Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Бедулев, О линейной независимости чисел над числовыми полями, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 506–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:15:32

УДК 511.364

О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЧИСЕЛ НАД ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

Е. В. Бедулев

В данной работе рассматривается задача об оценке снизу меры линейной независимости чисел $\theta_1, \dots, \theta_n$ при условии, что для последовательности полиномов с целыми алгебраическими коэффициентами известны оценки снизу и сверху в точке $(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Используемый метод является обобщением метода Нестеренко на случай произвольного поля алгебраических чисел.

Библиография: 9 названий.

В теории трансцендентных чисел известно несколько попыток многомерного обобщения леммы “о плотной последовательности” Гельфонда. Эти обобщения выглядят следующим образом. Пусть $\mathbb{K}$ – числовое поле, $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ – некоторый набор чисел, и задано семейство многочленов от n переменных с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ целых поля $\mathbb{K}$ с контролируемыми степенями и высотами, для значений которых в точке $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ имеются оценки сверху и снизу. Тогда можно оценить снизу степень трансцендентности поля $\mathbb{K}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ над $\mathbb{K}$. Впервые оценку подобного вида получил Г. В. Чудновский в работе [1] с помощью последовательного исключения переменных и сведения к одномерному случаю (его доказательство было неполным; впоследствии полные доказательства были опубликованы в [2] и [3]). В 1983 году Ю. В. Нестеренко [4] предложил другой подход, развивая который П. Филлипон [5] получил наилучшую оценку в данной задаче. Тогда же Нестеренко предложил вариант своего метода для случая проблемы линейной независимости чисел над $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ (см. [6]). Настоящая работа посвящена оценкам этого типа в случае произвольного $\mathbb{K}$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ – числовое поле и $\mathcal{K}$ – его пополнение, соответствующее этому вложению, т.е. $\mathcal{K}$ есть $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Положим $\delta = [\mathcal{K} : \mathbb{R}]$, $d = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$, где r_1 – число вещественных, r_2 – число комплексных вложений поля $\mathbb{K}$.

Для линейной формы $L(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, положим $H(L) = \max_i H(a_i)$, где $H(a_i)$ – обычная высота Вейля алгебраического числа a_i (подробнее см. п. 2).

Зафиксируем векторное пространство E над $\mathbb{Q}$ размерности n с выделенным базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Формулировка (и доказательство) нашей основной теоремы опирается на понятие высоты $H_c(N)$ $\mathbb{K}$ -рационального подпространства N в $E \otimes \mathcal{K}$. В полной общности оно вводится в п. 2, причем для $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ совпадает с определением, данным Нестеренко: если N – некоторое $\mathbb{Q}$ -рациональное подпространство в $E \otimes \mathbb{R}$, то $N \cap$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (фонда Сороса), грант № 507.с.

$\{\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_n\}$ – полная решетка в нем. В качестве $H_c(N)$ можно взять объем фундаментального параллелепипеда этой решетки (предполагается, что в $E \otimes \mathbb{R}$ введено скалярное произведение, относительно которого $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ортонормированный базис).

Сформулируем основную теорему.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть вектор $\theta \in E \otimes \mathcal{K}$ фиксирован, $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция, удовлетворяющая условиям

$$\sigma(t+1) \geq \sigma(t) \quad \text{при } t \geq t_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)} = 1,$$

и имеется набор линейных форм $L_\nu(x) = \sum_{i=1} a_i^{(\nu)} x_i$, $a_i^{(\nu)} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, такой, что

$$H(L_\nu) \leq e^{\sigma(\nu)}, \quad e^{-\sigma_1(\nu)} \leq |L_\nu(\theta)| \leq e^{-\sigma_2(\nu)}, \quad (1)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)} = \tau_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)} = \tau_2, \quad \tau_1 \geq \tau_2.$$

Для произвольного ε , $0 < \varepsilon < (\tau_1 + \delta^{-1} + 1)/6$, построим последовательность $\{\alpha_j\}$ из соотношений

$$\alpha_0 = 1, \quad \frac{\delta^{-1} + \tau_2}{\alpha_{j-1}} - \frac{\delta^{-1} + \tau_1}{\alpha_j} = r_1 + r_2 + \varepsilon, \quad j \geq 1. \quad (2)$$

Пусть целое $s \geq 0$ таково, что все α_j , $j = 0, \dots, s$, определены и $\alpha_j \geq 1$ для $j = 0, \dots, s$. Тогда существует $H_0 = H_0(\theta, \varepsilon, s, \dots)$ такое, что для любого $H \geq H_0$ и любого $\mathbb{K}$ -рационального подпространства $N \subset E \otimes \mathcal{K}$ размерности s над $\mathcal{K}$ неравенства

$$\rho(\theta, N) < H^{-\alpha_s}, \quad H_c(N) \leq H \quad (3)$$

несовместны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательность $\{\alpha_j\}$ и условие на s в формулировке основной теоремы можно описать явно. А именно,

1) если $\tau_1 = \tau_2$, то

$$\alpha_j = \left(1 - j \frac{r_1 + r_2 + \varepsilon}{\tau_1 + \delta^{-1}}\right)^{-1}, \quad j \geq 1, \quad s < \frac{\tau_1 + \delta^{-1}}{r_1 + r_2 + \varepsilon};$$

2) если $\tau_1 > \tau_2$, то, полагая $l = (r_1 + r_2 + \varepsilon)/(\tau_1 - \tau_2)$, имеем

$$\alpha_j = \left((1+l) \left(\frac{\delta\tau_2+1}{\delta\tau_1+1}\right)^j - l\right)^{-1}, \quad j \geq 1, \quad s \ln \frac{\delta\tau_1+1}{\delta\tau_2+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{l}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия теоремы, то среди чисел $\theta_1, \dots, \theta_n$ имеется по крайней мере $(\tau_1 + \delta^{-1})/(r_1 + r_2)$ линейно независимых над $\mathbb{K}$ в случае $\tau_1 = \tau_2$ и не менее

$$\ln \left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{r_1 + r_2} \right) / \ln \frac{\tau_1 + \delta^{-1}}{\tau_2 + \delta^{-1}}$$

в случае $\tau_1 > \tau_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\tau_1 = \tau_2$ (случай $\tau_1 > \tau_2$ доказывается аналогично). Если утверждение следствия неверно, то существует $\mathbb{K}$ -рациональное подпространство $N \subset E \otimes \mathcal{X}$ размерности s такое, что $\theta \in N$ и $s < (\tau_1 + \delta^{-1})/(r_1 + r_2)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $s < (\tau_1 + \delta^{-1})/(r_1 + r_2 + \varepsilon)$. Применяя к данной ситуации основную теорему, находим, что для любого $H \geq H_0$ неравенства (3) несовместны. Но $\rho(\theta, N) = 0$, что при достаточно больших H противоречиво.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравним в случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ нашу теорему с аналогичной теоремой Нестеренко из [6]. Легко видеть, что при $\tau_1 = \tau_2$ наша оценка совпадает с оценкой Нестеренко, а при $\tau_1 > \tau_2$ – сильнее последней.

Доказательство основной теоремы содержится в п. 3, п. 1 и п. 2 посвящены доказательству необходимых вспомогательных фактов.

На протяжении всей работы мы пользуемся следующими обозначениями и соглашениями: основное поле $\mathcal{X}$ есть $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$; если не оговорено обратное, все пространства и подпространства, используемые в работе, рассматриваются над $\mathcal{X}$; $\delta = [\mathcal{X} : \mathbb{R}]$ (т.е. $\delta = 1$ или $\delta = 2$); $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ – подпространство, натянутое на векторы $a_1, \dots, a_k$. Под скалярным произведением в некотором $\mathcal{X}$ -векторном пространстве мы подразумеваем евклидово скалярное произведение в случае $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ и эрмитово скалярное произведение в случае $\mathcal{X} = \mathbb{C}$. Предполагая, что $\mathcal{X}$ -векторное пространство V снабжено таким скалярным произведением, обозначим через $M^\perp$ ортогональное дополнение к подпространству $M \subset V$, через $\text{pr}_M \theta$ ортогональную проекцию $\theta \in V$ на подпространство M ; кроме того, $\|\theta\| = (\theta, \theta)^{1/2}$ – норма элемента $\theta \in V$; $\rho(\theta, M) = \|\text{pr}_{M^\perp} \theta\|$ – расстояние от точки $\theta \in V$ до подпространства M . В случае $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ обозначим через $\varphi(a, b)$ угол между векторами $a, b \in V$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, а через $\varphi(l, m)$ угол между прямыми $l, m \subset V$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Более общо, $\varphi(l, M) = \varphi(l, \text{pr}_M l)$ – угол между прямой $l \subset V$ и подпространством $M \subset V$.

1. Линейная алгебра. Пусть V – векторное пространство над полем $\mathcal{X}$ размерности n , снабженное скалярным произведением. Для нас существенно то, что это скалярное произведение на E индуцирует скалярные произведения на внешних степенях $\bigwedge^k V$, $1 \leq k \leq n$. А именно, скалярное произведение на V определяет отождествление $V \cong \overline{V^*}$ с пространством антилинейных функционалов на V (черта сверху означает комплексное сопряжение и существенна только в случае $\mathcal{X} = \mathbb{C}$), а значит, и отождествление $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^k \overline{V^*} \cong \bigwedge^k V^*$, т.е. некоторую билинейную (полуторалинейную в случае $\mathcal{X} = \mathbb{C}$) невырожденную форму на $\bigwedge^k V$. Отсюда следует координатное описание соответствующего скалярного произведения. Пусть $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_k\}$ – два набора векторов из V ,

$$(a_1, \dots, a_k) = A^t(e_1, \dots, e_n), \quad (b_1, \dots, b_k) = B^t(e_1, \dots, e_n)$$

– их разложения по ортонормированному базису $\{e_1, \dots, e_k\}$, A, B – $(n \times k)$ -матрицы с коэффициентами из $\mathcal{K}$. Тогда

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_k, b_1 \wedge \dots \wedge b_k) = \sum_I A_I \overline{B_I},$$

где I пробегает все наборы из k столбцов в $(n \times k)$ -матрице, A_I, B_I – соответствующие миноры. Заметим, что отсюда следует положительная определенность нашей билинейной формы, т.е. она является скалярным произведением на $\bigwedge^k V$.

Заметим, что если обозначить через $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k)$ объем параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1, \dots, a_k \in V$, то

$$\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) = \|a_1 \wedge \dots \wedge a_k\|_{\bigwedge^k V} = (a_1 \wedge \dots \wedge a_k, a_1 \wedge \dots \wedge a_k)^{1/2}$$

(можно считать это определением объема).

Отметим несколько хорошо известных свойств объема $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k)$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) = (\det |(a_i, a_j)|_{i,j=1,\dots,k})^{1/2}$;
- 2) $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно зависимы;
- 3) $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) = \rho(a_k, M) \text{Vol}(a_1, \dots, a_{k-1})$, где $M = \langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$;
- 4) $\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) \leq \text{Vol}(a_1, \dots, a_r) \text{Vol}(b_1, \dots, b_s)$, при этом если наборы $\{a_1, \dots, a_r\}$ и $\{b_1, \dots, b_s\}$ состоят из линейно независимых векторов, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда подпространства $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_s \rangle$ ортогональны;
- 5) $\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) \leq \|a_1\| \cdots \|a_k\|$.

Доказательство можно найти, например, в [7]. Утверждение 5) следует из утверждения 4).

Пусть M, N – два подпространства в V . Мы хотим определить величину $\eta(M, N)$, $0 \leq \eta(M, N) \leq 1$, измеряющую “угол” между подпространствами M и N . Рассмотрим сначала случай $M \cap N = 0$. Пусть $\{a_1, \dots, a_r\}$, $\{b_1, \dots, b_s\}$ – произвольные базисы в M, N соответственно. Положим

$$\eta(M, N) = \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)}{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r) \text{Vol}(b_1, \dots, b_s)}.$$

Из предложения 1 следует, что $0 \leq \eta(M, N) \leq 1$, причем $\eta(M, N) \neq 0$ в предположении $M \cap N = 0$ и $\eta(M, N) = 1$, если и только если M ортогонально N . Остается проверить, что величина $\eta(M, N)$ не зависит от выбора базисов в M и N . Проще всего убедиться в этом следующим образом: согласно определению

$$\eta(M, N) = \frac{\|a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s\|}{\|a_1 \wedge \dots \wedge a_r\| \cdot \|b_1 \wedge \dots \wedge b_s\|}$$

и, как хорошо известно, элементы $a_1 \wedge \dots \wedge a_r \in \bigwedge^r V$ и $b_1 \wedge \dots \wedge b_s \in \bigwedge^s V$ восстанавливаются по подпространствам M и N однозначно с точностью до пропорциональности.

Пусть теперь $M \cap N = T$ – необязательно нулевое подпространство, но $M \not\subset N$ и $N \not\subset M$. Тогда подпространства $M_1 = M \cap T^\perp$ и $N_1 = N \cap T^\perp$ имеют нулевое пересечение, и можно рассматривать величину

$$\eta(M, N) = \eta(M_1, N_1)$$

в смысле предыдущего определения или, что то же самое,

$$\eta(M, N) = \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t) \text{Vol}(c_1, \dots, c_t)}{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t) \text{Vol}(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)},$$

где $\{c_1, \dots, c_t\}$, $\{a_1, \dots, a_r\}$, $\{b_1, \dots, b_s\}$ – произвольные базисы в T , M_1 и N_1 соответственно.

Рассмотрим теперь примеры, поясняющие определение величины $\eta(M, N)$. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ и l, m – две прямые в V . Тогда, очевидно, $\eta(l, m) = \sin \varphi(l, m)$ в силу хорошо известной формулы $\text{Vol}(a, b) = \pm \|a\| \cdot \|b\| \sin \varphi(a, b)$ для произвольных векторов $a, b \in V$.

Более общо, пусть M – подпространство с базисом $a_1, \dots, a_r$, l – прямая с образующим вектором θ . Тогда

$$\eta(l, M) = \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, \theta)}{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r) \|\theta\|} = \frac{\rho(\theta, M)}{\|\theta\|} = \sin \varphi(l, M) \quad (4)$$

в силу предложения 1. Таким образом, величина $\eta(M, N)$ действительно измеряет угол между M и N .

Случай $M \cap N \neq 0$ иллюстрируется следующим примером. Пусть M и N – две плоскости в трехмерном пространстве. Тогда определение величины $\eta(M, N)$, очевидно, согласовано с обычным понятием двугранного угла между ними.

В случае $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ наряду с комплексным пространством V размерности n , снабженным эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, можно рассматривать его овеществление $V_{\mathbb{R}}$ размерности $2n$, снабженное евклидовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}} = \text{Re}(\cdot, \cdot)$. В частности, если M, N – комплексные подпространства, то определены “углы” $\eta(M, N)$ (в эрмитовом пространстве E) и $\eta_{\mathbb{R}}(M, N)$ (в евклидовом пространстве $V_{\mathbb{R}}$). Связь между этими величинами выражается формулой $\eta_{\mathbb{R}}(M, N) = \eta(M, N)^2$, которая вытекает из следующей известной леммы.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\text{Vol}(a_1, \dots, a_k)^2 = \text{Vol}_{\mathbb{R}}(a_1, \dots, a_k, ia_1, \dots, ia_k).$$

Здесь в левой части стоит объем в эрмитовом пространстве V , а в правой – объем в евклидовом пространстве $V_{\mathbb{R}}$, i – мнимая единица.

Докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть M_1, M, N_1, N – подпространства в V , $M \cap N = 0$, причем $M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$. Тогда $\eta(M_1, N_1) \geq \eta(M, N)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в M и N ортонормированные базисы $\{a_1, \dots, a_r\}$ и $\{b_1, \dots, b_s\}$ так, что $\{a_1, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, \dots, b_l\}$ – базисы в M_1, N_1 соответственно, $k \leq r$, $l \leq s$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta(M, N) &= \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)}{\text{Vol}(a_1, \dots, a_r) \text{Vol}(b_1, \dots, b_s)} \\ &\leq \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) \cdot \prod_{i=k+1}^r \|a_i\| \cdot \prod_{j=l+1}^s \|b_j\|}{1 \cdot 1} \\ &= \frac{\text{Vol}(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)}{\text{Vol}(a_1, \dots, a_k) \text{Vol}(b_1, \dots, b_l)} = \eta(M_1, N_1), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ и l_1, l_2, l_3 – три прямые в V . Тогда

$$\sin \varphi(l_1, l_3) \leq \sin \varphi(l_1, l_2) + \sin \varphi(l_2, l_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если l_1, l_2, l_3 лежат в одной плоскости, то

$$\varphi(l_1, l_3) = \pm \varphi(l_1, l_2) \pm \varphi(l_2, l_3)$$

при некотором выборе знаков “ $\pm$ ”, и требуемое неравенство следует из формулы синуса суммы. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $M = l_1 + l_2$ и $l'_3 = \text{pr}_M l_3$. Если мы проверим, что для любой прямой $l \subset M$

$$\varphi(l, l'_3) \leq \varphi(l, l_3), \quad (5)$$

то по уже доказанному

$$\sin \varphi(l_1, l_2) \leq \sin \varphi(l_1, l'_3) + \sin \varphi(l'_3, l_2) \leq \sin \varphi(l_1, l_3) + \sin \varphi(l_3, l_2),$$

следовательно, получим требуемое.

Итак, осталось проверить неравенство (5). Пусть e_3, e – орты прямых l_3 и l соответственно такие, что $(e_3, e) \geq 0$. Пусть $e'_3 = \text{pr}_M e_3$. Тогда $l'_3 = \mathbb{R}e'_3$ и

$$\cos \varphi(e_3, e) = (e_3, e) = (e'_3, e) = \cos \varphi(e'_3, e) \cdot \|e'_3\| \leq \cos \varphi(e'_3, e),$$

так как $\|e'_3\| \leq \|e_3\| = 1$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M, N – подпространства в V , $\theta \in V$. Тогда

$$\eta(M, N)^\delta \rho(\theta, M \cap N) \leq \rho(\theta, M) + \rho(\theta, N),$$

где $\delta = [\mathcal{K} : \mathbb{R}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\rho(\theta, M) = \rho_{\mathbb{R}}(\theta, M_{\mathbb{R}})$ и $\eta(M, N)^2 = \eta_{\mathbb{R}}(M, N)$ в случае $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, достаточно рассмотреть случай $\mathcal{K} = \mathbb{R}$. Пусть $T = M \cap N \neq 0$ и $\theta_1 = \text{pr}_{T^\perp} \theta$. Тогда $\theta - \theta_1 \in T = M \cap N$, откуда $\text{pr}_{M^\perp} \theta = \text{pr}_{M^\perp} \theta_1$ и $\text{pr}_{N^\perp} \theta = \text{pr}_{N^\perp} \theta_1$. Теперь искомое неравенство преобразуется к виду

$$\eta(M_1, N_1) \|\theta_1\| \leq \rho(\theta_1, M_1) + \rho(\theta_1, N_1),$$

где $M_1 = M \cap T^\perp$, $N_1 = N \cap T^\perp$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $M \cap N = 0$. Согласно (4) наше неравенство эквивалентно неравенству $\eta(M, N) \leq \eta(l, M) + \eta(l, N)$, где $l = \mathbb{R}\theta$. Если обозначить $l_M = \text{pr}_M l$, $l_N = \text{pr}_N l$, то в силу лемм 2 и 3 имеем

$$\eta(M, N) \leq \eta(l_M, l_N) \leq \eta(l_M, l) + \eta(l_N, l) = \eta(l, M) + \eta(l, N),$$

что и требовалось доказать.

2. Высоты. В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений.

Пусть $\mathbb{K}$ – фиксированное числовое поле абсолютной степени $d = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$. Будем рассматривать различные вложения $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Зафиксируем в каждой паре комплексно-сопряженных вложений какое-нибудь одно. Обозначим элементы получившейся системы вложений через v и назовем их *архимедовыми нормированиями поля* $\mathbb{K}$. Пусть x^v – образ элемента $x \in \mathbb{K}$ при вложении v , $|x|_v = |x^v|$ (обычный комплексный модуль). Пусть, как обычно, r_1 – число вещественных вложений v и r_2 – число комплексных, $d = r_1 + 2r_2$.

Пусть $\mathbb{K}_v$ – пополнение $\mathbb{K}$ по нормированию v , $\delta_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{R}]$.

Выделим некоторое вложение $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, соответствующее архимедово значение обозначим через w и отождествим поле $\mathcal{K}$ (см. п. 1) с $\mathbb{K}_w$. Таким образом, $\delta = \delta_w$.

Пусть теперь E – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с выделенным базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbb{P}E$ – соответствующее проективное пространство, $\alpha = (\alpha_1 : \dots : \alpha_n) \in \mathbb{P}E(\mathbb{K})$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Напомним (см. [8, гл. 3]), что *высота Вейля* определяется соотношением

$$H(\alpha) = \frac{1}{\text{Norm}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \prod_v \max_i |\alpha_i|^{\delta_v}.$$

Здесь $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ – дробный идеал в $\mathbb{K}$, порожденный $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, а Norm – обычная абсолютная норма дробного идеала.

Однако, нам понадобится другая высота, а именно:

$$H_c(\alpha) = \frac{1}{\text{Norm}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \prod_v (|\alpha_0|_v^2 + \dots + |\alpha_n|_v^2)^{\delta_v/2}.$$

Очевидно, что это определение не зависит от выбора однородных координат $\alpha \in \mathbb{P}E(\mathbb{K})$. Заметим также, что $H_c(\alpha) \geq H(\alpha) \geq 1$ (см. [8, гл. 3]).

Будем говорить, что $\mathcal{K}$ -векторное подпространство $M \subset E \otimes \mathcal{K}$ *определено над $\mathbb{K}$* (или *$\mathbb{K}$ -рационально*), если его можно задать набором линейных форм с коэффициентами из $\mathbb{K}$ или, что то же самое, если существует базис $\{a_1, \dots, a_k\}$ в M такой, что для разложения

$$(a_1, \dots, a_k) = A^t(e_1, \dots, e_n) \quad (6)$$

по базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ выполнено $A \in \text{Mat}(n \times k, \mathbb{K})$.

Заметим, что $\mathbb{K}$ -рациональное подпространство M определяет подпространства M_v во всех $E \otimes \mathbb{K}_v$ (для этого вложения $v: \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ применяются к матрице A).

Введем в $E \otimes \mathcal{X}$ скалярное произведение так, чтобы базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ был ортонормированным. Тогда скалярные произведения с тем же свойством будут определены во всех $E \otimes \mathbb{K}_v$, т.е. будут определены объемы и углы (см. п. 1). Если $\{a_1, \dots, a_k\}$ – базис в M , удовлетворяющий условию (6), то будем писать $\text{Vol}_v(a_1, \dots, a_k)$ вместо $\text{Vol}(a_1^v, \dots, a_k^v)$ и $\eta_v(M, N)$ вместо $\eta(M_v, N_v)$, где M, N – $\mathbb{K}$ -рациональные подпространства в $E \otimes \mathcal{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что если $M \perp N$, то $M^v \perp N^v$ для всех v .

Пусть M – векторное подпространство размерности k в $E \otimes \mathcal{X}$, определенное над $\mathbb{K}$. Ему соответствует точка в $\mathbb{P} \wedge^k (E \otimes \mathcal{X})(\mathbb{K})$. Под H_c -высотой подпространства M мы понимаем H_c -высоту соответствующей точки (при этом предполагается, что в k -й внешней степени пространства $E \otimes \mathcal{X}$ выбран базис $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$). Координатное описание соответствующей высоты таково: если $\{a_1, \dots, a_k\}$ – базис M , удовлетворяющий условию (6), то

$$H_c(M) = \frac{1}{\text{Norm}(\mathcal{M}(a_1, \dots, a_k))} \prod_v \text{Vol}_v(a_1, \dots, a_k)^{\delta_v}.$$

Здесь $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_k)$ – дробный идеал в $\mathbb{K}$, порожденный $(k \times k)$ -минорами матрицы A из (6).

В дальнейшем нам понадобится элементарная лемма, являющаяся своеобразным обобщением разложения Лапласа для определителей.

Пусть A – квадратная $(n \times n)$ -матрица; $I \cup I' \cup I''$ – некоторое разбиение множества столбцов матрицы A на наборы I, I', I'' и $J \cup J' \cup J''$ – некоторое разбиение множества строк матрицы A на наборы J, J', J'' . О столбцах, лежащих в наборе I , будем говорить как о I -столбцах, аналогично определяются J -строки; A_J^I – подматрицы матрицы A , образованные I -столбцами и J -строками в естественном порядке следования. Обозначим через $\deg I$ число элементов в наборе I , через $|I'|$ и $|J'|$ сумму всех номеров столбцов (строк) в соответствующем наборе в матрице $A_{J' \cup J''}^{I' \cup I''}$.

ЛЕММА 4. Пусть наборы I, J, J' и J'' фиксированы, $\deg I = \deg J$. Тогда справедливо тождество

$$\det A_J^I \cdot \det A = \sum_{I', I''} (-1)^{|I'| + |J'|} \det A_{J \cup J'}^{I \cup I'} \cdot \det A_{J \cup J''}^{I' \cup I''}, \quad (7)$$

где суммирование ведется по наборам столбцов I' и I'' матрицы A таким, что $I \cup I' \cup I''$ – разбиение множества всех столбцов и $\deg I' = \deg J'$, $\deg I'' = \deg J''$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что искомая формула остается инвариантной при следующих преобразованиях:

- а) вычитание из I -столбца кратного другому I -столбцу;
- а') вычитание из J -строки кратной другой J -строке;
- б) перестановка двух I -столбцов;

- b') перестановка двух J -строк;
- с) вычитание из J' -строки (J'' -строки) кратной J -строке;
- d) вычитание из J' -строки (J'' -строки) кратной другой J' -строке (J'' -строке);
- e) перестановка двух J' -строк (J'' -строк).

Прежде всего, применяя операции а), а'), b), b'), мы можем привести матрицу A_J^I к виду $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Обозначим набор тех столбцов матрицы A_J^I , в которых стоят единицы, через I_0 . Рассмотрим два случая.

1) Пусть $I_0 \neq \emptyset$. Тогда, применяя операцию с), мы можем сделать нулевыми столбцы I_0 в матрице $A_{J' \cup J''}^I$. Благодаря этому все определители в формуле (7) можно разложить по I_0 -столбцам. Если $I_0 = I$, то полученная формула будет в точности совпадать с разложением Лапласа, что и доказывает ее в этом случае. Если же $I_0 \neq I$, то мы получаем ту же задачу, но с $I_0 = \emptyset$.

2) Пусть $I_0 = \emptyset$. Тогда $A_J^I = 0$, и надо доказать, что правая часть (7) обращается в 0. Применяя операции d) и e), все строки в матрицах $A_{J'}^I$ и $A_{J''}^I$ можем привести к виду $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (с единицей на некотором месте). Если теперь в матрицах $A_{J'}^I$ и $A_{J''}^I$ имеются нулевые столбцы, то формула (7) тавтологична (все слагаемые обращаются в 0). Поэтому единственным нетривиальным случаем является случай $\deg J' = \deg J'' = \deg J$, $A_{J'}^I = A_{J''}^I = E$. Разложив все определители в правой части (7) по I -столбцам, получим хорошо известную формулу (см., например, [9])

$$\sum (-1)^{|I'|} \det A_{J'}^{I'} \cdot \det A_{J''}^{I''} = 0,$$

где суммирование ведется так же, как и в (7), $\deg I' = \deg I'' = \deg J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть M, N – два подпространства в $E \otimes \mathcal{K}$, определенные над $\mathbb{K}$, такие, что $M \not\subset N$ и $N \not\subset M$. Пусть $M + N = E \otimes \mathcal{K}$. Тогда

$$\eta(M, N)^\delta = \eta_w(M, N)^{\delta_w} \geq \frac{H_c(M \cap N)}{H_c(M)H_c(N)}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T = M \cap N$, $M_1 = M \cap T^\perp$, $N_1 = N \cap T^\perp$.

Выберем базисы $\{c_1, \dots, c_t\}$ в T , $\{a_1, \dots, a_r\}$ в M_1 , $\{b_1, \dots, b_s\}$ в N_1 , определенные над $\mathbb{K}$. По определению имеем

$$\begin{aligned} & \eta_w(M, N)^{\delta_w} \\ & \geq \prod_v \eta_v(M, N)^{\delta_v} = \prod_v \left(\frac{\text{Vol}_v(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t) \text{Vol}_v(c_1, \dots, c_t)}{\text{Vol}_v(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t) \text{Vol}_v(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)} \right)^{\delta_v} \\ & = \frac{H_c(M + N)H_c(M \cap N)}{H_c(M)H_c(N)} \text{Norm} \frac{\mathcal{M}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t) \mathcal{M}(c_1, \dots, c_t)}{\mathcal{M}(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t) \mathcal{M}(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)} \\ & \geq \frac{H_c(M \cap N)}{H_c(M)H_c(N)}, \end{aligned}$$

так как под нормой стоит дробный идеал в $\mathbb{K}$, являющийся, очевидно, целым. В самом деле, поскольку $M + N = E \otimes \mathcal{K}$, включение

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t) \mathcal{M}(c_1, \dots, c_t) \\ & \subset \mathcal{M}(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t) \mathcal{M}(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t) \end{aligned}$$

следует из леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (8) также имеет место в случае $M + N \neq E \otimes \mathcal{K}$. Для этого необходимо лишь соответствующее обобщение леммы 4.

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливы неравенства*

$$H_c(M \cap N) \leq H_c(M)H_c(N), \quad (9)$$

$$H_c(M \cap N)\rho(\theta, M \cap N) \leq H_c(M)H_c(N)(\rho(\theta, M) + \rho(\theta, N)), \quad \theta \in E \otimes \mathcal{K}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (9) очевидно, неравенство (10) следует из предложений 2 и 3.

3. Приложения к диофантовым приближениям. Этот пункт посвящен доказательству основной теоремы. Мы придерживаемся обозначений, введенных в п. 2. В частности, E – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ размерности n с выделенным базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$.

ЛЕММА 5. Пусть $L(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ – линейная форма с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, M – определяемая ею гиперплоскость, $\theta \in E \otimes \mathcal{K}$. Тогда

$$H_c(M)^{\delta^{-1}} \rho(\theta, M) \leq n^{d/2} |L(\theta)| H(L)^{\delta^{-1}(r_1+r_2-1)}, \quad (11)$$

$$H_c(M) \leq n^{d/2} H(L)^{r_1+r_2}, \quad (12)$$

$$|L(\theta)| \leq n^{1/2} H(L)^{\delta^{-1}} \rho(\theta, M). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [8, гл. 3]

$$|a_i|_v \leq H(a_i)^{\delta_v^{-1}} \leq H(L)^{\delta_v^{-1}} \quad (14)$$

для любых k, v . Далее,

$$H_c(M) \leq \prod_v (|a_1|_v^2 + \dots + |a_n|_v^2)^{\delta_v/2}, \quad (15)$$

$$\rho(\theta, M) = \frac{|L(\theta)|}{(|a_1|_w^2 + \dots + |a_n|_w^2)^{1/2}}. \quad (16)$$

Применяя в (15) оценку (14), мы сразу получаем (12). Аналогично, оценив в (16) $|a_i|_w \leq H(L)^{\delta^{-1}}$, мы получаем (13). Наконец, используя (15) и (16), получаем

$$H_c(M)^{\delta^{-1}} \rho(\theta, M) \leq |L(\theta)| \cdot \prod_{v \neq w} (|a_1|_v^2 + \dots + |a_n|_v^2)^{\delta_v/(2\delta)}.$$

Произведение содержит $r_1 + r_2 - 1$ множителей, и применение оценки (14) дает неравенство (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Применим индукцию по s . При $s = 0$ все очевидно: $N = 0$ и можно положить $H_0 = \|\theta\|$.

Пусть для $s - 1$ теорема верна. Докажем ее для s , рассуждая от противного. Пусть найдутся $\mathbb{K}$ -рациональное подпространство $N \subset E \otimes \mathcal{K}$ размерности s и число H такие, что выполняются неравенства (3). Покажем, что это приводит к противоречию при больших H_0 .

Пусть ν — наименьшее натуральное число такое, что

$$\exp\left(-\left(\tau_2 + \frac{1}{\delta} - \alpha_{s-1}\left(r_1 + r_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\sigma(\nu)\right) \leq H^{-\alpha_{s-1}}. \quad (17)$$

Такое число существует в силу свойств функции σ , причем если H велико, то и ν велико. При больших ν имеем $\sigma(\nu) \leq (1 + \varepsilon^2)\sigma(\nu - 1)$ и, поскольку для $\nu - 1$ неравенство (17) уже неверно, получаем оценку

$$H^{-\alpha_{s-1}} \leq \exp\left(-\frac{\tau_2 + \delta^{-1} - \alpha_{s-1}(r_1 + r_2 + \varepsilon/2)}{1 + \varepsilon^2}\sigma(\nu)\right). \quad (18)$$

Рассмотрим соответствующую линейную форму $L_\nu(x)$ и определяемую ею гиперплоскость $M_\nu = \{x \mid L_\nu(x) = 0\}$. Предположим, что доказаны соотношения

$$\rho(\theta, M_\nu) \leq \frac{1}{2}(H_c(M_\nu)H)^{-\alpha_{s-1}}, \quad (19)$$

$$\rho(\theta, M_\nu) \geq H^{-\alpha_s}. \quad (20)$$

Тогда из соотношений (20) и (3) следует, что $\rho(\theta, M_\nu) > \rho(\theta, N)$, т.е. заведомо $N \not\subset M_\nu$. Поэтому применимо следствие из предложения 3 и согласно (19)

$$\begin{aligned} \rho(\theta, M_\nu \cap N)H_c(M_\nu \cap N) &\leq H_c(M_\nu)H(\rho(\theta, N) + \rho(\theta, M_\nu)) \\ &< 2H \cdot H_c(M_\nu)\rho(\theta, M_\nu) \leq (H_c(M_\nu)H)^{1-\alpha_{s-1}}. \end{aligned} \quad (21)$$

С другой стороны, $\dim \mathcal{K}(M_\nu \cap N) = s - 1$, поэтому применимо предположение индукции. Определив H' из соотношения

$$(H')^{\alpha_{s-1}} = H_c(M_\nu \cap N)(H_c(M_\nu)H)^{\alpha_{s-1}-1},$$

мы видим, что $H_c(M_\nu \cap N) \leq H'$, так как $H_c(M_\nu \cap N) \leq H_c(M_\nu)H$ (см. следствие из предложения 3). Поскольку H' при больших H также велико, имеем

$$\rho(\theta, M_\nu \cap N) \geq (H')^{-\alpha_{s-1}} = (H_c(M_\nu)H)^{1-\alpha_{s-1}}H_c(M_\nu \cap N)^{-1},$$

что противоречит неравенству (21).

Итак, остается проверить неравенства (19) и (20).

Докажем (19). Применяя последовательно неравенства (11), (12) и оценки (1), имеем

$$\begin{aligned} H_c(M_\nu)^{\alpha_{s-1}}\rho(\theta, M_\nu) &\leq n^{d/2}H_c(M_\nu)^{\alpha_{s-1}-\delta^{-1}}|L_\nu(\theta)|H(L_\nu)^{(r_1+r_2-1)/\delta} \\ &\leq n^{d(1+\alpha_{s-1}-\delta^{-1})/2}|L_\nu(\theta)|H(L_\nu)^{\alpha_{s-1}(r_1+r_2)-\delta^{-1}} \\ &\leq n^{d/2(1+\alpha_{s-1}-\delta^{-1})}\exp\left(-\left(\tau_2 - \alpha_{s-1}(r_1 + r_2) + \frac{1}{\delta}\right)\sigma(\nu) + (\tau_2\sigma(\nu) - \sigma_2(\nu))\right). \end{aligned}$$

Далее, $\sigma(\nu)$ при больших H также велико, поэтому можно считать, что

$$\tau_2\sigma(\nu) - \sigma_2(\nu) \leq \frac{\varepsilon}{4}\alpha_{s-1}\sigma(\nu),$$

и оцениваемое выражение в силу (17) не превосходит

$$n^{d(1+\alpha_{s-1})/2} e^{-\varepsilon\alpha_{s-1}\sigma(\nu)/4} H^{-\alpha_{s-1}} \leq \frac{1}{2} H^{-\alpha_{s-1}}.$$

Докажем (20). Применяя последовательно оценку (18), соотношения (2), неравенства $\alpha_s \geq 1$ и

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{6(\tau_1 + \delta^{-1} + 1)},$$

а также оценки (1), имеем

$$\begin{aligned} H^{-\alpha_s} &\leq \exp\left(-\frac{\tau_2 + \delta^{-1} - \alpha_{s-1}(r_1 + r_2 + \varepsilon/2)}{1 + \varepsilon^2} \frac{\alpha_s}{\alpha_{s-1}} \sigma(\nu)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\tau_1 + \delta^{-1} + \varepsilon\alpha_s/2}{1 + \varepsilon^2} \sigma(\nu)\right) \\ &< e^{-(\tau_1 + \delta^{-1} + \varepsilon/3)\sigma(\nu)} \leq |L_\nu(\theta)| H(L_\nu)^{-\delta^{-1}} e^{-\varepsilon\sigma(\nu)/3} + (\sigma_1(\nu) - \tau_1\sigma(\nu)). \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma(\nu)$ при больших H велико и $\sigma_1(\nu) - \tau_1\sigma(\nu) \leq \varepsilon\sigma(\nu)/6$, при больших H оцениваемое выражение не превосходит

$$|L_\nu(\theta)| H(L_\nu)^{-\delta^{-1}} e^{-\varepsilon\sigma(\nu)/6} \leq n^{1/2} e^{-\varepsilon\sigma(\nu)/6} \rho(\theta, M_\nu) < \rho(\theta, M_\nu)$$

согласно неравенству (13).

Теорема полностью доказана.

Автор благодарит профессора Ю. В. Нестеренко за постановку задачи и ценные советы, а также профессора Д. Бертрана за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чудновский Г. В. Аналитические методы в диофантовых приближениях. Препринты № 74.8, № 74.9. Киев: ИМ АН УССР, 1974.
- [2] Ressayat E. Un critère d'indépendance algébrique // J. Reine Angew. Math. 1981. V. 329. P. 66–81.
- [3] Waldschmidt M., Zhu Yao Chen. Une généralisation en plusieurs variables d'un critère de transcendance de Gelfond // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1983. V. 297. P. 229–232.
- [4] Нестеренко Ю. В. Об одном достаточном признаке алгебраической независимости чисел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 4. С. 63–68.
- [5] Phillipon P. Critères pour l'indépendance algébrique de familles de nombres // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1984. V. 6. P. 285–290.
- [6] Нестеренко Ю. В. О мере линейной независимости чисел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 1. С. 46–49.
- [7] Гантмахер Р. Теория матриц. М.: Наука, 1986.
- [8] Ленг С. Основы диофантовой геометрии. М.: Мир, 1986.
- [9] Каган В. Ф. Основания теории определителей. М., 1921.