Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, Л. Аккарди, Расширения пространств с цилиндрическими мерами и носители мер, порождаемых лапласианом Леви, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:45:40

УДК 517.518

РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ МЕРАМИ И НОСИТЕЛИ МЕР, ПОРОЖДАЕМЫХ ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ

Л. Аккарди, О.Г. Смолянов

Дается описание расширений несчетноаддитивных (цилиндрических) мер и приводятся примеры гильбертовых носителей меры Леви–Гаусса.

Библиография: 8 названий.

Возросшая в последнее время популярность так называемого *лапласиана Леви* объясняется открытием в [1], [2] эквивалентности уравнений Янга–Миллса и уравнения, содержащего этот лапласиан. В серии работ авторов [3]–[6] был описан новый подход к исследованию дифференциальных уравнений с лапласианом Леви, основанный на использовании введенной в этих работах *меры Леви–Гаусса*. Мера Леви–Гаусса определялась как несчетноаддитивная цилиндрическая гауссова мера на некотором несепарабельном гильбертовом пространстве, не допускающая – в силу несепарабельности пространства – счетноаддитивных гильбертовых расширений (определения всех понятий приводятся ниже). Вопрос о существовании гильбертова носителя для меры Леви–Гаусса оставался открытым.

В предлагаемой заметке дается систематическое описание расширений несчетноаддитивных (цилиндрических) мер и приводится серия примеров гильбертовых носителей меры Леви–Гаусса.

1. Определения и предварительные замечания. Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathfrak{A})$, где Ω – множество и $\mathfrak{A}$ – алгебра его подмножеств (это определение отличается от стандартного). Мера на $(\Omega, \mathfrak{A})$ (или, короче, на Ω или на $\mathfrak{A}$) – это конечноаддитивная комплекснозначная ограниченная функция на $\mathfrak{A}$.

Пусть $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ – измеримые пространства ($j = 1, 2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пространство $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ называется (*измеримым*) *расширением* пространства $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$, если

- а) $\Omega_1 \subset \Omega_2$;
- б) $\mathfrak{A}_1 = \{A \cap \Omega_1 : A \in \mathfrak{A}_2\}$;
- в) $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad [A \cap \Omega_1 = B \cap \Omega_1] \implies A = B$.

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00030.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ изоморфно измеримому пространству $(\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$, то всякое расширение пространства $(\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ называется расширением $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия b) и c) определяют изоморфизм между алгебрами $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, который мы называем каноническим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Измеримые пространства $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$, $j = 1, 2$, называются *версиями друг друга*, если существует измеримое пространство, являющееся расширением каждого из них.

Отметим, что в силу замечания 2 в этом случае алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ (канонически) изоморфны.

Всюду далее предполагается, что полем скаляров является поле вещественных чисел.

ПРИМЕР 1. Если E – векторное пространство и G – векторное пространство линейных функционалов на E , то для каждого подмножества G_0 пространства G символ $\mathfrak{A}(E, G_0)$ обозначает алгебру всех G_0 -цилиндрических подмножеств пространства E ; таким образом, $A \in \mathfrak{A}(E, G_0)$ в точности тогда, когда существуют натуральное n , элементы $g_1, \dots, g_n \in G_0$, борелевское подмножество B пространства $\mathbb{R}^n$ такие, что $A = \{x \in E : (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in B\}$. Для каждого подмножества E_0 пространства E символ $\mathfrak{A}(G, E_0)$ обозначает алгебру всех E_0 -цилиндрических подмножеств G , определяемую аналогично.

Пусть теперь E – векторное пространство и G_j , $j = 1, 2$, – некоторые векторные пространства, состоящие из линейных функционалов на E , находящиеся в естественной двойственности с E (это значит, что для любого $x \in E$, $x \neq 0$, найдутся $g_j \in G_j$ такие, что $g_j(x) = 0$, $j = 1, 2$). Пусть, кроме того, G – некоторое векторное пространство линейных функционалов на E , содержащее множество $G_1 \cup G_2$. Тогда измеримое пространство $(G, \mathfrak{A}(G, E))$ является расширением каждого из пространств $(G_j, \mathfrak{A}(G_j, E))$ и, следовательно, пространства $(G_j, \mathfrak{A}(G_j, E))$, $j = 1, 2$, являются версиями друг друга.

Пространством с мерой называется набор $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$, где $(\Omega, \mathfrak{A})$ – измеримое пространство и ν – мера на $\mathfrak{A}$ (это определение также отличается от стандартного).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \nu_j)$, $j = 1, 2$, – пространства с мерой, то $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ называется расширением пространства $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$, если $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ является расширением измеримого пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$, причем для каждого $A \in \mathfrak{A}_2$ $\nu_2 A = \nu_1(A \cap \Omega_1)$ (это равенство и оправдывает название *расширение пространства с мерой*). Если $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ – расширение $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$, то ν_2 называется расширением ν_1 .

Отметим, что в условиях предыдущего определения ν_2 является образом меры ν_1 относительно канонического вложения $F: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пространства с мерой $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \nu_j)$, $j = 1, 2$, называются версиями друг друга, если они обладают общим расширением; в этом случае меры ν_1 и ν_2 также называются версиями друг друга. Если к тому же ν_2 счетноаддитивна, то Ω_2 называется носителем меры ν_1 .

Отметим, что возможна ситуация, когда Ω_2 является носителем меры ν_1 и, тем не менее, $\Omega_2 \cap \Omega_1 = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$, $j = 1, 2$, – измеримые пространства, являющиеся версиями друг друга, то алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ канонически изоморфны и, следовательно, для каждой меры ν_1 на $\mathfrak{A}_1$ существует (единственная) мера ν_2 на $\mathfrak{A}_2$ – (канонический) образ ν_1 относительно этого изоморфизма, – для которой пространства $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ являются версиями друг друга. Таким образом, Ω_2 является носителем меры ν_1 , если ее канонический образ на $\mathfrak{A}_2$ представляет собой счетноаддитивную меру.

2. Счетноаддитивные расширения мер.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [7]). *Всякое измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$ обладает (измеримым) расширением $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$, являющимся носителем всякой меры на $(\Omega, \mathfrak{A})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех функций на множестве подмножеств множества Ω , принимающих значения в множестве $\{0, 1\}$, и пусть Ω_1 – множество всех функций на $\mathcal{F}$, принимающих значения в $\{0, 1\}$. Пусть, далее, $\mathcal{F}_0$ – множество индикаторов множеств из $\mathfrak{A}$ (так что $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$) и $\mathfrak{A}_1$ – алгебра подмножеств множества Ω_1 , порожденная множествами вида $\{\alpha \in \Omega_1 : \alpha(f) < 1\}$, $f \in \mathcal{F}_0$. Отображение $\Omega \ni x \mapsto [F \ni f \mapsto f(\{x\})] \in \Omega_1$ является вложением Ω в Ω_1 , и если $(\Omega', \mathfrak{A}')$ – образ $(\Omega, \mathfrak{A})$ относительно этого вложения, то $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ – расширение пространства $(\Omega', \mathfrak{A}')$, а следовательно, и пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$. Если теперь ν – мера на $\mathfrak{A}$, то ее образ в $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ счетноаддитивен по теореме Даниэля–Колмогорова.

Далее для каждого векторного пространства E символ E^* (символ E') обозначает его алгебраически (топологически) сопряженное пространство – пространство всех линейных (всех линейных непрерывных) функционалов на E . Если E – векторное пространство и G – векторное пространство некоторых линейных функционалов на E , причем $G_0 \subset G$, $E_0 \subset E$, то G_0 -цилиндрической мерой на E называется всякая мера на $\mathfrak{A}(E, G_0)$, сужение которой на всякую алгебру множеств $\mathfrak{A}(E, T)$ с конечным множеством $T \subset G_0$ счетноаддитивно; аналогичным образом, E_0 -цилиндрическая мера на G – это всякая мера на $\mathfrak{A}(G, E_0)$, сужение которой на всякую алгебру множеств $\mathfrak{A}(G, T)$ с конечным $T \subset E_0$ счетноаддитивно. Если E – векторное пространство, $E_0 \subset E$, $G_j \subset E^*$ ($j = 1, 2$), причем пространства G_j разделяют точки из E (т.е. связаны с E канонической двойственностью), и ν – E_0 -цилиндрическая мера на G_1 , то ее канонический образ на $\mathfrak{A}(G_2, E_0)$ – это E_0 -цилиндрическая мера на G_2 (являющаяся версией меры ν).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть E – векторное пространство, G – векторное пространство некоторых линейных функционалов на E , разделяющих точки из E . Пусть E_0 – линейно независимое подмножество E , обладающее следующим свойством: если $g_1, g_2 \in G$ и $g_1(x) = g_2(x)$ для всех $x \in E_0$, то $g_1 = g_2$. Пусть G_0 – векторное пространство всех числовых функций f на E_0 , для которых множества $\{x \in E_0 : f(x) \neq 0\}$ не более чем счетны. Тогда G_0 – это носитель всякой E_0 -цилиндрической меры на G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_1 – векторное пространство всех (числовых) функций на E_0 . Тогда E_0 можно рассматривать как подмножество каждого из пространств G_1^* и G_0^* , что позволяет определить алгебры множеств $\mathfrak{A}(G_1, E_0)$, $\mathfrak{A}(G_0, E_0)$. Так как $(G_1, \mathfrak{A}(G_1, E_0))$ является расширением каждого из измеримых пространств $(G_0, \mathfrak{A}(G_0, E_0))$ и $(G, \mathfrak{A}(G, E_0))$, два последних пространства являются версиями друг друга. Если ν_0 – канонический образ на $\mathfrak{A}(G_0, E_0)$ E_0 -цилиндрической меры ν на G , то ν_0 счетноаддитивна по теореме Даниэля–Колмогорова, что и завершает доказательство.

Отметим, что так как $G_1 \supset G_0$, то G_1 также является носителем всякой E_0 -цилиндрической меры на G .

Напомним, что если E, G – векторные пространства, $G \subset E^*$, $E_0 \subset E$ и ν – E_0 -цилиндрическая мера на G , то ее преобразование Фурье – это функция $F\nu$ на E_0 , определяемая следующим образом:

$$F\nu(x) = \int e^{ig(x)} \nu(dg).$$

Как известно [7], если E_0 – векторное подпространство пространства E , то функция $F\nu$ однозначно определяет меру ν .

Напомним также, что если E_0 – векторное подпространство пространства E , то E_0 -цилиндрическая мера ν называется *гауссовой* (с нулевым средним), если

$$F\nu(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}b(x)\right),$$

где b – квадратичная (неотрицательно определенная) форма на E_0 , называемая корреляционным функционалом меры ν (таким образом, $b(x) = (Bx)(x)$, где B – линейное отображение E_0 в G , называемое корреляционным оператором (или ковариацией) меры ν).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если G_j, E – векторные пространства, $G_j \subset E^*$, причем каждое из G_j разделяет точки E , и ν_j – E -цилиндрические меры на G_j ($j = 1, 2$), то эти меры являются версиями друг друга в точности тогда, когда $F\nu_1 = F\nu_2$.

Таким образом, преобразование Фурье E -цилиндрической меры ν однозначно определяет все E -цилиндрические меры, являющиеся версиями ν .

ТЕОРЕМА 3 (ср. [8]). Пусть H_j , $j = 1, 2$, – гильбертовы пространства, причем H_1 – плотное векторное подпространство пространства H_2 , и каноническое вложение $r: H_1 \rightarrow H_2$ – отображение Гильберта–Шмидта. Пусть ν_1 – H_1' -цилиндрическая мера на H_1 , обладающая непрерывным преобразованием Фурье. Тогда H_2 – носитель сужения ν_1 на алгебру r^*H_2' -цилиндрических подмножеств H_1 (являющуюся подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}(H_1, H_1')$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически требуется показать, что H_2' -цилиндрическая мера на H_2 , являющаяся образом ν_1 относительно отображения r , счетноаддитивна. Однако, $F(\nu r^{-1})(x) = F\nu(r^*x)$ и, следовательно, поскольку функция $F\nu$ непрерывна, функция $F(\nu r^{-1})$ непрерывна в топологии Сазонова.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если ν – гауссова мера, то теорема 3 может быть усилена. Именно, в этом случае H_2 является носителем самой меры ν , а не только ее сужения. Действительно, если мера ν гауссова, то всякий функционал $f \in H_1'$ допускает (единственное) продолжение до линейного измеримого функционала на (H_2, σ_ν) , где σ_ν обозначает σ -алгебру, на которой определено лебегово продолжение меры $\nu_2 = \nu r^{-1}$, причем каждый линейный измеримый функционал может быть получен таким образом. Пусть теперь H_2^m – это множество представителей всех классов эквивалентности измеримых линейных функционалов на (H_2, σ_ν) ; в силу сказанного можно считать, что $H_2^m = H_1'$. Это означает, что $(H_2, \mathfrak{A}(H_2, H_2^m))$ является расширением $(H_1, \mathfrak{A}(H_1, H_1'))$; при этом канонический образ на $\mathfrak{A}(H_2, H_2^m)$ меры ν_1 счетноаддитивен (он совпадает с сужением на $\mathfrak{A}(H_2, H_2^m)$ лебегова продолжения меры ν_2), откуда вытекает, что H_2 – это носитель меры ν_1 .

Следующий пример можно считать стандартным.

ПРИМЕР 2. Пусть H_1 – пространство всех обращающихся в 0 в нуле абсолютно непрерывных функций φ на $[0, 1]$ с квадратично интегрируемой производной с нормой, определяемой равенством

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 |\varphi'(t)|^2 dt$$

(т.е. $H_1 = W_2^1[0, 1]$), и пусть ν – каноническая гауссова мера на H_1 , т.е.

$$F\nu(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2\right).$$

Тогда стандартная мера Винера на $C[0, 1]$ – это (счетноаддитивное) расширение ν , что вытекает из замечания 5, поскольку пространства измеримых линейных функционалов на $C[0, 1]$ с мерой Винера и на $H_2 = \mathcal{L}_2(0, 1)$, наделенном расширением меры ν (полученным из того же замечания), изоморфны.

Согласно теореме 3 цилиндрическая мера может иметь “гильбертов носитель”. Сейчас мы сформулируем это понятие и приведем один относящийся к этому (отрицательный) результат.

Если E – нормированное пространство и ν – E -цилиндрическая мера на векторном пространстве $G \subset E^*$ (разделяющем точки из E), обладающая непрерывным преобразованием Фурье (определенным на E), то (E -) гильбертовой версией меры ν называется Q -цилиндрическая мера ν_Q на некотором гильбертовом пространстве Q (предполагаемом отождествленным со своим сильным сопряженным), имеющая непрерывное преобразование Фурье и обладающая, кроме того, следующим свойством: если ν_1 – версия ν , определенная на сильном сопряженном E'_β к пространству E , то существует непрерывное отображение $P: E'_\beta \rightarrow Q$ с плотным образом такое, что мера ν_Q совпадает с образом ν относительно P .

Если G – векторное пространство и ν – G -цилиндрическая гауссова мера с невырожденным корреляционным функционалом, то ее *гильбертовой версией* называется всякая $(G, \|\cdot\|_b)$ -гильбертова версия ν_Q , где $\|\cdot\|_b$ – норма в G , порожденная b ; если мера ν_Q счетноаддитивна, то Q называется *гильбертовым носителем* ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если G – векторное пространство и ν – G -цилиндрическая гауссова мера с (невырожденным) корреляционным функционалом b , причем предгильбертово пространство $(G, \|\cdot\|_b)$ несепабельно, то ν не обладает гильбертовым носителем.

Это вытекает из критерия счетной аддитивности гауссовых мер на гильбертовых пространствах.

3. Меры Леви–Гаусса. Пусть E – (сепарабельное) локально выпуклое пространство, $\|\cdot\|$ – непрерывная гильбертова норма на E , H – пополнение пространства $(E, \|\cdot\|)$; таким образом, $E \subset H = H' \subset E'$ – это оснащенное гильбертово пространство. Пусть, далее, $b = (e_n)$ – ортонормированный базис в H , состоящий из элементов пространства E , причем предполагается, что для всякой ограниченной последовательности (c_n) комплексных чисел ряд $\sum c_n e_n$ сходится в $\mathbb{C} \otimes E'_\beta$. Для каждого плотного подмножества Λ множества вещественных чисел через S_b^Λ обозначим линейную оболочку в $\mathbb{C} \otimes E'_\beta$

множества $\{\sum e^{i\lambda n} e_n\}_{\lambda \in \Lambda}$, наделенную скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\text{PL}}$, называемым далее скалярным произведением Леви и определяемым равенством

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n \right)_{\text{PL}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j \bar{d}_j.$$

Существование этого предела для $c_n = e^{i\lambda_1 n}$ и $d_n = e^{i\lambda_2 n}$ доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n c_j \bar{d}_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)j} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 - e^{in(\lambda_1 - \lambda_2)}) (1 - e^{i(\lambda_1 - \lambda_2)})^{-1} = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{aligned}$$

Обозначим через S_b^Λ векторное подпространство пространства $S_b^{c\Lambda}$, состоящее из всех элементов этого пространства вида $\sum \alpha_j e_j$, где $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$ (так что $S_b^{c\Lambda} = \mathbb{C} \otimes S_b^\Lambda$); при этом предполагается, что S_b^Λ наделено скалярным произведением, индуцированным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\text{PL}}$ (мы будем обозначать его тем же символом).

Пусть $S_b = \bigcup_\Lambda S_b^\Lambda$, где объединение берется по всем счетным плотным подмножествам $\mathbb{R}^1$. Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\text{PL}}$ определяет естественную двойственность между каждым из пространств S_b^Λ, S_b и им самим; кроме того, каждое из них двойственно пространству E , эта двойственность определяется (несвязанной с предыдущей) двойственностью между E и E' , поскольку $E' \supset S_b$; таким образом, можно считать, что $E \subset S_b^*, E \subset (S_b^\Lambda)^*, S_b \subset S_b^*, S_b^\Lambda \subset (S_b^\Lambda)^*$. Так как $E \cap S_b = \{0\} (\subset S_b^*)$, линейная оболочка в S_b^* пространств E и S_b^Λ является прямой суммой векторных пространств; обозначим ее через K_Λ . Аналогичные утверждения справедливы и для пространства S_b ; в этом случае полагаем $K = E \oplus S_b (\subset S_b^*)$.

Если $z = z_1 + z_2 \in K (\subset S_b^*)$, $z_1 \in K$, $z_2 \in S_b$, $a \in S_b$, то $\langle z, a \rangle = a(z_1) + z_2(a)$.

Только что рассмотренная ситуация может быть описана следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} E' \supset H \supset E, \quad E' \supset S_b, \\ E \oplus S_b = K \subset S_b^* \supset S_b' \supset S_b \end{aligned}$$

(аналогичные соотношения справедливы и для S_b^Λ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Мерой Леви–Гаусса*, соответствующей базису b и счетному плотному подмножеству $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$, называется гауссова S_b^Λ -цилиндрическая мера (определенная на любом пространстве двойственном S_b^Λ , например, на E , или на S_b^Λ , или на K), корреляционный функционал которой совпадает со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\text{PL}}$. Аналогично определяется и S_b -цилиндрическая мера Леви–Гаусса ν_{PL}^b (обе меры иногда будут обозначаться символом ν_{PL}).

Происхождение меры Леви–Гаусса описывается ниже.

ТЕОРЕМА 4. Пусть Λ – счетное плотное подмножество в $\mathbb{R}^1$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$

$$a_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda n \cdot e_n.$$

Тогда векторное пространство $\overline{S}_b^\Lambda$ всех последовательностей

$$\left(\alpha_j a_{\lambda_j} : j \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \Lambda, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j^2}{j^2} < \infty \right)$$

(в которое S_b^Λ вложено каноническим образом) представляет собой гильбертов носитель меры ν_{PL}^b ; при этом гильбертова норма на $\overline{S}_b^\Lambda$ определяется равенством

$$\|(\alpha_j a_{\lambda_j})\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j^2}{j^2}.$$

Теорема 4 является следствием теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для меры ν_{PL}^b аналог теоремы 4 несправедлив: в силу предложения 1 эта мера не имеет гильбертова носителя.

С другой стороны, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\overline{S}_b$ – векторное пространство всех последовательностей $(\alpha_j a_{\lambda_j} : j \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R}^1, \lambda_j \in \mathbb{R}^1)$, реализованное как векторное подпространство пространства S_b^* посредством соотношения

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j a_{\lambda_j} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j a_{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j d_j (a_{\lambda_j}, a_{\lambda_j})_{\text{PL}}.$$

Тогда $\overline{S}_b$ представляет собой носитель меры ν_{PL}^b .

Предложение 2 является следствием теоремы 2.

Если E реализовано как векторное пространство некоторых функций (на области евклидова пространства), то $\overline{S}_b$ и $\overline{S}_b^\Lambda$ могут быть реализованы как векторные пространства (некоторых) обобщенных функций (распределений).

ПРИМЕР 3. Пусть $E = W_2^1[0, \pi]$, $H = L_2(0, \pi)$ и для каждого $k \in \mathbb{N}$, $e_k \in E$, $e_k(t) = c_k \sin \pi k t$. Обозначим через E_1 векторное подпространство пространства H , определяемое следующим образом (мы используем обозначения и предположения теоремы 4): $E_1 = \{ \sum \beta_j a_{\lambda_j}, j \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \Lambda, \sum j^2 \beta_j^2 < \infty \}$.

Пусть, кроме того, $\|\cdot\|_1$ – гильбертова норма в E_1 , определяемая равенством $\|\cdot\|_1 = \|\sum_{j=1}^{\infty} j^2 \beta_j^2\|$. Неравенство $\sum j^2 \beta_j^2 < \infty$ влечет сходимость ряда $\sum |\beta_j|$ и, следовательно, включение $E_1 \subset E$; кроме того, E_1 содержится в пополнении S пространства $(S_b^\Lambda, \|\cdot\|_{\text{PL}})$, и каноническое вложение $E_1 \rightarrow S$ является отображением Гильберта–Шмидта, в силу чего S оказывается вложенным – с помощью отображения Гильберта–Шмидта – в гильбертово пространство E'_1 , это означает, в свою очередь, что E'_1 – носитель меры ν_{PL} (фактически, пространство E'_1 изоморфно пространству $\overline{S}_b^\Lambda$). Таким образом, носитель меры ν_{PL} реализуется как пространство, сопряженное подпространству E_1 пространства E' , состоящего из некоторых (обобщенных) функций на $[0, \pi]$, так что его элементы снова могут быть названы обобщенными функциями.

4. Лапласианы Леви, следы Леви и связанные с ними объекты. В этом пункте описывается происхождение меры Леви–Гаусса.

Пусть Φ – векторное пространство дважды дифференцируемых по Фреше функций на гильбертовом пространстве. Тогда дифференциальный оператор Δ^l второго порядка на Φ , задаваемый линейным (непрерывным) функционалом l на пространстве $L(H)$ линейных непрерывных операторов в H , определяется равенством $(\Delta^l f)(x) = l(f''(x))$. Если $l(A) = \text{tr}(BA)$, где B – ядерный оператор в H , то Δ^l называется *лапласианом Вольтерры–Гросса*; если сужение l на операторы вида $\alpha \cdot \text{Id} + D$ (Id – тождественное отображение, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, D – компактное отображение) определяется равенством $l(\alpha \cdot \text{Id} + D) = \alpha$, то Δ^l называется *лапласианом Леви*.

Аналогично можно задать дифференциальные операторы (второго порядка) на функциях, определенных на плотных подпространствах гильбертова пространства.

Пусть E, H, b – те же, что и в предыдущем пункте, и пусть Φ – векторное пространство функций на E , дважды дифференцируемых (по Гато) в каждой точке. Пусть, кроме того, l – линейный функционал, определенный на некотором подпространстве L_0 пространства всех линейных отображений E в E' равенством

$$l(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Ae_j, e_j),$$

при этом предполагается, что подпространство L_0 состоит из всех операторов, для которых предел справа существует. Так определенный функционал на L_0 называется *следом Леви* и обозначается через tr_{PL} (конечно, след Леви и его область определения зависят от выбора базиса b). Ниже лапласиан Леви обозначается через Δ_{PL} , так что $\Delta_{\text{PL}} f(x) = \text{tr}_{\text{PL}} f''(x)$, $f \in \Phi$. При применении метода преобразования Фурье к решению уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_{\text{PL}} f$$

относительно функции $f: [0, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}^1$ (впервые это было сделано в [3]) полезно использовать фундаментальное решение этой задачи, т.е. (некоторое) решение уравнения

$$\frac{\partial \nu(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_{\text{PL}} \nu(t) \quad (1)$$

относительно функции ν вещественного аргумента, принимающей значения в пространстве (некоторых) мер на E . При этом меры, о которых идет речь, оказываются G -цилиндрическими для подходящего пространства линейных функционалов на E , и оператор Δ_{PL} определяется как псевдодифференциальный оператор, построенный в соответствии со скалярным произведением Леви, взятым с обратным знаком.

Таким образом, преобразование Фурье переводит уравнение (1) в уравнение (ниже $\tilde{\nu} = F\nu$)

$$\frac{\partial \tilde{\nu}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} (x, x)_{\text{PL}} \tilde{\nu}(t),$$

рассматриваемое относительно функции, принимающей значения в пространстве функций на S_b^A . Решение задачи Коши для этого уравнения с начальными данными $(0, 1)$ – функция, определяемая равенством $\tilde{\nu}(t)(x) = e^{-\frac{t}{2}(x, x)_{\text{PL}}}$, но функция $\tilde{\nu}(t)(\cdot)$ и есть преобразование Фурье для меры Леви–Гаусса.

Сделаем несколько дополнительных замечаний о связи обычного лапласиана (Вольтерры–Гросса) с лапласианом Леви, а также о связи интегрирования по мере Леви–Гаусса, рассматриваемой как S_b^Λ -цилиндрическая мера на E , с интегрированием по ее счетноаддитивной версии, являющейся мерой на $\overline{S}_b^\Lambda$.

Пусть ψ – функция на S_b^Λ , являющаяся преобразованием Фурье некоторой S_b^Λ -цилиндрической меры ν на E (для нас важен случай, когда ν – мера Леви–Гаусса). Тогда, как отмечалось выше, на каждом пространстве двойственном S_b^Λ можно определить ровно одну S_b^Λ -цилиндрическую меру с тем же преобразованием Фурье; каждую из этих мер также естественно называть мерой Леви–Гаусса. С другой стороны, обозначим через σ_E σ -алгебру подмножеств S_b^Λ , порождаемую E -цилиндрическими множествами; непосредственно проверяется, что σ_E совпадает с σ -алгеброй, порождаемой $(S_b^\Lambda)'$ -цилиндрическими множествами. Таким образом, преобразование Фурье счетноаддитивной меры на σ_E можно определить или как функцию на E , или как функцию на $(S_b^\Lambda)'$; при этом, снова в силу единственности меры с заданным преобразованием Фурье, преобразование Фурье счетноаддитивной меры, определенной на алгебре E -цилиндрических подмножеств (являющееся функцией на E), позволяет однозначно восстановить функцию на $(S_b^\Lambda)'$, (обратное) преобразование Фурье которой совпадает с сужением на $\mathfrak{A}(S_b^\Lambda, (S_b^\Lambda)')$ продолжения на σ_E этой меры.

Если ν – счетноаддитивная мера на σ_E , $F_E\nu$ – преобразование Фурье ее сужения на $\mathfrak{A}(S_b^\Lambda, E)$ (т.е. функция на E) и $F_S\nu$ – преобразование Фурье ее сужения на $\mathfrak{A}(S_b^\Lambda, S_b^\Lambda)$ (т.е. функция на S_b^Λ), причем

$$\int \|x\|_{\text{PL}}^2 \nu(dx) < \infty,$$

а Δ – оператор Вольтерры–Гросса на пространстве функций на S_b^Λ , то функции $\Delta(F_S\nu)$ и $\Delta_{\text{PL}}(F_E\nu)$ всюду определены и соответствуют друг другу (т.е. лапласиан Леви и лапласиан Вольтерры–Гросса выражаются друг через друга).

Заметим теперь, что если f – функция на векторном пространстве G двойственном к (некоторому) векторному пространству Z , являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности Z -цилиндрических функций, то на любом другом двойственном к Z векторном пространстве G_1 существует функция, являющаяся равномерным пределом “той же” последовательности Z -цилиндрических функций. (Функция f на пространстве G двойственном к Z называется Z -цилиндрической, если существуют $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in Z$ и функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что $f(g) = \varphi(\langle g, z_1 \rangle, \dots, \langle g, z_n \rangle)$).

Таким образом, чтобы проинтегрировать определенную на E функцию, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности S_b^Λ -цилиндрических функций, по мере Леви–Гаусса, можно определить функцию на носителе меры Леви–Гаусса, являющуюся пределом “той же” последовательности S_b^Λ -цилиндрических функций, и объявить интеграл от этой функции по (счетноаддитивной) мере Леви–Гаусса интегралом от исходной функции по (несчетноаддитивной) мере Леви–Гаусса. Можно проверить, что это определение не зависит от выбора сходящейся последовательности цилиндрических функций. Конечно, вместо этого можно было бы проинтегрировать каждую из цилиндрических функций исходной последовательности по несчетноаддитивной мере Леви–Гаусса и, доказав, что последовательность полученных интегралов сходится, объявить ее предел, не зависящий от выбранной последовательности цилиндрических функций, интегралом от предельной функции по несчетноаддитивной мере. Тем не ме-

нее, включение меры Леви–Гаусса в стандартную теорию Лебега оказывается полезным.

Отметим, что интеграл по мере Леви–Гаусса от функции, являющейся преобразованием Фурье счетноаддитивной меры на (S_b^Λ, σ_E) , можно определить с помощью равенства Парсеваля; пользуясь понятием носителя меры Леви–Гаусса, можно это равенство доказать.

В заключение перечислим несколько формул, связанных с лапласианом Леви. Мы сохраняем определения и предложения п. 3.

1) Для линейного отображения $A: E \rightarrow E'$ определитель Леви–Фредгольма задается следующим образом: $\det_{\text{PL}} A = e^{\text{tr}_{\text{PL}} \ln A}$. Можно показать, что если он существует, то

$$\det_{\text{PL}} A = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det |Ae_j(e_k)|)^{1/n}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

2) Если A – ядерный оператор в S_b^Λ и A^* – отображение из E в $S_b^\Lambda \subset E'$, определяемое равенством $(Ax)(z) = (x, A^*z)_{\text{PL}}$, то $\text{tr}_{\text{PL}} A^* = \text{tr} A$ (неявно это равенство использовалось выше) и $\det_{\text{PL}} A^* = \det A$ (справа стоит обычный детерминант Фредгольма).

3) Аналогично можно определить и детерминант Леви–Фредгольма–Карлемана.

4) Если $a, b \in S_b^\Lambda \subset E'$, то

$$\int_E a(x)b(x) \nu_{\text{PL}}(dx) = (a, b)_{\text{PL}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арефьева И. Я., Волович И. В. Функциональные законы сохранения высших порядков в калибровочных теориях // Обобщенные функции и их приложения в математической физике. М.: МИАН, 1981. С. 43–50.
- [2] Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V. Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévi Laplacian // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 235–250.
- [3] Аккарди Л., Розелли П., Смолянов О. Г. Броуновское движение, порожаемое лапласианом Леви // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 144–149.
- [4] Аккарди Л., Смолянов О. Г. Гауссовский процесс, порожденный лапласианом Леви и соответствующая ему формула Фейнмана–Каца // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 442–446.
- [5] Аккарди Л., Смолянов О. Г. Преобразования гауссовских мер, порожденных лапласианом Леви, и обобщенные следы // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 234–237.
- [6] Accardi L., Smolyanov O. G. On Laplacians and traces // Confer. Sem. Mat. Univ. Bari. 1993. V. 250. P. 1–25.
- [7] Смолянов О. Г., Фомин С. В. Меры на топологических линейных пространствах // УМН. 1976. Т. 31. № 4. С. 1–76.
- [8] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения на бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.