $d_{st} = b_t^{2s-3}$, если t нечетно и $d_{st} = 0$ иначе. При $s = n+2, \dots, 2n+1$ $d_{st} = b_t^{2(s-n)-3}$, если t четно и $d_{st} = 0$ иначе. При $s = 2n+2, \dots, m+n+1$ $d_{st} = b_t^{2(s-n)-3}$.

ТЕОРЕМА 4. *Образующие $q_i^1, q_i^2, 1 \leq i \leq 2N-1, i \neq N$, определяются следующими формулами:*

$$q_i^1 = c \det A, \quad q_i^2 = c \det \bar{A}, \quad (15)$$

где $c = (\det A_1)^{-1}$, а матрица A_1 получается из A удалением первого столбца и первой строки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $\det A_1 \neq 0$. При доказательстве предложения 2 мы показали (см. формулы (11), (12)), что уравнения квазиинвариантности на коэффициенты многочлена

$$q_i^1 = \sum_{s=0}^{m+n} a_s z^{(m+n-s)N+i} \bar{z}^{Ns}, \quad a_0 = 1,$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq s \leq m+n \\ s=2k}} a_s((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad 1 \leq t \leq n, \\ \sum_{\substack{0 \leq s \leq m+n \\ s=2k+1}} a_s((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad 1 \leq t \leq n, \\ \sum_{s=0}^{m+n} a_s((m+n-2s)N+i)^{2t-1} &= 0, \quad n < t \leq m. \end{aligned} \quad (16)$$

По предложению 2 мы знаем, что эта система имеет решение. Условие $\det A_1 \neq 0$ эквивалентно утверждению, что система (16) имеет единственное решение, так как матрица этой линейной системы есть в точности A_1 . Но решение единственно в соответствии со следствием 1.

Для доказательства теоремы мы должны показать, что

$$(-1)^{k+1} \frac{\det A_k}{\det A_1} = a_{k-1}, \quad k = 1, \dots, m+n+1, \quad (17)$$

где матрица A_k получается из A удалением k -го столбца и первой строки. По правилу Крамера решение $a_1, \dots, a_{m+n}$ линейной системы (16) задается формулами

$$a_{k-1} = \frac{\det \hat{A}_k}{\det A_1},$$

где $\hat{A}_k$ есть матрица A с опущенными первым столбцом и первой строкой, в которой вместо k -го столбца записан первый столбец с обратным знаком. Меняя знак этого столбца и переставляя его на первое место, получаем

$$\det \hat{A}_k = (-1)(-1)^{k-2} \det A_k;$$

таким образом, (17) выполняется. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы вывели формулы для $q_i^{1,2}$ в предположении, что $n < m$. Тем не менее, теорема 4 остается верной, и она дает формулы для базиса в квазиинвариантном модуле, состоящем из m -гармонических многочленов, также и в случае $m = n$. Нетрудно увидеть, что в этом случае формулы (15) редуцируются к формулам для m -гармонического базиса, полученным в [5].

5. Заключительные замечания.

5.1. Образующие для общих кокстеровских систем. В этой работе завершено описание квазиинвариантного модуля для двумерных кокстеровских систем. Описание образующих $Q^{\mathcal{R}}$ над S^G в размерности большей, чем два, неизвестно. В общем случае выбор m -гармонических многочленов в качестве базиса невозможен, как это показано Эттингфом и Гинзбургом [10]. Однако контрпример, найденный в [10], выглядит исключительным, так как состоит из системы Кокстера C_6 с нулевыми кратностями на длинных корнях. Кольцо соответствующих квазиинвариантов может быть описано как модуль над инвариантами группы Кокстера A_1^6 с образующими, которые являются m -гармоническими полиномами, связанными с системой A_1^6 . Вопрос, когда m -гармонические полиномы могут быть выбраны как образующие $Q^{\mathcal{R}}$ над S^G , является открытым вопросом в размерности, большей 2.

5.2. *Деформированные системы.* В работах [14], [15] исследовались квантовые системы типа Калоджеро–Мозера, связанные с некокстеровскими конфигурациями $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(m), \mathcal{C}_{n+1}(m, l)$. Соответствующий оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}^{\mathcal{A}} = \Delta - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \frac{2m_{\alpha}}{(\alpha, x)} \partial_{\alpha}.$$

Как и в кокстеровском случае, коммутативное кольцо квантовых интегралов для $\mathcal{L}^{\mathcal{A}}$ изоморфно кольцу $Q^{\mathcal{A}}$ квазиинвариантов, связанных с системой $\mathcal{A}$. В работе [14] показано, что кольца $Q^{\mathcal{A}}$ являются коэн-маколевыми, т.е. они свободно порождены над полиномиальными подкольцами $S^{\mathcal{A}}$, которые являются аналогами колец инвариантов в случае систем Кокстера. Вопрос описания колец $Q^{\mathcal{A}}$ и, в частности, вопрос об образующих колец $Q^{\mathcal{A}}$ как модуля над $S^{\mathcal{A}}$ является открытой задачей. Естественное обобщение m -гармонических полиномов на некокстеровский случай не дает базис уже в простейшем случае системы $\mathcal{A}_2(2)$ (см. [14]).

Благодарности. Я благодарен А.П. Веселову за полезные и стимулирующие обсуждения и Н. Андрееву за помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chalykh O. A., Veselov A. P. Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras // *Comm. Math. Phys.* 1990. V. 126. P. 597–611.
- [2] Calogero F. Solution of the one-dimensional n -body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potential // *J. Math. Phys.* 1971. V. 12. P. 419–436.
- [3] Moser J. Three integrable hamiltonian systems connected with isospectral deformations // *Adv. Math.* 1975. V. 16. P. 197–220.
- [4] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Quantum integrable systems related to Lie algebras // *Phys. Rep.* 1983. V. 94. P. 313–404.
- [5] Feigin M., Veselov A. P. Quasi-invariants of Coxeter groups and m -harmonic polynomials // *Intern. Math. Res. Notices.* 2002. V. 10. P. 521–545.
- [6] Heckman G. J., Opdam E. M. Root systems and hypergeometric functions I // *Compositio Math.* 1987. V. 64. P. 329–352.
- [7] Taniguchi K. On the symmetry of commuting differential operators with singularities along hyperplanes // *E-print math-ph/0309011*, 2003.
- [8] Волченко К., Козачко А., Мишачев К. Кольцо квазиинвариантов для групп диэдра // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1999. № 1. С. 48–51.
- [9] Feigin M., Veselov A. P. Quasi-invariants of Coxeter groups and m -harmonic polynomials // *E-print math-ph/0105014*. 2001.
- [10] Etingof P., Ginzburg V. On m -quasi-invariants of a Coxeter group // *Mosc. Math. J.* 2002. V. 2. № 3. P. 555–566.
- [11] Felder G., Veselov A. P. Action of Coxeter groups on m -harmonic polynomials and Knizhnik–Zamolodchikov equations // *Mosc. Math. J.* 2003. V. 3. № 4. P. 1269–1291.
- [12] Berest Yu., Etingof P., Ginzburg V. Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants // *E-print math. QA/0111005*. 2001.
- [13] Feigin M. Rings of Quantum Integrals for Generalized Calogero–Moser Problems. Ph.D. Thesis. UK: Loughborough University, 2003.
- [14] Feigin M., Veselov A. P. Quasi-invariants and quantum integrals of the deformed Calogero–Moser systems // *Intern. Math. Res. Notices.* 2003. V. 46. P. 2487–2511.
- [15] Chalykh O. A., Feigin M. V., Veselov A. P. Multidimensional Baker–Akhiezer functions and Huygens' principle // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 206. P. 533–566.