Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Павлов, Аналитическая непродолжаемость степенных рядов некоторых классов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:22:43

АНАЛИТИЧЕСКАЯ НЕПРОДОЛЖАЕМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

А. И. Павлов

Целью настоящей публикации является доказательство следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть действительное иррациональное число $\alpha > 0$ и последовательность натуральных чисел M удовлетворяет условиям:

- 1) плотность последовательности M положительна, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} 1 = \gamma > 0;$$

- 2) последовательность $a_\nu = \{\alpha m_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, $m_\nu \in M$, равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$; здесь и далее, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

Тогда если $f(x)$ – интегрируемая по Риману на отрезке $[0, 1]$ функция, коэффициенты Фурье с достаточно большими (по модулю) номерами которой не равны 0, то степенной ряд

$$F(z) = \sum_{m \in M} f(\{\alpha m\}) z^m,$$

сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть число α и последовательность M удовлетворяют условиям теоремы 1,

$$P(x, y) = \sum_{\nu=0}^k x^\nu p_\nu(y),$$

где целое $k \geq 1$, $p_\nu(y)$ – многочлен с комплексными коэффициентами, $\nu = 0, 1, \dots, k$, и $p_k(y) \not\equiv C$, где C – постоянная. Тогда степенной ряд

$$F(z) = \sum_{m \in M} P(m, \{\alpha m\}) z^m,$$

сходящийся в круге $|z| < 1$, не может быть аналитически продолжен в область $|z| > 1$ через любую дугу на окружности $|z| = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда последовательность M совпадает с множеством всех натуральных чисел, обе теоремы были доказаны Морделлом в работах [1] и [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве M можно рассматривать, например, следующие множества натуральных чисел:

- 1) арифметическая прогрессия $m_\nu = a\nu + b$, $\nu = 1, 2, \dots$, где целые a и b такие, что $a \geq 1$ и $b \geq 0$;
- 2) числа без k -х степеней, $k \geq 2$; напомним, что натуральное число m называется *числом без k -х степеней*, если для любого простого p выполнено условие $p^k \nmid m$;
- 3) обобщение чисел без k -х степеней (см. [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00721.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\gamma = 0$ и множество M бесконечно, то теоремы 1 и 2 следуют из теоремы Фабри [4].

Доказательство теоремы 1 опирается на критерий Г. Вейля [5]: последовательность $a_n, n = 1, 2, \dots$, действительных чисел равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ тогда и только тогда, когда для любой интегрируемой по Риману на отрезке $[0, 1]$ функции $\varphi(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(a_n) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть целое $h \neq 0$ и $0 < r < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} F(re^{2\pi i \alpha h}) &= (1-r) \left(\sum_{m=0}^{\infty} r^m \right) \left(\sum_{m \in M} f(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} r^m \right) \\ &= (1-r) \sum_{N=1}^{\infty} r^N \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} f(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m}. \end{aligned}$$

Согласно критерию Г. Вейля и условию теоремы 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} f(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} = \gamma \hat{f}(h),$$

где $\hat{f}(h)$ – коэффициент Фурье с номером h функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, при $0 < r < 1$ и $r \rightarrow 1$

$$F(re^{2\pi i \alpha h}) = (1-r) \gamma f(h) \sum_{N=1}^{\infty} N r^N (1 + o(1)) = \frac{\gamma \hat{f}(h)}{1-r} + o\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Согласно условию теоремы 1 существует $h_0 > 0$ такое, что при $|h| > h_0$ выполняется неравенство $f(h) \neq 0$. Поэтому при $|h| > h_0$ и $r < 1$ получим

$$\lim_{r \rightarrow 1} |F(re^{2\pi i \alpha h})| = \infty. \quad (1)$$

Значит, точка $z_h = e^{2\pi i \alpha h}$ является особой точкой для функции $F(z)$. Так как множество точек z_h , когда h пробегает множество всех целых чисел, всюду плотно на окружности $|z| = 1$, теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 требуется утверждение, которое, возможно, известно.

ЛЕММА. Если для некоторого многочлена $Q(x)$ степени $k \geq 1$ найдутся целые попарно различные числа $h_1, h_2, \dots, h_k$ такие, что

$$\int_0^1 Q(x) e^{2\pi i x h_\nu} dx = 0, \quad h_\nu \neq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, k, \quad (2)$$

то выполняется тождество $Q(x) \equiv Q(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Q(x) = \sum_{m=0}^k Q_m x^m,$$

где $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ – комплексные числа. Тогда, пользуясь равенством ($h \neq 0$ – целое)

$$\int_0^1 Q(x) e^{2\pi i x h} dx = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{Q^{(m)}(1) - Q^{(m)}(0)}{(2\pi i h)^{m+1}},$$

где $Q^{(m)}(x)$ – производная порядка m многочлена $Q(x)$, и равенствами (2), получим однородную систему линейных уравнений относительно разностей $Q^{(m)}(1) - Q^{(m)}(0)$, $m = 1, 2, \dots, k$,

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{Q^{(m)}(1) - Q^{(m)}(0)}{(2\pi i h_\nu)^{m+1}} = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, k. \quad (3)$$

Если Δ – определитель этой системы, то $\Delta = (h_1 \cdots h_k)^{-1} W(h_1^{-1}, \dots, h_k^{-1})$, где $W(h_1, \dots, h_k)$ – определитель Вандермонда, построенный на системе чисел $h_1, \dots, h_k$. Согласно условию леммы получим $W(h_1, \dots, h_k) \neq 0$. Значит, система (3) имеет только тривиальное решение:

$$Q^{(m)}(1) - Q^{(m)}(0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, k.$$

Так как $Q^{(m)}(0) = m! Q_m$ и

$$Q_m^{(1)} = \sum_{\nu=m}^k \nu(\nu-1) \cdots (\nu-m+1) Q_\nu, \quad m = 0, 1, \dots, k,$$

получим систему уравнений относительно чисел $Q_1, \dots, Q_k$

$$\sum_{\nu=m}^k \nu(\nu-1) \cdots (\nu-m+1) Q_\nu = m! Q_m, \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (4)$$

Из уравнения с номером $m = k-1$ получим $Q_k = 0$. Подставляя $Q_k = 0$ в уравнение (4) с номером $m = k-2$, получим $Q_{k-1} = 0$. Рассуждая аналогично, получим $Q_{k-2} = Q_{k-3} = \cdots = Q_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть целое $h \neq 0$ и $0 < r < 1$. Тогда при $r \rightarrow 1$

$$F(re^{2\pi i \alpha h}) = \sum_{m \in M} P(m, \{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} r^m = \sum_{m \in M} m^k p_k(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} r^m + O((1-r)^{-k}). \quad (5)$$

Далее,

$$\sum_{m \in M} m^k p_k(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} r^m = (1-r) \sum_{N=1}^{\infty} r^N \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} m^k p_k(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m}. \quad (6)$$

Если

$$S_{\alpha, h}(N) = \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} p_k(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m}, \quad N \geq 1,$$

то при фиксированном $h \neq 0$ и $N \rightarrow \infty$ согласно критерию Вейля получим асимптотику $S_{\alpha, h}(N) \sim \gamma \hat{p}_k(h) N$, где γ – плотность последовательности M . Значит, при $N \rightarrow \infty$ и $S_{\alpha, h}(0) = 0$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \in M}} m^k p_k(\{\alpha m\}) e^{2\pi i \alpha h m} &= \sum_{m=1}^N m^k (S_{\alpha, h}(m) - S_{\alpha, h}(m-1)) \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} (m^k - (m+1)^k) S_{\alpha, h}(m) + N^k S_{\alpha, h}(N) \\ &= N^k S_{\alpha, h}(N) - k \sum_{m=1}^N m^{k-1} S_{\alpha, h}(m) + O(N^k) \\ &= \gamma \hat{p}_k(h) N^{k+1} - \gamma \hat{p}_k(h) k \sum_{m=1}^N m^k + o(N^{k+1}) \\ &= \frac{\gamma \hat{p}_k(h)}{k+1} N^{k+1} + o(N^{k+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, из (5) и (6) при $r \rightarrow 1$ получим

$$F(re^{2\pi i \alpha h}) = \frac{\gamma \hat{p}_k(h)}{k+1} (1-r)^{-(k+1)} + o((1-r)^{-(k+1)}). \quad (7)$$

Так как $p_k(y) \not\equiv p_k(0)$, согласно лемме существует $h_0 > 0$ такое, что $\hat{p}_k(h) \neq 0$ при $|h| > h_0$. Следовательно, при таких h из (7) следует равенство (1).

Значит, точка $z_h = e^{2\pi i \alpha h}$ для функции $F(z)$ является особой. Так как множество точек z_h при $|h| > h_0$ всюду плотно на окружности $|z| = 1$, теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mordell L. J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 522–526.
2. Mordell L. J. // Notices Amer. Math. Soc. 1964. V. 11. P. 312.
3. Павлов А. И. // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 2. С. 102–108.
4. Вибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
5. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.