Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. О. Бесов, О граничном поведении компонент полигармонических функций, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 518–530

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 11:07:17

УДК 517.575

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ КОМПОНЕНТ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. О. Бесов

В работе рассматривается следующее представление полигармонических функций в единичном шаре D^m :

$$f = \Phi_0 + (1 - r^2)\Phi_1 + \dots + (1 - r^2)^{n-1}\Phi_{n-1},$$

где Φ_j гармоничны в D^m . Изучается связь равномерных граничных свойств функции f (гладкость и рост при подходе к границе) с такими же свойствами слагаемых в данном ее представлении. Доказанные теоремы обобщают результаты, полученные Е. П. Долженко в теории полианалитических функций.

Библиография: 6 названий.

Введение. Напомним, что функция F , заданная в области $G \subset \mathbb{R}^m$ и имеющая непрерывные частные производные до порядка $2n$ включительно, называется *полигармонической порядка n* (или *n -гармонической*), если она удовлетворяет уравнению $\Delta^n F = 0$. Класс всех таких функций обозначим через $H_n(G)$. Для единичного шара $D = D^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| < 1\}$ всякую функцию $F \in H_n := H_n(D)$ можно единственным образом представить в виде

$$F = \Psi_0 + r^2\Psi_1 + \dots + (r^2)^{n-1}\Psi_{n-1} \quad (1)$$

или, после простых преобразований,

$$F = f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}, \quad f_k = (1 - r^2)^k \Phi_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (2)$$

где $r^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2$, а $\Phi_k, \Psi_k \in H := H_1$ — гармонические функции (для удобства мы докажем это в п. 1, см. также [1]). Очевидно, $\Phi_{n-1} = (-1)^{n-1}\Psi_{n-1}$. Далее слагаемые f_k в представлении (2) будем называть компонентами функции F , а Φ_k — ее гармоническими компонентами.

Известно, что “хорошие” свойства полигармонической функции не переносятся автоматически на ее гармонические компоненты Φ_k, Ψ_k . Так, существуют бигармонические в $D \subset \mathbb{R}^2$ и непрерывные на $\overline{D}$ функции, гармонические компоненты которых неограничены и почти в каждой точке на ∂D не имеют угловых пределов (см., например, [2]). Ниже изучается связь между равномерными граничными свойствами полигармонической функции F и такими же свойствами *слагаемых* в ее представлении (2). Предварительно напомним некоторые определения.

Пусть p — действительное число. Обозначим через $\langle p \rangle$ наибольшее целое число, *строго меньшее p* . Следующие классы функций были введены Е. П. Долженко в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01366.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Ограниченными* (соответственно *равномерно непрерывными*) *порядка* 0 *в области* G назовем функции, ограниченные (соответственно равномерно непрерывные) в этой области. При $p > 0$ назовем функцию f *ограниченной порядка* p *в области* G , если у нее в G существуют все частные производные до порядка $\langle p \rangle$ включительно, причем производные порядка меньше $\langle p \rangle$ удовлетворяют условию $\text{Lip } 1$ (считаем $\partial^0 f / \partial x^0 := f$), а все производные порядка $\langle p \rangle$ – условию $\text{Lip}(p - \langle p \rangle)$. Если при этом существуют все частные производные порядка $[p]$ и их модули непрерывности в G суть величины порядка $o(t^{p-[p]})$ ($t \rightarrow 0$), то назовем f *равномерно непрерывной порядка* p *в области* G . При $p < 0$ назовем локально ограниченную в G функцию f *ограниченной порядка* p , если $|f(x)| = O(\rho^p)$ при $\rho = \text{dist}(x, \partial G) \rightarrow 0$; если f непрерывна в G , $|f(x)| = o(\rho^p)$ при $\rho \rightarrow 0$, то назовем f *равномерно непрерывной порядка* p *в области* G .

Очевидно, что для гладкой функции f в D условие ограниченности (равномерной непрерывности) целого порядка $p > 0$ эквивалентно ограниченности (равномерной непрерывности) в D всех ее частных производных порядка p . Класс всех функций, имеющих в области G ограниченность порядка p , будем обозначать через $M^p(G)$, а имеющих равномерную непрерывность порядка p , – через $CU^p(G)$. Обобщением классов $M^p(G)$ являются классы $M(t^p \omega(t), G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $p \in \mathbb{Z}$ – целое число, $\omega(t)$ – модуль непрерывности, функция f определена и локально ограничена в области G . Скажем, что f обладает *ограниченностью уточненного порядка* $t^p \omega(t)$, и будем писать $f \in M(t^p \omega(t), G)$, если при $p \leq -1$ $|f(x)| = O(\rho^p \omega(\rho))$ ($\rho = \text{dist}(x, \partial G) \rightarrow 0$) или при $p \geq 0$ f имеет в G все частные производные до порядка p включительно, причем модули непрерывности всех производных порядка p в G суть $O(\omega(t))$ ($t \rightarrow 0$), а производные меньших порядков (включая f при $p > 0$) удовлетворяют условию $\text{Lip } 1$ в G .

Под *модулем непрерывности* мы понимаем функцию $\omega(t)$ со свойствами:

$$0 = \omega(0) \leq \omega(u) \leq \omega(u+v) \leq \omega(u) + \omega(v), \quad u, v \geq 0.$$

Заметим, что для произвольного модуля непрерывности ω найдется непрерывный и выпуклый вверх на $(0, +\infty)$ модуль непрерывности $\tilde{\omega}$ такой, что $\frac{1}{3}\tilde{\omega}(t) \leq \omega(t) \leq 3\tilde{\omega}(t)$ (см., например, [3], где доказан более сильный результат с условием дважды гладкости $\tilde{\omega}$). Поэтому далее мы считаем ω непрерывным и выпуклым вверх. При этом нас будет интересовать случай, когда ω подчиняется так называемому условию Ульянова–Бари–Стечкина:

$$\omega(\delta) \geq C \left(\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right) \quad \text{для всех } 0 < \delta < 1. \quad (3)$$

Здесь $C > 0$ – некоторая константа, зависящая только от ω .

Из представления (1) в двумерном случае сразу вытекает, что любая полигармоническая функция F в круге D является вещественной частью некоторой полианалитической функции f , т.е. такой что $(\partial/\partial \bar{z})^n f = 0$. Для любой функции f из класса A_n полианалитических в круге D функций верно разложение

$$f(z) = \psi_0(z) + \bar{z}\psi_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}\psi_{n-1}(z),$$

которое легко преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f(z) &= P(z, \bar{z}) + \varphi_0(z) + (1 - |z|^2)\varphi_1(z) + \cdots + (1 - |z|^2)^{n-1}\varphi_{n-1}(z), \\ P(z, \bar{z}) &= \bar{z}P_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}P_{n-1}(z), \end{aligned} \quad (4)$$

где P_k – полином от z степени не выше $k - 1$, а φ_k, ψ_k – аналитические функции. Долженко получил следующий результат для полианалитических функций (сформулируем его только в случае единичного круга, хотя он остается верным и для более широкого класса областей).

ТЕОРЕМА ДОЛЖЕНКО [4]. Пусть функция $f \in A_n$ представлена в виде (4) и $f_k(z) := (1 - |z|^2)^k \varphi_k(z)$, $k = 0, \dots, n - 1$. Тогда при любом $p \in \mathbb{R}$ справедливы эквиваленции:

$$\begin{aligned} f \in M^p(D^2) &\iff f_k \in M^p(D^2) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1, \\ &\iff \varphi_k \in M^{p-k}(D^2) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1, \\ f \in CU^p(D^2) &\iff f_k \in CU^p(D^2) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1, \\ &\iff \varphi_k \in CU^{p-k}(D^2) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1. \end{aligned}$$

Ниже доказывается аналогичная теорема для полигармонических функций.

1. Вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть m – натуральное число. Тогда

- 1) $\Delta(r^n) = n(m + n - 2)r^{n-2}$, $n > 0$;
- 2) $\Delta(h_1 h_2) = h_1 \Delta h_2 + h_2 \Delta h_1 + 2(\text{grad } h_1, \text{grad } h_2) \quad \forall h_1, h_2 \in C^2$;
- 3) $\Delta(r^n \Phi) = 2nr^{(n-m)/2} \frac{\partial}{\partial r}(r^{(m+n-2)/2} \Phi) \quad \forall \Phi \in H(D^m)$, $n > 0$;
- 4) если Φ – гармоническая функция в D^m , то следующие функции также являются гармоническими в D^m :

$$r^{-s} \int_0^r r^{s-1} \Phi dr, \quad s > 0, \quad r^{1-s} \frac{\partial}{\partial r}(r^s \Phi), \quad r^{2-s} \Delta(r^s \Phi), \quad s \geq 0. \quad (5)$$

Здесь и далее, запись $\int_0^r dr$ означает интегрирование по отрезку, соединяющему начало координат с точкой x , $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$, и результат является функцией точки x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) проверяются непосредственно; 3) следует из 2). Докажем 4). Поскольку функция Φ гармонична в D , ее ряд Тейлора с центром в нуле равномерно сходится к ней на любом меньшем (концентрическом) шаре. Группируя члены соответствующим образом, получим ряд из однородных гармонических полиномов вида

$$\sum_{n_1 + \cdots + n_m = n} C_{n_1 \dots n_m} r^n (\cos \theta_1)^{n_1} \cdots (\cos \theta_m)^{n_m},$$

где $\cos \theta_l = x_l / r$ – направляющие косинусы вектора $\vec{r}$. На каждый такой полином операторы, выраженные формулами (5), действуют как умножение на не слишком быстро растущий (с ростом n) положительный коэффициент. Интегрируя либо дифференцируя почленно, получаем новые ряды из гармонических полиномов, сходящиеся во всем шаре D к некоторой гармонической функции Ψ . Предложение 1 доказано.

ЛЕММА 1 [5]. Для полигармонической функции $F \in H_n(D^m)$, $m \in \mathbb{N}$, справедливо представление (2):

$$F = \Phi_0 + (1 - r^2)\Phi_1 + \dots + (1 - r^2)^{n-1}\Phi_{n-1},$$

где $\Phi_k \in H$ — гармонические функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что можно найти гармоническую функцию Φ такую, что $F - (1 - r^2)^{n-1}\Phi \in H_{n-1}$, т.е. $\Delta^{n-1}((1 - r^2)^{n-1}\Phi) = \Delta^{n-1}F$, что равносильно равенству $(-1)^{n-1}\Delta^{n-1}(r^{2n-2}\Phi) = \Delta^{n-1}F$, или в силу предложения 1

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_j r^j \frac{\partial^j \Phi}{\partial r^j} = \Delta^{n-1}F \in H(D).$$

Теперь легко найти функцию Φ в виде суммы ряда однородных гармонических полиномов. Действительно, для однородного полинома P операция

$$r^j \frac{\partial^j P}{\partial r^j}$$

есть умножение на положительную константу. Лемма 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 1 видно, что любую полигармоническую в единичном шаре функцию F можно разложить в степенной ряд, равномерно сходящийся на всяком компакте $K \subset D$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f \in H^n$ представлена в виде (2). Тогда ее последняя гармоническая компонента имеет вид

$$\Phi_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{r^{2-n-m/2}}{4^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_0^r dr \dots \int_0^r}_{n-1} r^{m/2-1} \Delta^{n-1} f dr. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С помощью формулы Коши для повторных интегралов равенство (6) можно переписать в виде

$$\Phi_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{r^{2-n-m/2}}{4^{n-1}(n-1)!(n-2)!} \int_0^r (r-\rho)^{n-2} \rho^{m/2-1} \Delta^{n-1} f d\rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом утверждений 3) и 4) предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} \Psi(x) &:= (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} f(x) = \Delta^{n-1}((r^2 - 1)^{n-1} \Phi_{n-1}(x)) \\ &= \Delta^{n-1}(r^{2n-2} \Phi_{n-1}(x)) = \Delta \left(r^2 \frac{\Delta^{n-2}(r^{2n-2} \Phi_{n-1}(x))}{r^2} \right) \\ &= 4r^{1-m/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{m/2} \frac{\Delta^{n-2}(r^{2n-2} \Phi_{n-1}(x))}{r^2} \right) \\ &= 4r^{1-m/2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{m/2-2} \Delta^{n-2}(r^{2n-2} \Phi_{n-1}(x))). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Delta^{n-2}(r^{2n-2}\Phi_{n-1}) = \frac{r^{2-m/2}}{4} \int_0^r r^{m/2-1} \Psi(x) dr. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Delta^{n-2}(r^{2n-2}\Phi_{n-1}) &= \Delta \left(r^4 \frac{\Delta^{n-3}(r^{2n-2}\Phi_{n-1})}{r^4} \right) \\ &= 8r^{2-m/2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{m/2+1} \frac{\Delta^{n-3}(r^{2n-2}\Phi_{n-1})}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (7), получим

$$\Delta^{n-3}(r^{2n-2}\Phi_{n-1}) = \frac{r^{3-m/2}}{4 \cdot 8} \int_0^r dr \int_0^r r^{m/2-1} \Psi dr.$$

Продолжая процесс, приходим к (6). Лемма 2 доказана.

Существенную роль в наших рассуждениях будет играть еще одна характеристика функции, предложенная Долженко, – ореольный модуль непрерывности порядка q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для числа $R > 0$ и функции f , заданной в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^m$ и интегрируемой по Лебегу на сфере $S = S(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y - x| = R\}$, назовем

$$\Delta_R f(x) := \frac{1}{\mu S} \int_S (f(y) - f(x)) d\mu(y)$$

ореольной разностью радиуса R функции f в точке x (μ – обычная мера Лебега на сфере S , μS – площадь сферы).

Известно, что если функция f дважды гладка вблизи точки x , то

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^{-2} \Delta_R f(x) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_m^2} \right) = \frac{1}{2m} \Delta f(x).$$

Если для функции f в точке x определена n -я степень оператора Δ_R , выражение $\Delta_R^n f(x)$ будем называть *n -й ореольной разностью функции f радиуса R в точке x* .

Назовем *ореольным модулем непрерывности порядка q , $q \in \mathbb{N}$, функции f , заданной в области $G \in \mathbb{R}^m$, функцию*

$$\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) := \sup\{|\Delta_R^q f(x)|\}, \quad 0 < \delta < \infty, \quad \omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, 0) = 0,$$

где супремум берется по всем парам (x, R) таким, что $0 < R \leq \delta$, при этом замкнутый круг радиуса qR с центром в x лежит в G . Легко доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (Е. П. Долженко). Если $f \in M^p(G)$, то $\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) = O(\delta^s)$, $\delta \rightarrow 0$, где $s = \min\{p, 2q\}$. Если $f \in CU^p(G)$, то $\omega_{\text{ор}}^{(q)}(f, G, \delta) = o(\delta^p) + O(\delta^{2q})$.

ЛЕММА 3. Пусть $F \in H_n(D^m)$. Тогда

$$|\Delta^{n-1}F(x)| \leq C \rho^{2(1-n)} \omega_{\text{ор}}^{(n-1)}\left(F, D^m, \frac{\rho}{n}\right), \quad x \in D^m, \quad \rho = \text{dist}(x, \partial D^m), \quad (8)$$

где C – константа, зависящая только от n и m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем функцию F в виде (1). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_R F(0) &= \frac{1}{\mu S} \int_{S(0,R)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} \Psi_k(y) - F(0) \right) d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{R^{2k}}{\mu S} \int_S \Psi_k(y) d\mu(y) = \sum_{k=1}^{n-1} R^{2k} \Psi_k(0). \end{aligned}$$

Имеем

$$\Psi_0(0) = F(0), \quad \Psi_1(0) = \frac{1}{2m} \Delta F(0), \quad \dots, \quad \Psi_{n-1}(0) = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \Delta^{n-1} F(0),$$

где

$$\alpha_k = \Delta^k r^{2k} = \frac{(2k)!! (m+2k-2)!!}{(m-2)!!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и

$$\Delta_R F(0) = \sum_{k=1}^{n-1} R^{2k} \frac{\Delta^k F(0)}{\alpha_k}.$$

Поскольку мы можем сдвигом любую точку перевести в нуль, это равенство справедливо во всем круге D :

$$\Delta_R F(x) = \sum_{k=1}^{n-1} R^{2k} \frac{\Delta^k F(x)}{\alpha_k}, \quad \alpha_1 = 2m.$$

Отсюда видно, что старший член (при $k = 1$) равен $\frac{1}{2m} R^2 \Delta F(x)$ и

$$\Delta_R^{n-1} F(x) = \frac{1}{(2m)^{n-1}} R^{2n-2} \Delta^{n-1} F(x),$$

откуда немедленно вытекает (8). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4 (Е.П. Долженко). Пусть $D := D^m \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, j, p – целые числа, $j > p$, $j \geq 1$, ω – модуль непрерывности, подчиняющийся условию (3), функция f имеет в D непрерывные частные производные всех порядков не больше j . Тогда

- 1) если производные порядка j принадлежат классу $M(t^{p-j}\omega(t), D)$, то f лежит в $M(t^p\omega(t), D)$;
- 2) если производные порядка j принадлежат классу $M^{p-j}(D)$ (или $CU^{p-j}(D)$), где p – число отрицательное или положительное нецелое, то f лежит в $M^p(D)$ (соответственно в $CU^p(D)$).

Следующие леммы распространяют известные результаты из теории полианалитических функций на полигармонические функции.

ЛЕММА 5. Пусть функция Φ гармонична в D^m , p – действительное число, k – натуральное. Тогда для принадлежности $(k+1)$ -гармонической функции $g(x) = (1-r^2)^k \Phi(x)$ к $M^{k+p}(D^m)$ или $CU^{k+p}(D^m)$ необходима и достаточна принадлежность Φ к $M^p(D^m)$ или $CU^p(D^m)$ соответственно.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in H_n(D^m) \cap M^p(D^m)$. Тогда при каждом $j \in \mathbb{N}$ все производные порядка j функции f принадлежат $M^{p-j}(D^m)$. Если $f \in H_n(D^m) \cap CU^p(D^m)$, то производные порядка j принадлежат $CU^{p-j}(D^m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 6 и достаточной части леммы 5 вытекает сформулированная во введении теорема Долженко. Действительно, если функция $f \in A_n \cap M^p(D^2)$ представлена в виде (4), то $f \in H_n$ и

$$z^{n-1} \varphi_{n-1}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n-1} f(z) \in M^{p-n+1}.$$

Отсюда $\varphi_{n-1} \in M^{p-n+1}$, и по лемме 5 $(1-|z|^2)^{n-1} \varphi_{n-1}(z) \in M^p$. Это же рассуждение проходит и для классов CU^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 5 И 6 проведем только для классов M^p . Все рассуждения без существенных изменений переносятся на случай CU^p . Пусть μ – $(m-1)$ -мерная лебегова мера на сфере $S = S(x^0, R)$. Тогда для функции Φ , гармонической на замкнутом шаре $D(x^0, R)$ с центром x^0 и радиусом R , по формуле Пуассона (см. [6, гл. IV, § 2]) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(x^0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{R^{m-2}}{\mu S} \int_S \frac{R^2 - |x - x^0|^2}{(|x - y|^2)^{m/2}} (\Phi(y) - \Phi(x^0)) d\mu(y) \Big|_{x=x^0} \\ &= - \frac{R^{m-2}}{\mu S} \int_S \frac{\frac{m}{2} R^2 2(x^0 - y)_l}{(|x^0 - y|^2)^{m/2+1}} (\Phi(y) - \Phi(x^0)) d\mu(y) \\ &= - \frac{R^{m-2}}{\mu S} \int_S \frac{m R^2 (x^0 - y)_l}{R^{m+2}} (\Phi(y) - \Phi(x^0)) d\mu(y) \\ &= \frac{m}{R^2 \mu S} \int_S (x^0 - y)_l (\Phi(y) - \Phi(x^0)) d\mu(y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(x) \right| \leq \frac{m}{R} \sup_{|y-x|=R} \{ |\Phi(x) - \Phi(y)| \}. \quad (9)$$

С помощью неравенства (9) легко получить, что производные первого порядка гармонической функции $\Phi \in M^p(D)$ лежат в M^{p-1} . Действительно, при $p < 1$ положим в (9) $R = \frac{1}{2} \text{dist}(x, \partial D)$, а при $p \geq 1$ это следует из определения классов M^p .

Теперь установим достаточность условий леммы 5. Если $p+k \leq 0$, то $\Phi \in M^p(D) \implies g \in M^{p+k}(D)$ по определению. Пусть $p+k > 0$. Обозначим через q наименьшее целое число $\geq p+k$. Пользуясь только что установленным свойством производных гармонической функции, для любого мультииндекса α , $|\alpha| = q$, получим

$$\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(x) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C_\beta \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} ((1-r^2)^k) \frac{\partial^{|\alpha-\beta|} \Phi}{\partial x^{\alpha-\beta}}(x) \in M^{p+k-q}(D).$$

Отсюда $g \in M^{p+k}(D)$ (при целом p по определению, а при остальных по лемме 4).

Доказательство леммы 6 проведем для случая $j = 1$ и $p < 1$. Случай $p \geq 1$ при $j = 1$ тривиален, а утверждение леммы для производных высших порядков легко получить итерацией. Итак, пусть $f \in H_n(D) \cap M^p(D)$ представлена в виде (2). Согласно лемме 3 и предложению 2 $\Delta^{n-1} f \in M^{p-2n+2}$. Каждое интегрирование в (6) улучшает класс на единицу (т.е. если функция была из M^{s-1} , то после интегрирования она станет класса M^s при условии $s < 0$). Поскольку множители вида r^λ не влияют на принадлежность классу M^s , получаем $\Phi_{n-1} \in M^{p-n+1}$, что вместе с достаточным условием леммы 5 дает $(1-r^2)^{n-1}\Phi_{n-1} \in M^p$. Поэтому и $(n-1)$ -гармоническая функция $f - (1-r^2)^{n-1}\Phi_{n-1}$ принадлежит M^p . По-доказанному, функция Φ_{n-2} лежит в M^{p-n+2} , а значит, $(1-r^2)^{n-2}\Phi_{n-2} \in M^p$. Продолжая этот процесс, получим $\Phi_0 \in M^p$. Итак,

$$f \in H_n \cap M^p(D), \quad p < 1, \iff \Phi_k \in M^{p-k}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Пользуясь утверждением леммы 6 для гармонических функций (уже доказанным), имеем

$$\Phi_k \in M^{p-k} \implies \frac{\partial}{\partial x_l} ((1-r^2)^k \Phi_k) \in M^{p-1}, \quad 0 \leq k \leq n-1, \implies \frac{\partial f}{\partial x_l} \in M^{p-1},$$

что и требовалось. Лемма 6 доказана.

Наконец, докажем необходимость условий леммы 5. Напомним обозначения: $g(x) = (1-r^2)^k \Phi(x) \in H_{k+1} \cap M^{p+k}(D)$. Докажем, что $\Phi \in M^p$, “индукцией” по p . По лемме 6 $\Delta^k g \in M^{p-k}$, и при $p < 0$ согласно лемме 2 $\Phi \in M^p$. Предположим, что при фиксированном k мы доказали лемму 5 для всех $p < p_0$ ($p_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), докажем ее для всех p , $p_0 \leq p < p_0 + 1$.

Выберем пару декартовых координат x_{j_1}, x_{j_2} и введем в плоскости $OX_{j_1}X_{j_2}$ полярные координаты R и θ , оставив неизменными координаты $x_l, l \neq j_1, j_2$. Тогда по лемме 6 $\partial g / \partial \theta = (1-r^2)^k (\partial \Phi / \partial \theta) \in M^{p+k-1}$. По предположению индукции ($p-1 < p_0$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \in M^{p-1} \quad (10)$$

(мы воспользовались тем, что $\partial \Phi / \partial \theta$ – гармоническая функция). Придавая индексам j_1 и j_2 всевозможные различные значения, убедимся в справедливости утверждения (10) для других “полярных” углов θ . Сопоставим каждому дифференциальному оператору $\partial / \partial \theta$ векторное поле на сфере радиуса r с центром в нуле. Разобьем сферу на несколько карт, в каждой из которых выберем из имеющегося набора векторных полей $m-1$, образующих базис, и введем локальную систему координат $\theta_1, \dots, \theta_{m-1}$. Очевидно, что векторные поля, соответствующие операторам $\partial / \partial \theta_l$, разлагаются по этому базису, и утверждение (10) остается в силе для производных $\partial \Phi / \partial \theta_l, l = 1, \dots, m-1$.

Пусть $D_0 := D \setminus \frac{1}{2}D$ – шар D с выкинутой “маленькой” окрестностью нуля. В силу предложения 2

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\nu (r^{k+m/2-1} \Phi) = \frac{1}{4^k k!} \underbrace{\int_0^r dr \dots \int_0^r}_{k-\nu} r^{m/2-1} \Delta^k ((-1)^k g) dr \in M^{p-k}(D_0),$$

$$\nu = 0, 1, \dots, k,$$

так как $\Delta^k((-1)^k g) \in M^{p-k}$, а интегрирование не может ухудшить класс функции. Это дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k (r^{1-k-m/2}(r^{k+m/2-1}\Phi)) \in M^{p-k}(D_0).$$

Если $p < k$, то за счет интегрирования имеем ($[p]$ – целая часть p)

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\nu \Phi \in M^{p-\nu}(D_0), \quad \nu = [p] + 1, [p] + 2, \dots \quad (11)$$

По лемме 6

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+k} ((r-1)^k \Phi) &= (-1)^k \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+k} \left(\frac{g}{(1+r)^k}\right) \in M^{p-[p]}(D_0), \\ \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+k} ((r-1)^k \Phi) &= \sum_{j=0}^k C_j (r-1)^{k-j} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+k-j} \Phi \\ &= \sum_{j=0}^k C_{k-j} (r-1)^j \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+j} \Phi \in M^{p-[p]}(D_0). \end{aligned}$$

Все слагаемые в последней сумме имеют вид

$$C_{k-j} (r-1)^j \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+j} \Phi = C_{k-j} r^{-[p]-j} (r+1)^{-j} (r^2-1)^j \left(r^{[p]+j} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{[p]+j} \Phi\right).$$

В силу (11) и достаточного условия леммы 5 все слагаемые, кроме первого, лежат в $M^{p-[p]}(D_0)$. Тогда и первое слагаемое $(\partial/\partial r)^{[p]} \Phi$ лежит в $M^{p-[p]}(D_0)$ (при $p \geq k$ по определению). Все производные порядка $[p]$ функции Φ выражаются через $(\partial/\partial r)^{[p]}$ и производные, в которых участвует $\partial/\partial \theta_l$. Из (10) и определения классов M^p заключаем, что $\Phi \in M^p(D_0)$, а значит, $\Phi \in M^p(D)$. Индукция и вместе с ней доказательство леммы 5 завершены.

2. Основные результаты. Как будет показано в этом пункте, обобщение теоремы Долженко с простой заменой класса A_n и представления (4) соответственно на класс H_n и представление (2) неверно даже для бигармонических функций в $\mathbb{R}^2$. Однако, если исходная полигармоническая функция f взята из $M^p(D)$, то при $p \notin \mathbb{N}$ ее компоненты также лежат в $M^p(D)$, а при $p \in \mathbb{N}$ ее компоненты принадлежат классу $M^q(D)$ для всех $q < p$.

Рассмотрим сначала полигармонические функции на плоскости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f \in H_n(D^2)$ представлена в виде (2). Тогда при всех действительных $p \neq 1, \dots, 2n-2$ справедливы эквиваленции:

$$\begin{aligned} f \in M^p(D) &\iff f_k \in M^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \\ f \in CU^p(D) &\iff f_k \in CU^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (12)$$

При $p = 1, \dots, 2n-2$ утверждение (12) неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f \in H_n(D^2) \cap M^p(D^2), \quad f_k(z) = (1 - |z|^2)^k \Phi_k(z), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Как обычно, $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$. Пусть $p \neq 1, \dots, 2n-2$. Преобразуем равенство (6) к виду

$$\Phi_{n-1}(z) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{(-4)^{1-n}}{(n-1)!} \frac{1}{z^{n-1}} \int_0^z dz_1 \cdots \int_0^{z_{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right) \Delta^{n-1} f(z_n) dz_n \right) + C.$$

Справедливость этого равенства легко установить для однородных полигармонических полиномов, следовательно, оно верно для всех $f \in H_n(D^2)$. Отметим, что под интегралом стоит аналитическая функция, т.е. результат не зависит от путей интегрирования. По лемме 6 подынтегральное выражение лежит в M^{p-2n+1} . Оператор $\int_0^z$ переводит аналитическую функцию класса $M^s(D^2)$ в функцию класса $M^{s+1}(D^2)$ для всех $s \neq -1$ (см. лемму 4), т.е. получаем $\Phi_{n-1} \in M^{p-n+1}$ и $f_{n-1} \in M^p$ по лемме 5. Поэтому и $(n-1)$ -гармоническая функция $f - f_{n-1} \in M^p$. Продолжая процесс далее, увидим, что все компоненты функции f лежат в $M^p(D^2)$.

Аналогичными рассуждениями можно показать справедливость первой части теоремы для классов CU^p .

Построим функцию $f \in H_2(D^2) \cap CU^1(D^2) \subset M^1(D^2)$, компоненты которой не лежат ни в M^1 , ни в CU^1 . Положим $\Psi(z) = \arg \ln(z-1) = \operatorname{Im} \ln \ln(z-1)$, $\Psi(1) = \arg(-1)$ (у логарифма можно взять произвольную ветвь, определенную в плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси).

Легко проверить, что гармоническая функция Ψ (равномерно) непрерывна на $\overline{D}^2$, а сопряженная к ней даже неограничена там. Пусть

$$f(z) = y \arg \ln(z-1), \quad f \in CU^1 \cap H_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{Im} \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \ln \ln(z-1) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(z \ln \ln(z-1) - \bar{z} \ln \ln(-1) - |z|^2 \frac{\ln \ln(z-1) - \ln \ln(-1)}{z} \right), \\ \Phi_1(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\ln \ln(z-1) - \ln \ln(-1)}{z} = \frac{1}{2|z|^2} \operatorname{Re} (\bar{z} (\ln \ln(z-1) - \ln \ln(-1))) \\ &= \frac{x(\ln |\ln(z-1)| - c_1) - y(\arg \ln(z-1) - c_2)}{2|z|^2}; \end{aligned}$$

Φ_1 неограничена и, значит, старшая компонента $(1 - |z|^2)\Phi_1(z)$ не лежит в CU^1 (и даже в M^1), в то время как $f \in CU^1$.

Для завершения доказательства покажем, что n -гармоническая функция

$$f(z) = (1 - |z|^2)^{p-2[p/2]} (|1 - z|^2)^{[p/2]} \arg \ln(z-1)$$

лежит в $CU^p(D)$ при $p = 2, \dots, 2n-2$, однако ее компоненты не лежат даже в $M^p(D)$. Первый множитель без изменений переносится на компоненты функции f и не играет существенной роли. При нечетных p он улучшает гладкость на единицу, а при четных

равен 1. Поэтому достаточно рассмотреть функцию $g(z) = |z - 1|^{2l-2} \arg \ln(z - 1)$, $g \in CU^{2l-2} \cap H_l$, и показать, что ее компоненты не лежат в M^{2l-2} . Имеем

$$g(z) = \operatorname{Im}(|z - 1|^{2l-2} \ln \ln(z - 1)) = \operatorname{Im}(\bar{z}^{l-1}(z - 1)^{l-1} \ln \ln(z - 1) + h(z)),$$

где $h \in A_{l-1}$ не влияет на гармоническую компоненту Φ_{l-1} . Далее,

$$\begin{aligned} \Phi_{l-1}(z) &= \operatorname{Im} \frac{(z - 1)^{l-1} \ln \ln(z - 1) - P_{l-1}(z)}{z^{l-1}} \\ &= \frac{1}{|z|^{2l-2}} \operatorname{Im}(\bar{z}^{l-1}((z - 1)^{l-1} \ln \ln(z - 1) - P_{l-1}(z))), \end{aligned}$$

где P_{l-1} — начальный отрезок ряда Тейлора функции $(z - 1)^{l-1} \ln \ln(z - 1)$ с центром в нуле. Легко проверить, что компонента $(1 - |z|^2)^{l-1} \Phi_{l-1}(z)$ имеет неограниченные производные порядка $2l - 2$, т.е. она не лежит ни в CU^{2l-2} , ни даже в M^{2l-2} . Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f \in H_n(D^m)$, $m \geq 3$, представлена в виде (2). Тогда при всех $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ справедливы эквиваленции:

$$\begin{aligned} f \in M^p(D) &\iff f_k \in M^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1, \\ f \in CU^p(D) &\iff f_k \in CU^p(D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

При $p = 1, \dots, 2n - 2$ утверждение (13) неверно.

Нам удалось построить при всех $p \in \mathbb{N}$ примеры бигармонических функций в D^m , $m \geq 3$, опровергающие утверждение (13). Однако, это построение слишком объемно и использует совсем другие идеи, так что оно будет изложено в другой работе автора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, как обычно, проведем только для классов M^p . Если $f \in M^p(D)$, то по лемме 6 $\Delta^{n-1} f \in M^{p-2n+2}(D)$. При $p < 1$ из (6) следует, что $\Phi_{n-1} \in M^{p-n+1}$, и по лемме 5 $f_{n-1} = (1 - r^2)^{n-1} \Phi_{n-1} \in M^p$. Проводя те же рассуждения для $(n-1)$ -гармонической функции $f - f_{n-1}$, получим $f_{n-2} \in M^{p-n+2}, \dots, f_0 \in M^p$. Таким образом, при $p < 1$ теорема доказана. Случай нецелых положительных p будет описан в теореме 3, в которой мы рассмотрим классы $M(t^p \omega(t))$ с условием (3) на модуль непрерывности ω (в нашем случае $\omega(t) = t^{p-[p]}$).

Далее заметим, что примеры функций, доказывающие вторую часть теоремы 1, легко переносятся на случай произвольной размерности путем добавления несущественных переменных. Другими словами, для функции, заданной в круге на плоскости, мы строим новую функцию f на шаре в пространстве, значение которой в точке x совпадает со значением исходной функции в точке $\pi(x)$, где π — проекция на плоскость. Запишем последнюю гармоническую компоненту полигармонической функции f по формуле (6) и рассмотрим сужение этой компоненты на плоскость. Тогда точно так же, как и в двумерном случае, $\int_0^{\vec{r}} ds$ в (6) можно преобразовать к виду $\int_0^z dz$ и убедиться, что последняя компонента не принадлежит к соответствующему классу M^p .

ТЕОРЕМА 3. Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (3), функция $f \in H_n(D^m)$, $m \in \mathbb{N}$, представлена в виде (2). Тогда при всех целых p справедливы эквиваленции:

$$\begin{aligned} f \in M(t^p \omega(t), D) &\iff f_k \in M(t^p \omega(t), D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1, \\ &\iff \Phi_k \in M(t^{p-k} \omega(t), D) \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1. \end{aligned}$$

Кроме того, при каждом $j \in \mathbb{N}$ все частные производные порядка j полигармонической функции $f \in M(t^p \omega(t), D)$ лежат в $M(t^{p-j} \omega(t), D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in M(t^p\omega(t))$. Покажем, что $\Delta^{n-1}f \in M(t^{p-2n+2}\omega(t))$. Если $p \geq 2n - 2$, то это следует из определения классов M . Пусть $p < 2n - 2$. Тогда по лемме 3 имеем ($\rho := 1 - |x|$)

$$|\Delta^{n-1}f(x)| \leq C\rho^{2-2n}\omega_{\text{ор}}^{n-1}(f, D, \rho) \leq C_1\rho^{2-2n}\rho^p\omega(\rho).$$

Чтобы получить второе неравенство, нужно записать формулу Тейлора для функции f в точке x . Оператор $\Delta_\rho^{n-1}f$ уничтожит первые $p < 2n - 2$ членов. Таким образом, $\Delta^{n-1}f \in M(t^{p-2n+2}\omega(t))$. Из формулы (9) заключаем, что все производные порядка j гармонической функции $\Delta^{n-1}f$ лежат в $M(t^{p-2n+2-j}\omega(t))$.

В силу выпуклости ω при

$$u(t) := \int_0^t \omega(\lambda) d\lambda$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t\omega(t) &\leq u(t) \leq t\omega(t), \\ J &:= \int_\rho^1 t^{q-1}\omega(t) dt = u(1) - \rho^{q-1}u(\rho) + (1-q) \int_\rho^1 u(t)t^{q-2} dt, \\ J &> 0 - \rho^q\omega(\rho) + \frac{1}{2}(1-q)J, \\ J &= \int_\rho^1 t^{q-1}\omega(t) dt < 2\rho^q\omega(\rho), \quad q \leq -2. \end{aligned} \tag{14}$$

Запишем формулу (6) в виде

$$\Phi_{n-1} = \pm \frac{r^{2-n-m/2}}{4^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_0^r dr \cdots \int_0^r}_{n-1} r^{m/2-1} \Delta^{n-1}f dr.$$

Пусть $p \geq n - 3$. Любую производную функции Φ_{n-1} можно выразить через производные по радиусу r и по углам θ_l , причем производная по радиусу “убивает” одно интегрирование в (6), а производная по θ_l вносится под знак интеграла и ухудшает на единицу класс подынтегральной функции. Оценивая с помощью (14) рост частных производных порядка $p - n + 3$ функции Φ_{n-1} , получаем, что все производные порядка $p - n + 3$ функции Φ_{n-1} лежат в $M(t^{-2}\omega(t))$, и по лемме 4 $\Phi_{n-1} \in M(t^{p-n+1}\omega(t))$.

Если $p < n - 3$, то аналогичным образом с помощью неравенства (14) можно показать, что $\Phi_{n-1} \in M(t^{p-n+1}\omega(t))$.

Оценивая с помощью (9) рост частных производных функции $(1-r^2)^{n-1}\Phi_{n-1} = f_{n-1}$ и применяя лемму 4, приходим к выводу, что $f_{n-1} \in M(t^p\omega(t), D)$. Проводя те же рассуждения для $(n-1)$ -гармонической функции $f - f_{n-1}$, получим первую часть теоремы 3. Вторая часть непосредственно следует из первой и (9). Теорема 3 доказана.

Теоремы 1 и 2 показывают, что для полигармонических функций в единичном шаре имеется некоторый набор исключительных значений параметра p , при которых класс $M^p(D)$ не содержит вместе с каждой функцией $f \in H_n(D)$ ее компоненты. Ниже мы введем определение несколько иных классов гладкости, которые при $p < 0$ совпадают

с M^p . Это позволит получить для полигармонических функций теорему без исключительных значений p , подобную теореме Долженко. Отметим, что совершенно аналогично классам $\widetilde{M}^p$ можно определить классы $\widetilde{CU}^p$ и сформулировать для них соответствующую теорему.

Вернемся к теореме Долженко о полианалитических функциях. Отсутствие исключительных значений p связано с тем, что нам не нужно интегрировать какие бы то ни было функции для восстановления по функции $f \in A_n$ ее последней аналитической компоненты φ_{n-1} :

$$\varphi_{n-1}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{n-1} (f(z) - P(z, \bar{z}))$$

(см. (4)). В полигармоническом случае одно интегрирование в (6) не всегда улучшает класс гладкости M^p на единицу. Именно с учетом исправления этого недостатка мы и вводим новые классы $\widetilde{M}^p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что функция f , заданная и непрерывная в шаре D , принадлежит классу $\widetilde{M}^p$, если при $p < 0$ $f(x) = O(\rho^p)$, $\rho = \text{dist}(x, \partial D) \rightarrow 0$ (т.е. $f \in M^p(D)$), а при $p \geq 0$ f имеет в D непрерывные частные производные до порядка $[p] + 1$ включительно, причем производные порядка $[p] + 1$ растут как $O(\rho^{\{p\}-1})$ при $\rho \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По лемме 6 для полигармонических функций имеем $f \in M^p(D) \implies f \in \widetilde{M}^p(D)$, и по лемме 4 при $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ $f \in M^p \iff f \in \widetilde{M}^p$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f \in H_n(D^m)$ представлена в виде (2). Тогда при любом $p \in \mathbb{R}$ имеют место эквиваленции:

$$f \in \widetilde{M}^p \iff f_k \in \widetilde{M}^p \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1, \iff \Phi_k \in \widetilde{M}^{p-k} \quad \forall k, 0 \leq k \leq n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно вытекает из формулы (6) и того, что любая частная производная выражается через производную по радиусу и производные по θ_l ($\cos \theta_l = x_l/r$).

Заметим, что из теоремы 4 не следует ограниченность компонент ограниченной полигармонической функции f , которая на самом деле имеет место. Однако этот случай ($f \in M^0$) содержится в теоремах 1 и 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nicolesco M. Les fonctions polyharmoniques. Paris: Herman, 1936.
- [2] Долженко Е. П. О граничном поведении компонент полианалитической функции // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 5. С. 585–588.
- [3] Долженко Е. П. Об особых точках непрерывных гармонических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1251–1270.
- [4] Долженко Е. П. Ограничном поведении компонент полианалитической функции // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 821–834.
- [5] Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^n = 0$ // Annali di Matematica. Sèr. 3. 1899. V. 2. P. 1–59.
- [6] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1964.