Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Чакветадзе, Стохастическая устойчивость инвариантной меры в одномерной модели бурения, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

`http://www.mathnet.ru/rus/agreement`

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:17:05

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ БУРЕНИЯ

Г. Чакветадзе

Исследуются стохастические возмущения одномерного отображения, моделирующего процесс бурения и введенного А. Лясотой и П. Русеком в [1]. Пусть $p: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ – 1-периодическая, выпуклая и трижды непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция такая, что $p(1 - r) = p(r)$, $r \in \mathbb{R}$. Для $s \in \mathbb{R}$ через $\tau(s)$ обозначим абсциссу ближайшей справа к s точки пересечения графиков функций p и h_s , где

$$h_s(r) = p(s) + p'(s + 0)(r - s) - \frac{\lambda}{2}(r - s)^2, \quad \lambda < \inf_{r \in [0, 1]} |p''(r)|.$$

Положим $W(s) = \tau(s) \bmod 1$, $s \in [0, 1]$. Ниже будем предполагать, что параметр λ удовлетворяет условию (В) теоремы в [2]. В этом случае график W описывается следующей леммой.

ЛЕММА 1. *Существуют точки $s_0, \dots, s_n$, $0 < s_n < \dots < s_1 < 1/2 < s_0 < 1$, $n \geq 2$, и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что*

- 1) *W непрерывно дифференцируемо и строго убывает на интервалах $I_k = (s_k, s_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$;*
- 2) *$(W(s) - \varepsilon_0, W(s) + \varepsilon_0) \subset I$ для всех $s \in I = [s_n, s_0]$;*
- 3) *$\sup_{s \in I} (|W'(s)|)^{-1} < \infty$ и $\text{dist}(W^l(s), I) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$ для всех $s \in (0, 1)$.*

Пусть $w = W|_I$, $L_1 = L_1(I, ds)$, $L_\infty = L_\infty(I, ds)$,

$$BV = \left\{ f \in L_1 : v(f) = \inf_{\hat{f} \in f} \text{Var } \hat{f} < \infty \right\}.$$

Через $\|\cdot\|_\gamma = \gamma v(f) + \|\cdot\|_1$ ($\|\cdot\|_1$ — норма в L_1), $\gamma \in (0, 1]$, обозначим норму, которая превращает BV в банахово пространство. Для линейного ограниченного оператора $T: (BV, \|\cdot\|_1) \rightarrow (BV, \|\cdot\|_1)$ через $\sigma(T)$ обозначается спектр T . Оператор Перрона–Фробениуса $P: L_1 \rightarrow L_1$ определяется равенством

$$\int g \cdot P f ds = \int g \circ w \cdot f ds, \quad f \in L_1, \quad g \in L_\infty.$$

В принятых предположениях о значениях λ 1 есть простое собственное значение $P: L_1 \rightarrow L_1$ с собственной функцией $\varrho \in BV$, являющейся плотностью конечной абсолютно непрерывной инвариантной меры μ отображения w . Кроме того, $P(BV) \subset BV$, оператор P ограничен в $(BV, \|\cdot\|_1)$ и $\kappa = \sup\{|z| : z \in \sigma(P) \setminus \{1\}\} < 1$.

Одним из критериев адекватности введенной динамической модели бурения служит устойчивость меры μ относительно семейства случайных возмущений $\Upsilon_{\vec{\varepsilon}}, \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y)$, определяемого следующим образом. Предположим, что заданы малые отрезки J_x, J_y и функции $v_1: I \times J_x \times J_y \rightarrow \mathbb{R}$, $v_2: I \times J_y \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

- а) $v_i, \partial v_i / \partial s, \partial^2 v_i / \partial s^2$ непрерывно зависят от s, x, y ;
- б) для всех $s \in I, y \in J_y$ функция $v_1(s, \cdot, y)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на J_x ;
- в) $v_1(s, 0, 0) = p(s), v_2(s, 0) = p'(s)$.

Зафиксируем $s \in I$ и введем борелевские функции $\tau(s, \cdot, \cdot): J_x \times J_y \rightarrow \mathbb{R}, w(s, \cdot, \cdot): J_x \times J_y \rightarrow \mathbb{R}$. А именно, для любой пары $\langle x, y \rangle \in J_x \times J_y$ через $\tau(s, x, y)$ обозначим абсциссу ближайшей справа к 1 точки пересечения основного профиля и графика функции

$$h_{s,x,y}(r) = v_1(s, x, y) + v_2(s, y)(r - s) - \frac{\lambda}{2}(r - s)^2;$$

положим $w(s, x, y) = \tau(s, x, y) \bmod 1$, $\langle x, y \rangle \in J_x \times J_y$ (промежутки J_x и J_y предполагаются настолько малыми, что верно включение $w(I \times J_x \times J_y) \subset I$). Рассмотрим семейство случайных величин $w(s, \xi_{\vec{\varepsilon}}, \eta_{\vec{\varepsilon}})$, где для любого $s \in I$ $\langle \xi_{\vec{\varepsilon}}, \eta_{\vec{\varepsilon}} \rangle$ распределено на множестве $X_{\vec{\varepsilon}} \times Y_{\vec{\varepsilon}} \subset J_x \times J_y$, $X_{\vec{\varepsilon}} = [-\varepsilon_x, \varepsilon_x], Y_{\vec{\varepsilon}} = [-\varepsilon_y, \varepsilon_y]$, с плотностью $u_{\vec{\varepsilon}}(s, \cdot, \cdot)$, липшицевой по s с константой $K = K(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = o(1/(\varepsilon_x \varepsilon_y))$, $|\vec{\varepsilon}| = \max(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \rightarrow 0$. Для любого $\vec{\varepsilon}$ плотности $p_{\vec{\varepsilon}}(s, \cdot)$ распределения величин $w(s, \xi_{\vec{\varepsilon}}, \eta_{\vec{\varepsilon}})$ могут быть взяты в качестве переходных плотностей вероятностей однородной марковской цепи $\Upsilon_{\vec{\varepsilon}}$. Для исследования асимптотики стационарных распределений $\varrho_{\vec{\varepsilon}}$ цепей $\Upsilon_{\vec{\varepsilon}}$ при $|\vec{\varepsilon}| \rightarrow 0$ введем марковские операторы $P_{\vec{\varepsilon}}: L_1 \rightarrow L_1$ по формуле

$$P_{\vec{\varepsilon}} f(r) = \int f(s) p_{\vec{\varepsilon}}(s, r) ds.$$

ТЕОРЕМА. *Предположим, что отображение w не имеет периодических точек разрыва. Тогда для достаточно малого $|\vec{\varepsilon}|$ 1 есть простое собственное значение оператора $P_{\vec{\varepsilon}}: L_1 \rightarrow L_1$ с собственной функцией $\varrho_{\vec{\varepsilon}} \in BV$, являющейся плотностью стационарного распределения цепи $\Upsilon_{\vec{\varepsilon}}$; $P_{\vec{\varepsilon}}$ ограничены в BV , $\kappa_{\vec{\varepsilon}} = \sup\{|z| : z \in \sigma(P_{\vec{\varepsilon}}) \setminus \{1\}\} < 1$. Кроме того,*

- 1) $|\varrho_{\vec{\varepsilon}} - \varrho|_1 \rightarrow 0, |\vec{\varepsilon}| \rightarrow 0$;
- 2) $\lim_{|\vec{\varepsilon}| \rightarrow 0} \kappa_{\vec{\varepsilon}} < \kappa^{1/2}$.

Доказательство теоремы содержится в леммах 2–4. Предварим формулировку первой из них следующим замечанием. При достаточно малых x, y функция $w(\cdot, x, y)$ задает кусочно-монотонное преобразование $w_{x,y}$ промежутка I в себя. Семейства $\{s_{k,x,y}\}_{k=0}^n$ и $\{I_{k,x,y}\}_{k=1}^n$ точек разрыва и интервалов монотонности отображений $w_{x,y}$ находятся в биективном соответствии с семействами $\{s_k\}_{k=0}^n$ и $\{I_k\}_{k=1}^n$, причем для любого k множества $\{(s, r) : s \in I_{k,x,y}, r = w_{x,y}(s)\}$ сходятся в хаусдорфовой метрике к множествам $\{(s, r) : s \in I_k, r = w(s)\}$. Положим $\alpha = \langle x, y \rangle$, $|\alpha| = \max(|x|, |y|)$, $w_{k,\alpha} = w_\alpha|_{I_{k,\alpha}}$, $g = |w'|^{-1}$,

$$g_\alpha(s) = \left| \frac{\partial}{\partial s} w(s, x, y) \right|^{-1}, \quad u_{\varepsilon,\alpha} = u_\varepsilon(\cdot, x, y), \quad \int \cdot d\alpha = \int_{X_\varepsilon} \int_{Y_\varepsilon} \cdot dx dy.$$

ЛЕММА 2. Для $k \in \{1, \dots, n\}$

- 1) при достаточно малых $|\alpha|$ функция $g_\alpha \circ w_{k,\alpha}^{-1}$ липшицева на промежутке $w_\alpha(I_{k,\alpha})$ с константой C_1 , не зависящей от α ;
- 2) для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta)$ такое, что если $|\alpha| < \varepsilon_1$, $s \in I_k$, $s' \in I_{k,\alpha}$, $|s - s'| < \varepsilon_1$, то $|g(s) - g_\alpha(s')| < \delta$.

Следующая лемма дает удобную формулу для вычисления P_ε^l . Для набора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_l, y_l \rangle)$ положим

$$w_{\vec{\alpha}}^l = w_{\alpha_l} \circ \dots \circ w_{\alpha_1}, \quad g_{\vec{\alpha}}^l(s) = g_{\alpha_1}(s) \cdots g_{\alpha_l}(w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})}^{l-1}(s)), \\ u_{\varepsilon, \vec{\alpha}}^l(s) = u_{\varepsilon, \alpha_1}(s) \cdots u_{\varepsilon, \alpha_l}(w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})}^{l-1}(s)).$$

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$P_\varepsilon^l f(r) = \int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l P_{\vec{\alpha}}^l f(r),$$

где

$$P_{\vec{\alpha}}^l f(r) = \sum_{s: w_{\vec{\alpha}}^l(s)=r} f(s) g_{\vec{\alpha}}^l(s) u_{\varepsilon, \vec{\alpha}}^l(s).$$

Следующая лемма позволяет применить к нашей ситуации леммы теории возмущений из [3]. Положим (см. [4])

$$\theta = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sup_{s \in I} g(s) \cdots g(w^{l-1}(s)) \right)^{1/l} < 1.$$

ЛЕММА 4. Пусть $\theta < \Lambda$. Тогда существуют $C > 0$, $L \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $l \geq L$ найдется $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(l)$ такое, что $\|P_\varepsilon^l - P^l\|_{\Lambda^l} \leq C\Lambda^l$, $|\vec{\varepsilon}| < \varepsilon_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $c_i = c_i(\vec{\varepsilon})$ функцию, бесконечно малую при $|\vec{\varepsilon}| \rightarrow 0$. Зафиксируем Θ , $\theta < \Theta < \Lambda$. Покажем, что существуют $L_1, L_2 \in \mathbb{N}$ и $D_1, D_2 > 0$ такие, что

$$\Lambda^l \text{Var } P^l f < (\Theta^l + \Lambda^l D_1)(\Lambda^l \text{Var } f + |f|_1), \quad l \geq L_1, \quad (1)$$

и для всех $l \geq L_2$ найдется $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(l)$ такое, что

$$\Lambda^l \text{Var } P_\varepsilon^l f < (\Theta^l + \Lambda^l D_2)(\Lambda^l \text{Var } f + |f|_1), \quad |\vec{\varepsilon}| < \varepsilon_3, \quad (2)$$

$$|P_\varepsilon^l f - P^l f|_1 \leq c_1 \|f\|_{\Lambda^l}. \quad (3)$$

Оценка (1) вытекает из предложения 1 в [5]. Поясним вывод (2). Используя леммы 3 и 4 из [5], получим

$$\Lambda^l \text{Var } P_\varepsilon^l f \leq \Lambda^l \int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l \text{Var } P_{\vec{\alpha}}^l f \leq \Lambda^l \int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l \text{Var } f g_{\vec{\alpha}}^l u_{\varepsilon, \vec{\alpha}}^l \\ \leq \Lambda^l \int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l (\Delta_{\varepsilon, \vec{\alpha}}^l \text{Var } f g_{\vec{\alpha}}^l + \Omega_{\varepsilon, \vec{\alpha}}^l \sup f g_{\vec{\alpha}}^l), \quad (4)$$

где

$$\Delta_{\varepsilon, \alpha}^l = \sup u_{\varepsilon, \alpha}^l \leq \prod_{i=1}^l \sup u_{\varepsilon}(\cdot, x_i, y_i),$$

$$\Omega_{\varepsilon, \alpha}^l = \sum_{j \in S_{\alpha}^l} \text{Var}_J u_{\varepsilon, \alpha}^l \leq \sum_{j=1}^l \text{Var} u_{\varepsilon}(\cdot, x_j, y_j) \prod_{i \neq j} \sup u_{\varepsilon}(\cdot, x_i, y_i) \cdot N_{\alpha}^l,$$

S_{α}^l – семейство интервалов монотонности композиции w_{α}^l , $N_{\alpha}^l = \text{card } S_{\alpha}^l$. Используя лемму 2 и рассуждая так же, как и при выводе оценки (5.8) в [3], найдем $L_2 \in \mathbb{N}$, $D_2 > 0$, $\delta > 0$ такие, что при $l \geq L_2$ и малом ε

$$\text{Var} f g_{\alpha}^l < (\Theta - \delta)^l \text{Var} f + (D_2 - \delta) |f|_1, \quad \max_{1 \leq i \leq l} |\alpha_i| < \varepsilon. \quad (5)$$

Так как

$$N_{\alpha}^l \leq n^l, \quad \iint dx dy u_{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}, x, y\right) = 1,$$

$$\iint dx dy \sup u_{\varepsilon}(\cdot, x, y) = \iint dx dy u_{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}, x, y\right) + \iint dx dy \left(\sup u_{\varepsilon}(\cdot, x, y) - u_{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}, x, y\right)\right)$$

$$\leq 1 + \frac{K}{2} \cdot 4\varepsilon_x \varepsilon_y,$$

то

$$\int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l \Delta_{\varepsilon, \alpha}^l \leq (1 + 2K\varepsilon_x \varepsilon_y)^l \rightarrow 1, \quad |\vec{\varepsilon}| \rightarrow 0,$$

$$\int \cdots \int d\alpha_1 \cdots d\alpha_l \Omega_{\varepsilon, \alpha}^l \leq (1 + 2K\varepsilon_x \varepsilon_y)^{l-1} 4K\varepsilon_x \varepsilon_y l n^l \rightarrow 0,$$

Соединяя (4) и (5), получаем (2).

С помощью лемм 2 и 7 из [6] находим, что

$$|P_{\varepsilon} f - P f|_1 \leq c_2 \|f\|_1. \quad (6)$$

При $l \geq 2$ имеем $|P_{\varepsilon}^l f - P^l f|_1 \leq |P_{\varepsilon}^{l-1} (P_{\varepsilon} - P) f|_1 + |(P_{\varepsilon}^{l-1} - P^{l-1}) P f|_1$. Так как $|P_{\varepsilon}|_1 = 1$ и $\|P f\|_1 \leq \text{const} \|f\|_1$, действуя по индукции, получаем неравенство $|P_{\varepsilon}^l f - P^l f|_1 \leq c_3 \|f\|_1$, после чего оценка (3) вытекает из эквивалентности норм $\|\cdot\|_{\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 7 из [7], а также используя неравенства (1)–(3) и $\Theta < \Lambda$, получаем требуемую в лемме оценку с $L = \max(L_1, L_2)$, $C = D_1 + D_2 + 2$.

Утверждение теоремы вытекает из неравенства (6), леммы 4 и результатов [3, п. 5.Е] (см. также [8]).

Автор выражает глубокую признательность проф. А. М. Стёпину за постановку задачи, внимание к этой работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lasota A., Rusek P. // Arch. Gornickwa. 1974. V. 19. № 3. P. 281–295.
2. Chakvetadze G. // J. Dynam. Control Systems. 1996. V. 2. № 4. P. 485–502.
3. Baladi V., Young L.-S. // Comm. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 355–385.
4. Чакветадзе Г. // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 223–224.
5. Rychlik M. // Studia Math. 1983. V. 76. P. 69–80.
6. Бланк М. Л. // Тр. семина. им. И. Г. Петровского. 1986. Т. 11. С. 166–189.
7. Hofbauer F., Keller G. // Math. Z. 1982. V. 180. P. 119–140.
8. Baladi V., Young L.-S. // Comm. Math. Phys. 1994. V. 166. P. 219–220.