Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О фазовом переходе для классических фермионов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 470–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 11:29:32

О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ

В. П. Маслов

Рассмотрим уравнение Лиувилля для системы N классических фермионов со спином, которое имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(-i \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial x_j} + i \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \left(\frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right. \right. \\ & + \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ & \left. \left. - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \rho(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N) \\ & = \lambda \rho(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_j, p_j \in \mathbb{R}^3$; $s_j = 1, 2$ – спиновые переменные; $V(x; p_1, p_2; s_1, s_2) = V(-x; p_2, p_1; s_2, s_1) \in C^1$; $\rho(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N)$ – антисимметричная функция относительно перестановки аргументов (x_j, p_j, s_j) , (x_k, p_k, s_k) и использованы обозначения типа

$$p \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{\alpha=1}^3 p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Антисимметричные решения уравнения (1) при четных N выражаются через собственные функции вторично квантованного оператора вида

$$\begin{aligned} \hat{H}_N &= \sum_{s_1=1}^2 \cdots \sum_{s_N=1}^2 \int \cdots \int dx_1 dp_1 \dots dx_N dp_N \hat{B}^+(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \cdots \\ & \times \hat{B}^+(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N) \left(-i \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right. \\ & + i \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \left(\frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \\ & \times \underset{x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N}{\text{Asymm}} \hat{B}^-(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \cdots \hat{B}^-(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} & \underset{x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N}{\text{Asymm}} f(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N) \\ & = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sign } \sigma} (\hat{P}_{\sigma} f)(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N) \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

и сумма берется по всем перестановкам σ аргументов (x_j, p_j, s_j) , $\text{sign } \sigma$ – знак перестановки, $\hat{P}_\sigma$ – оператор перестановки аргументов, операторы $\hat{B}^\pm(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$\begin{aligned} & [\hat{B}^-(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2), \hat{B}^+(x'_1, p'_1, s'_1; x'_2, p'_2, s'_2)] \\ & = \delta(x_1 - x'_1) \delta(p_1 - p'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(p_2 - p'_2) \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2}, \\ & [\hat{B}^\pm(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2), \hat{B}^\pm(x'_1, p'_1, s'_1; x'_2, p'_2, s'_2)] = 0. \end{aligned}$$

В квазиклассическом пределе, когда коммутаторы между операторами $\hat{B}^+$ и $\hat{B}^-$ малы, оператор (2) отвечает бесконечномерная гамильтонова система уравнений вида

$$\begin{aligned} & \sum_{s_3=1} \cdots \sum_{s_N=1} \int \cdots \int dx_3 dp_3 \cdots dx_N dp_N \Phi^*(x_3, p_3, s_3; x_4, p_4, s_4) \cdots \\ & \times \Phi^*(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N) \left(-i \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right. \\ & + i \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N \left(\frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial V(x_j - x_k; p_j, p_k; s_j, s_k)}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \lambda \right) \\ & \times \text{Asymm}_{x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N} \Phi(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \cdots \Phi(x_{N-1}, p_{N-1}, s_{N-1}; x_N, p_N, s_N), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) = -\Phi(x_2, p_2, s_2; x_1, p_1, s_1)$. Аналогично работе [1], суммируя эти уравнения по числу фермионов N , мы получим уравнения, описывающие систему классических фермионов:

$$\begin{aligned} & -i \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \\ & + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x_1} \frac{\partial^2}{\partial p_1} + \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x'} \frac{\partial^2}{\partial p'} \right. \\ & \left. - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p'} \frac{\partial^2}{\partial x'} \right) \\ & \times (G(x'_1, p'_1, s'_1; x'_2, p'_2, s'_2) G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) - G(x'_1, p'_1, s'_1; x_2, p_2, s_2) G(x_1, p_1, s_1; x'_2, p'_2, s'_2) \\ & + R^*(x'_1, p'_1, s'_1; x_1, p_1, s_1) R(x'_2, p'_2, s'_2; x_2, p_2, s_2)) \\ & + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial p_2} + \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x'} \frac{\partial^2}{\partial p'} \right. \\ & \left. - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p'} \frac{\partial^2}{\partial x'} \right) \\ & \times (G(x'_2, p'_2, s'_2; x'_1, p'_1, s'_1) G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) - G(x'_2, p'_2, s'_2; x_2, p_2, s_2) G(x_1, p_1, s_1; x'_1, p'_1, s'_1) \\ & + R^*(x'_2, p'_2, s'_2; x_1, p_1, s_1) R(x'_1, p'_1, s'_1; x_2, p_2, s_2)) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& -i \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \\
& + i \left(\frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right. \\
& \left. - \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\
& \times R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \\
& + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x_1} \frac{\partial^2}{\partial p_1} + \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x'} \frac{\partial^2}{\partial p'} \right. \\
& - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p'} \frac{\partial^2}{\partial x'} \\
& + \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial p_2} + \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x'} \frac{\partial^2}{\partial p'} \\
& \left. - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p'} \frac{\partial^2}{\partial x'} \right) \\
& \times (G(x_1', p_1', s_1'; x_1, p_1, s_1) R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) - G(x_1', p_1', s_1'; x_1, p_1, s_1) R(x_1', p_1', s_1'; x_2, p_2, s_2) \\
& + G(x_1', p_1', s_1'; x_2, p_2, s_2) R(x_1', p_1', s_1'; x_1, p_1, s_1)) = 0, \tag{5}
\end{aligned}$$

где индексы над операторами обозначают порядок действия [2], $G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ и $R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) &= G^*(x_2, p_2, s_2; x_1, p_1, s_1), \\
R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) &= -R(x_2, p_2, s_2; x_1, p_1, s_1).
\end{aligned}$$

Рассмотрим решения уравнений (4), (5), которые отвечают температурным состояниям системы классических фермионов. Температурное решение уравнения (1) есть интеграл по энергии E распределения Гиббса и функций $\tilde{\rho}_E(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N)$, которые являются пределом при $\hbar \rightarrow 0$ ($\hbar$ – постоянная Планка) функций

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_E^{\hbar}(x_1, p_1, s_1; \dots; x_N, p_N, s_N) &= \Psi_E(x_1, s_1; \dots; x_N, s_N) \tilde{\Phi}_E^*(p_1, \dots, p_N) \\
&\times \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N N p_j x_j \right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N/2}},
\end{aligned}$$

где антисимметричные функции $\Psi_E(x_1, s_1; \dots; x_N, s_N)$ – решения отвечающего уравнению (1) уравнения Шрёдингера для фермионов со спином, симметричные функции $\tilde{\Phi}_E(p_1, \dots, p_N)$ – решения уравнения Шрёдингера для бозонов в импульсном представлении, которые сосредоточены на уровне энергии E . При этом на каждом уровне энергии фермионные функции распределены по Гиббсу, а бозонная функция на каждом уровне только одна. Такому случаю отвечают решения уравнений (4), (5), имеющие вид

$$\begin{aligned}
R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) &= 0, \\
G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) &= \delta(x_1 - x_2) \delta(p_1 - p_2) \delta_{s_1 s_2} \frac{1}{e^{(\omega(p_1) - \mu)/\theta} + 1}, \tag{6}
\end{aligned}$$

где θ – температура, μ – химический потенциал, $\omega(p)$ является решением уравнения

$$\omega(p) = \frac{p^2}{2} + 2 \iint dy dk V(x - y; p, k) \frac{1}{e^{(\omega(k) - \mu)/\theta} + 1}.$$

Решения вида (6) отвечают температурному состоянию “холостых” классических фермионов. Согласно общей концепции [1], переход в “парное” состояние происходит при температуре, при которой от решений вида (6) отвечаются решения уравнений (4), (5) с $R(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \neq 0$. Наложим на потенциал взаимодействия $V(x; p_1, p_2)$ условие

$$\iint dy dk \frac{\partial V(x-y; p, k)}{\partial p} \frac{1}{e^{(\omega(k)-\mu)/\theta} + 1} = 0, \quad (7)$$

справедливое при любых θ, μ . В этом случае для системы классических фермионов температура фазового перехода в сверхпроводящее состояние определяется из уравнения в вариациях для уравнения (5), которое имеет вид

$$\begin{aligned} & -i \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \Phi(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \\ & + i \left(\frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial p_2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2)}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ & \times \Phi(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) \\ & + i \sum_{s'=1}^2 \iint dx' dp' \left(\frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial p'} \right. \\ & \left. - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial V(x_1 - x'; p_1, p'; s_1, s')}{\partial p'} \frac{\partial}{\partial x'} \right. \\ & + \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial p'} \\ & \left. - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial V(x_2 - x'; p_2, p'; s_2, s')}{\partial p'} \frac{\partial}{\partial x'} \right) \\ & \times (G(x', p', s'; x_2, p_2, s_2) \Phi(x', p', s'; x_1, p_1, s_1) \\ & - G(x', p', s'; x_1, p_1, s_1) \Phi(x', p', s'; x_2, p_2, s_2)) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $G(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2)$ имеет вид (6). Фазовый переход в системе с модельным потенциалом взаимодействия, который удовлетворяет условию (7), происходит при температуре, при которой у уравнения (8) появляется “нетривиальное” в некотором смысле решение

$$\Phi(x_1, p_1, s_1; x_2, p_2, s_2) = -\Phi(x_2, p_2, s_2; x_1, p_1, s_1).$$

Пусть

$$V(x_1 - x_2; p_1, p_2; s_1, s_2) = \begin{cases} W(x_1 - x_2; p_1, p_2) \in C^1 & \text{при } s_1 \neq s_2, \\ 0 & \text{при } s_1 = s_2. \end{cases}$$

В этом случае уравнение (8) примет вид

$$\left\{ \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}; \Phi(x_1, p_1; x_2, p_2) \right\} + (1 - n(p_1) - n(p_2)) \{W(x_1 - x_2; p_1, p_2); \Phi(x_1, p_1; x_2, p_2)\} = 0,$$

где $\{ \cdot ; \cdot \}$ – скобка Пуассона, $n(p) = 1/(e^{(\omega(p)-\mu)/\theta} + 1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. // Матем. заметки.. Т. 64. № 2. С. 315–317.
2. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.