Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Горбиков, Локальные особенности динамических систем с ударными взаимодействиями, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 531–542

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:15:36

УДК 517.938.5

ЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

С. П. Горбиков

Для выделенного класса динамических систем с ударными взаимодействиями проведена классификация локальных (качественных) особенностей. Для первых четырех выделенных типов локальных особенностей описаны такие свойства качественной структуры, с помощью которых затем устанавливается топологическая эквивалентность соответствующих особенностей.

Библиография: 11 названий.

Введение. Изучение динамических систем с ударными взаимодействиями проводилось давно и во многих работах, однако построение качественной теории таких систем происходило разрозненно, несмотря на то, что качественная теория гладких динамических систем к настоящему времени довольно хорошо развита ([1]–[3] и др.) и для негладких динамических систем определенного вида качественная теория успешно развивается ([4] и др.).

Для динамических систем с ударными взаимодействиями при изучении локальных особенностей: в [5] для конкретной системы, а в [6] для неавтономной системы общего вида – описываются некоторые особенности качественной структуры фазового пространства в малой окрестности такой точки на поверхности $S = 0$ удара, в которой первая и вторая производные (в силу дифференциальных уравнений движения) уравнения этой поверхности равны 0, а третья производная положительна (движение системы происходит в области $S \geq 0$). В [7], [8] для динамических систем с ударными взаимодействиями общего вида изучается структура фазового пространства малых окрестностей точек, лежащих на многообразии удара.

В данной работе для выделенного класса динамических систем с ударными взаимодействиями классифицируются их локальные особенности. Для первых четырех выделенных типов локальных особенностей описаны такие свойства качественной структуры, с помощью которых затем устанавливается топологическая эквивалентность соответствующих особенностей. Тем самым, дается полное в смысле Андронова–Понтрягина описание указанных локальных особенностей.

1. Уравнения движения. Рассматривается следующий общий вид [8] динамической системы с ударными взаимодействиями. Мгновенное ударное взаимодействие происходит на гиперповерхности $x_n = 0$, по достижении которой фазовые переменные $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ меняются скачкообразно (переменная x_n остается равной 0) согласно

формулам

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= H_1(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \\ \bar{x}_i &= H_i(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \quad i = 2, \dots, n-1,\end{aligned}\quad (1)$$

а при $x_n > 0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \Phi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \Phi_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}\quad (2)$$

Фазовое пространство системы составляют точки $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$. В соотношениях (1) и (2) $(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, 0)$ и $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, 0)$ — соответственно доударные и послеударные значения переменных;

$$\begin{aligned}-1 \leq H_{11}(0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-) \leq 0, \quad H_{11}(x_1^-, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-) \leq 0, \\ \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Кроме того, функции H_{1j} и Φ_j , $j = 1, \dots, n-1$, Φ_{n1} , Φ_{nn} определены и являются гладкими класса C^m , $m \geq 3$, в малых окрестностях точек $(x_1^- \leq 0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-)$ и $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$ соответственно.

Рис. 1

Специфический вид уравнений (2) и условие (3) означают лишь, что

1) на гиперповерхности $x_n = 0$ согласно (2)

$$\dot{x}_n = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0); \quad (4)$$

2) в силу [9, с. 171] фазовые траектории системы (2) при $x_1 = 0$ касаются гиперповерхности $x_n = 0$, при возрастании времени t они выходят в область $x_n > 0$ из точек $(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 0)$, а при уменьшении t — из точек $(x_1 < 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$

(на рис. 1 сплошными линиями обозначены траектории системы (2), пунктирными линиями соединены точки и их образы при отображении (1)).

2. Классификация локальных особенностей. Далее изучается топологическая (качественная) структура динамической системы (1), (2) в малых окрестностях точек M^* в предположении, что M^* принадлежит гиперповерхности $x_n = 0$ (достаточно полное описание случая $M^* = (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^* > 0)$ известно из качественной теории гладких дифференциальных уравнений).

Кроме того, предполагается, что в точках многообразия $x_n = 0$ все функции $\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, не могут одновременно обращаться в 0.

Из определений, принятых в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [1]–[4]), видно, что все точки M^* многообразия $x_n = 0$ являются топологически особыми (локальными особенностями). Будем различать следующие типы локальных особенностей M^* динамической системы (1), (2):

1) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) < 0; \quad (5)$$

2) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n > 0; \quad (6)$$

3) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k} \Phi_k > 0; \quad (7)$$

4) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n < 0; \quad (8)$$

5) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad \dddot{x}_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k} \Phi_k \right) \Phi_j > 0;$$

6) в точке M^* выполняются условия

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad \dddot{x}_n < 0.$$

Типы 5), 6) локальных особенностей изучались ранее [5], [6], [8], однако исследование условий их топологической эквивалентности требует отдельного рассмотрения и здесь не проводится.

Более вырожденные случаи (когда в точке M^* первой отличной от 0 производной функции x_n является четвертая или еще более высокая) здесь также не рассматриваются.

3. Изучение локальных особенностей типов 1)–3).

ЛЕММА 1. Пусть в точке M^* выполняются условия (5). Тогда существует такая достаточно малая окрестность Ω этой точки в фазовом пространстве системы (1), (2), через любую точку которой при $x_n > 0$ проходит фазовая траектория, приводящая за достаточно малый промежуток времени фазовую точку на многообразие удара $x_n = 0$. В силу действующих затем ударных взаимодействий фазовая точка покидает выбранную малую окрестность Ω .

Для любых систем вида (1), (2) (при одном и том же значении n) локальные особенности вида (5) имеют малые окрестности в фазовом пространстве соответствующих систем, топологическая структура которых одинакова.

На рис. 1 особенности такого типа соответствует, например, точка N_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На гиперповерхности удара $x_n = 0$ можно выбрать такую достаточно малую окрестность $\Omega_0(M^*)$ точки M^* , во всех точках которой выполняются условия (5), а значит, и неравенство $x_1 < 0$ (в силу (4) и (3)). Поэтому

- а) в результате ударных взаимодействий все фазовые точки множества $\Omega_0(M^*)$ его покидают (в силу условия $H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) \leq 0$);
- б) при уменьшении времени t из точек множества $\Omega_0(M^*)$ выходят [9, с. 171] в область $x_n > 0$ фазовые траектории системы (2).

Осталось лишь выбрать достаточно малое время движения по этим траекториям и обозначить через Ω область, занимаемую этими траекториями.

В силу изложенного выше вторая часть леммы следует из доказательства теоремы 10 [2, с. 40–41] о выпрямляемых семействах. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть в точке M^* выполняются условия (6). Если отображение (1) имеет однозначное обратное отображение для любой точки $(\bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1})$, то

- 1) существует достаточно малая окрестность Ω точки M^* в фазовом пространстве системы (1), (2) такая, что в точки множества $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ фазовые точки попадают (в силу ударных взаимодействий) из точек множества $\dot{x}_n < 0, x_n = 0$, а из точек множества Ω_0 выходят в область $x_n > 0$ фазовые траектории системы (2), составляющие все множество Ω ;
- 2) для любых систем вида (1), (2) (при одном и том же значении n) локальные особенности вида (6) имеют достаточно малые окрестности в фазовом пространстве соответствующих систем, топологическая структура которых одинакова.

На рис. 1 особенности этого типа соответствует, например, точка N_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На гиперповерхности удара $x_n = 0$ можно выбрать достаточно малую окрестность $\Omega_0(M^*)$ точки M^* такую, что во всех точках окрестности выполняются условия (6), а значит, и неравенство $x_1 > 0$ (в силу (4) и (3)). Тогда

- а) в силу существования обратного отображения для (1) и неравенства $H_{11} \leq 0$, в точки окрестности $\Omega_0(M^*)$ фазовые точки попадают (в результате ударных взаимодействий) из точек $(x_1^-, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-, 0)$, где $\dot{x}_n < 0$;
- б) при увеличении времени t из точек множества $\Omega_0(M^*)$ выходят [9, с. 171] в область $x_n > 0$ фазовые траектории системы дифференциальных уравнений (2).

Осталось выбрать достаточно малое время движения по этим траекториям и обозначить через Ω область, занимаемую этими траекториями.

Справедливость второй части леммы 2 следует из доказательства теоремы 10 [2, с. 40–41] о выпрямляемых семействах. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть в точке M^* выполняются условия (7). Тогда существует такая достаточно малая окрестность Ω точки M^* в фазовом пространстве системы (1), (2), которая множеством траекторий системы (2), выходящих при увеличении и уменьшении t из точек множества $x_n = 0, \dot{x}_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$, разбивается на две части: фазовые траектории из первой части проходят в области Ω , не пересекая гиперповерхность удара, а фазовые траектории из второй части представляют собой участки фазовых траекторий системы (2), которые приводят фазовые точки на гиперповерхность удара при $\dot{x}_n < 0, x_n = 0$, затем в силу ударных взаимодействий (1) фазовые точки переходят в точки множества $x_n = 0, \dot{x}_n \geq 0$, после чего фазовые точки выходят в область $x_n > 0$ по траекториям системы (2).

Любые локальные особенности $M^*(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, 0)$ вида (7) систем (1), (2) (при одном и том же значении n и $H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) < 0$) имеют достаточно малые окрестности в фазовом пространстве соответствующих систем, топологическая структура которых одинакова.

На рис. 1 особенности такого типа соответствует, например, точка N_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На гиперповерхности удара $x_n = 0$ можно выбрать малую окрестность $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(M^*)$ изучаемой точки M^* такую, что

- 1) множество $\tilde{\Omega}$ замкнуто;
- 2) в точках множества $\Omega_0^-(M^*) = \tilde{\Omega} \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0, x_1 < 0\}$ справедливо неравенство $\dot{x}_n < 0$, а в точках множества $\Omega_0^0(M^*) = \tilde{\Omega} \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0, x_1 = 0\}$ выполняются условия $\dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n > 0$.

В силу ударных взаимодействий (1) фазовые точки множества Ω_0^- переходят в точки некоторого множества Ω_0^+ , где выполнены условия (6) или (7).

Пусть замкнутое множество $\Omega_1(M^*)$ – часть гиперплоскости $x_1 = 0$, лежащая в достаточно малой окрестности точки M^* в фазовом пространстве системы (1), (2), такая, что

- 1) $\Omega_0^0 = \Omega_1 \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$;
- 2) в точках множества Ω_1 имеет место неравенство $\dot{x}_1 > 0$, которое при $x_1 = 0, x_n = 0$ эквивалентно выполнению неравенства $\ddot{x}_n > 0$, так как в силу (2)

$$\ddot{x}_n|_{x_1=0, x_n=0} = \dot{x}_1|_{x_1=0, x_n=0} \cdot \Phi_{n1}|_{x_1=0, x_n=0}. \quad (9)$$

Согласно [9, с. 171] из точек множества Ω_0^- при уменьшении времени t , а из точек множества Ω_0^+ при увеличении t выходят в область $x_n > 0$ фазовые траектории системы (2); из точек множества Ω_0^0 выходят фазовые траектории системы (2), которые касаются гиперповерхности $x_n = 0$ и выходят в область $x_n > 0$ как при уменьшении, так и при увеличении t ; из точек множества Ω_1 выходят фазовые траектории системы (2), при увеличении t уходящие в область $x_1 > 0$, а при уменьшении t – в область $x_1 < 0$, пересечь гиперповерхность удара $x_n = 0$, находясь в малой окрестности точки M^* , эти траектории не могут (в силу единственности решений системы (2)).

Выбирая достаточно малое время Θ движения как в положительном, так и в отрицательном направлении по указанным траекториям системы (2), выходящим из точек множеств $\Omega_0^-, \Omega_0^0, \Omega_0^+, \Omega_1$, обозначая через $\Omega(M^*, \Theta)$ область, занимаемую этими траекториями, можно завершить доказательство первой части леммы.

Для доказательства второй части леммы (о топологической эквивалентности) можно рассмотреть две точки M^* и N^* каких-либо двух систем вида (1), (2), координаты которых удовлетворяют условиям (7), и построить, как выше, окрестности $\Omega(M^*, \Theta)$ и $\Omega(N^*, \Theta_1)$. Следуя [4, с. 203], сначала можно построить

- 1) топологическое (т.е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное) отображение $N = \varphi(M)$ объединения $\Omega_0^-(M^*) \cup \Omega_0^0(M^*)$ на множество $\Omega_0^-(N^*) \cup \Omega_0^0(N^*)$, так чтобы $N^* = \varphi(M^*)$;
- 2) продолжить отображение φ как топологическое на множество $\Omega_1(M^*)$, так чтобы $\varphi(\Omega_1(M^*)) = \Omega_1(N^*)$.

Затем, обозначая через G_{M^*} (соответственно G_{N^*}) отображение (1) для системы, имеющей особенность M^* (соответственно N^*), можно доопределить отображение φ на множестве $\Omega_0^+(M^*)$ следующим образом: если $M \in \Omega_0^+(M^*)$, то $\varphi(M) = N = G_{N^*}(\varphi(G_{M^*}^{-1}(M))) \in \Omega_0^+(N^*)$. Так доопределенное отображение φ является топологическим на множестве $\Omega_0^+(M^*)$, поскольку таковыми на соответствующих множествах являются отображения $\varphi, G_{M^*}^{-1}, G_{N^*}$. Отображение G_{M^*} (соответственно G_{N^*}) является топологическим, так как в силу условия $H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) \neq 0$ оно имеет однозначное и гладкое обратное отображение по теореме о неявной функции [10, с. 294].

Теперь можно доопределить отображение φ во всех точках окрестностей $\Omega(M^*, \Theta)$ и $\Omega(N^*, \Theta_1)$, сопоставив фазовые траектории соответствующих систем (2):

$$b = \varphi(a), \quad a = \psi_{M^*}(t, M) \in \Omega(M^*, \Theta), \quad b = \psi_{N^*}(\Theta_1 \Theta^{-1}t, N) \in \Omega(N^*, \Theta_1),$$

где $\psi_{M^*}(t, M)$ и $\psi_{N^*}(t, N)$ – общее решение соответствующих систем (2) с начальными условиями $M = \psi_{M^*}(t = 0, M)$ и $N = \psi_{N^*}(t = 0, N)$; $N = \varphi(M)$, а точки M и N принадлежат соответственно множествам $\Omega_0^-(M^*)$ и $\Omega_0^-(N^*)$, $\Omega_0^0(M^*)$ и $\Omega_0^0(N^*)$, $\Omega_0^+(M^*)$ и $\Omega_0^+(N^*)$, $\Omega_1(M^*)$ и $\Omega_1(N^*)$; переменная t принимает значения из интервала $[-\Theta, 0]$, если $M \in \Omega_0^-(M^*)$, из интервала $[0, \Theta]$, если $M \in \Omega_0^0(M^*)$, из интервала $[-\Theta, \Theta]$, если $M \in \Omega_1(M^*)$, $\Omega_0^0(M^*)$.

Отображение φ – гомеоморфизм в силу единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений. Кроме того, φ переводит фазовые траектории окрестности $\Omega(M^*, \Theta)$ в фазовые траектории окрестности $\Omega(N^*, \Theta_1)$. Лемма доказана.

4. Изучение локальной особенности типа 4). На рис. 1 особенности типа 4) соответствует, например, точка M^* .

В силу (4) равенство $\dot{x}_n = 0$ при выполнении $x_n = 0$ эквивалентно равенству $x_1 = 0$, поэтому изучение поведения фазовых траекторий системы (1), (2) в окрестности точки M^* может быть проведено с помощью следующего отображения T многообразия $x_n = 0, x_1 \geq 0$ в себя [7]: $T = T_2 T_1$, где отображение T_1 множества $x_1 \geq 0, x_n = 0$ на множество $x_1 \leq 0, x_n = 0$ осуществляется траекториями системы (2), а отображение T_2 множества $x_1 \leq 0, x_n = 0$ на множество $x_1 \geq 0, x_n = 0$ происходит в соответствии с формулами (1) ударных взаимодействий.

Отображение T_1 , а значит и отображение T , заведомо существует в соответствующей части достаточно малой окрестности точек многообразия Γ . Здесь через Γ обозначается многообразие локальных особенностей типа 4).

В достаточно малой окрестности Ω точки $M^* = (x_1^* = 0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^* = 0)$ на многообразии $x_n = 0, x_1 \geq 0$ отображение T можно записать [7] в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= Rx_1 + x_1\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}) = g_1, \\ \bar{x}_i &= x_i + x_1(c_i + \varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1})) = g_i, \quad i = 2, \dots, n-1,\end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}R &= -H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*), \\ c_i &= -b_i - 2a_i a_1^{-1}, \quad b_i = H_{1i}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*), \quad a_j = \Phi_j(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, 0), \\ \varphi_j(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) &= 0, \quad \varphi_j \in C^{m-1}(\bar{\Omega}(M^*)), \quad j = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

В силу (3), (8) и (9) в точке M^* выполняется $\dot{x}_n = \Phi_1 \Phi_{n1} < 0$ и $a_1 < 0$.

Кроме того, справедливы [7] следующие лемма и теорема.

ЛЕММА 4. *Для любой точки M^* многообразия Γ можно указать при $0 < R < 1$ такую достаточно малую окрестность на многообразии $x_n = 0$, из каждой точки которой при $x_1 > 0$ выходит фазовая траектория, соответствующая бесконечноударному движению. Это движение оканчивается в некоторой точке многообразия Γ .*

Под *бесконечноударным движением*, здесь и далее, понимается движение с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время [11]. Траектория бесконечноударного движения, выходящая при $x_n = 0$ из точки $M(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1})$ и оканчивающаяся в точке M_∞ , оставляет на многообразии $x_n = 0$ “след” (рис. 1) в виде бесконечного числа точек

$$M_j = T^j(M), \quad j = 1, 2, \dots.\tag{11}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть величина $R, 0 \leq R < 1$, определена формулами (10) и $M^* = (0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, 0) \in \Gamma$. Тогда для любой точки M из достаточно малой окрестности M^* на многообразии $x_1 > 0, x_n = 0$ все точки (11) лежат на проходящей через M интегральной кривой системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dx_1} = f_i(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = 2, \dots, n-1,\tag{12}$$

где f_i – определенные при $x_1 \geq 0$ функции класса C^{m-2} , $f_i = c_i(R-1)^{-1} + \tilde{f}_i$, $\tilde{f}_i(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) = 0, i = 2, \dots, n-1$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых систем вида (1), (2) (при одном и том же значении n) локальные особенности $M^*(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, 0)$ типа 4) имеют достаточно малые окрестности в фазовом пространстве соответствующих систем, топологическая структура которых одинакова, если только в точке M^* имеет место*

$$-1 < H_{11}(0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наряду с (1), (2) задана система того же вида, т.е. определяемая при $y_n = 0$ соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= y_1^- \tilde{H}_{11}(y_1^-, \dots, y_{n-1}^-) = \tilde{H}_1, \\ \bar{y}_i &= y_i^- + y_1^- \tilde{H}_{1i}(y_1^-, \dots, y_{n-1}^-) = \tilde{H}_i, \quad i = 2, \dots, n-1,\end{aligned}\quad (13)$$

а при $y_n > 0$ уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= \tilde{\Phi}_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{y}_n &= \tilde{\Phi}_n(y_1, \dots, y_n) = \tilde{\Phi}_{n1}(y_1, \dots, y_n)y_1 + y_n \tilde{\Phi}_{nn}(y_1, \dots, y_n),\end{aligned}\quad (14)$$

где соответствующие функции удовлетворяют условиям п. 1. Пусть $M^* = (x_1^* = 0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^* = 0)$ и $N^* = (0, y_2^*, \dots, y_{n-1}^*, 0)$ – любые две точки типа 4) систем (1), (2) и (13), (14) соответственно.

В силу теоремы 1 точки M^* и N^* имеют такие малые окрестности $D_{r_1} = D_{r_1}(M^*)$ и $D_{r_2} = D_{r_2}(N^*)$ соответственно на многообразиях $x_n = 0, x_1 \geq 0$ и $y_n = 0, y_1 \geq 0$, где $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ обозначают наибольший диаметр соответствующих окрестностей, в которых бесконечноударные движения системы (1), (2) описываются уравнениями (12), а системы (13), (14) – уравнениями

$$\frac{dy_i}{dy_1} = \tilde{f}_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

Рис. 2

Поскольку эти дифференциальные уравнения являются гладкими, можно выбрать определяемые ниже величины x_1^0 и y_1^0 настолько малыми, что (рис. 2)

- 1) из точек множеств $D_{r_1}^0$ и $D_{r_2}^0$, которые являются частями множеств $x_1 = x_1^0 > 0$ и $y_1 = y_1^0 > 0$ на гиперповерхностях $x_n = 0$ и $y_n = 0$, лежащих внутри множеств D_{r_1} и D_{r_2} и гомеоморфных шару размерности $n-2$, выходят фазовые траектории

- указанных дифференциальных уравнений, целиком лежащие при $0 \leq x_1 \leq x_1^0$ и $0 \leq y_1 \leq y_1^0$ в областях D_{r_1} и D_{r_2} ;
- 2) траектория дифференциальных уравнений (12) либо (15), которая проходит через точку M^* либо N^* , пересекает множество $D_{r_1}^0$ либо $D_{r_2}^0$ во внутренней точке M^0 либо N^0 этого множества;
- 3) точка M^0 либо N^0 при гомеоморфизме множества $D_{r_1}^0$ либо $D_{r_2}^0$ на шар размерности $n - 2$ соответствует центру шара.

Пусть теперь $D(M^*)$ либо $D(N^*)$ есть область на гиперплоскости $x_n = 0$ либо $y_n = 0$, которую заполняют при $0 \leq x_1 \leq x_1^0$ либо при $0 \leq y_1 \leq y_1^0$ траектории дифференциальных уравнений (12) либо (15), проходящие через точки множества $D_{r_1}^0$ либо $D_{r_2}^0$ (на рис. 2 траектории дифференциальных уравнений (12) выделены жирными линиями).

Пусть $\tilde{T}$ – отображение, определяемое соотношениями (10), но для системы (13), (14), в точках множества $D_{r_2}(N^*)$. Точки образа $T(D_{r_1}^0)$ либо $\tilde{T}(D_{r_2}^0)$ множества $D_{r_1}^0$ либо $D_{r_2}^0$ при отображении T либо $\tilde{T}$ принадлежат для достаточно малых r_1 либо r_2 пересечению множеств $D(M^*)$ и $x_1 < x_1^0$ соответственно $D(N^*)$ и $y_1 < y_1^0$, поскольку справедливо неравенство

$$\bar{x}_1 \leq (R + q)x_1, \quad q > 0, \quad R + q < 1, \quad (16)$$

вытекающее из (10).

Пусть $D_1^0(M^*)$ – замкнутое множество, которое заполнено траекториями дифференциальных уравнений (12), заключенными между множествами $T(D_{r_1}^0)$ и $D_{r_1}^0$. Соответственно, пусть $D_2^0(N^*)$ – замкнутое множество, которое заполнено траекториями дифференциальных уравнений (15), заключенными между множествами $T(D_{r_2}^0)$ и $D_{r_2}^0$. Пусть G – топологическое отображение множества $D_{r_1}^0$ на $D_{r_2}^0$, при котором $N^0 = G(M^0)$ (G существует в силу выбора величин x_1^0, y_1^0 и множеств $D_{r_1}^0, D_{r_2}^0$); $\varphi(x_1, M)$ – общее решение системы (12) с начальными условиями $M = \varphi(x_1^0, M)$; $\psi(y_1, N)$ – общее решение системы (15) с начальными условиями $N = \psi(y_1^0, N)$. Тогда, определяя отображение G на всем множестве $D_1^0(M^*)$ как

$$G(\varphi(x_1, M)) = \psi(y_1^0 - (x_1^0 - x_1)(y_1^0 - \tilde{y}_1(N))(x_1^0 - \tilde{x}_1(M))^{-1}, N),$$

где $0 < \tilde{x}_1(M) \leq x_1 \leq x_1^0$, $0 < \tilde{y}_1(N) \leq y_1 \leq y_1^0$, $N = G(M)$, $M \in D_{r_1}^0$, $N \in D_{r_2}^0$, $\varphi(\tilde{x}_1(M), M) \in T(D_{r_1}^0)$, $\psi(\tilde{y}_1(N), N) \in \tilde{T}(D_{r_2}^0)$, можно получить топологическое отображение $D_1^0(M^*)$ на $D_2^0(N^*)$ (в силу единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решения системы дифференциальных уравнений).

Теперь можно ввести на множестве $D(M^*)$ отображение G_T

$$G_T(T^p(M)) = \tilde{T}^p(N), \quad p = 0, 1, \dots,$$

где $M \in D_1^0(M^*)$, $N \in D_2^0(N^*)$, $N = G(M)$. Отображение G_T обладает следующими свойствами.

Свойство 1. *Отображение G_T может быть определено для любой точки множества $D(M^*)$ как переводящее все множество $D(M^*)$ на $D(N^*)$.*

Действительно,

$$T(D(M^*)) = (D(M^*) \setminus D_1^0) \cup T(D_{r_1}^0), \quad \tilde{T}(D(N^*)) = (D(N^*) \setminus D_2^0) \cup \tilde{T}(D_{r_2}^0),$$

так как отображения T при достаточно малом r_1 и $\tilde{T}$ при достаточно малом r_2 взаимно однозначны и взаимно непрерывны в силу (10); множества $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ при соответствующих отображениях T и $\tilde{T}$ переходят сами в себя; $T(D_{r_1}^0) \subset (D(M^*) \setminus D_{r_1}^0)$ и $\tilde{T}(D_{r_2}^0) \subset (D(N^*) \setminus D_{r_2}^0)$. Поэтому $T^2(D_{r_1}^0) \subset (D(M^*) \setminus D_{r_1}^0)$ и $\tilde{T}^2(D_{r_2}^0) \subset (D(N^*) \setminus D_{r_2}^0)$. Отсюда $T(D_1^0) = D_1^1$ и $\tilde{T}(D_2^0) = D_2^1$ – замкнутые множества, заполненные траекториями дифференциальных уравнений (12) и (15) соответственно, заключенными между множествами $T(D_{r_1}^0)$ и $T^2(D_{r_1}^0)$ соответственно $\tilde{T}(D_{r_2}^0)$ и $\tilde{T}^2(D_{r_2}^0)$. При этом $D_1^1 \cap D_1^0 = T(D_{r_1}^0)$ соответственно $D_2^1 \cap D_2^0 = \tilde{T}(D_{r_2}^0)$ (рис. 2).

По индукции с помощью аналогичных рассуждений можно установить, что для любого целого $p > 0$ $T^p(D_1^0) = D_1^p$ и $\tilde{T}^p(D_2^0) = D_2^p$ – замкнутые множества, заполненные траекториями дифференциальных уравнений (12) и (15) соответственно, заключенными между множествами $T^p(D_{r_1}^0)$ и $T^{p+1}(D_{r_1}^0)$ соответственно $\tilde{T}^p(D_{r_2}^0)$ и $\tilde{T}^{p+1}(D_{r_2}^0)$. При этом

$$T^{p+1}(D_{r_1}^0) \subset \left(D(M^*) \setminus \bigcup_{k=0}^{p-1} D_1^k \right), \quad D_1^p \cap D_1^{p-1} = T^p(D_{r_1}^0),$$

$$\tilde{T}^{p+1}(D_{r_2}^0) \subset \left(D(N^*) \setminus \bigcup_{k=0}^{p-1} D_2^k \right), \quad D_2^p \cap D_2^{p-1} = \tilde{T}^p(D_{r_2}^0).$$

Отсюда в силу (16) для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует k такое, что при всяком целом $p \geq k$ любая точка $P \in D_1^p$ принадлежит множеству $\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid 0 < x_1 \leq \varepsilon\} \cap D(M^*)$, а любая точка $\tilde{P} \in D_2^p$ принадлежит множеству $\{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid 0 < y_1 \leq \varepsilon\} \cap D(N^*)$.

Поэтому

- а) для любой точки $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 > 0\}$ либо $N \in D(N^*) \cap \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 > 0\}$ и $M \notin T^k(D_{r_1}^0)$ либо $N \notin \tilde{T}^k(D_{r_2}^0)$ при всех $k = 0, 1, \dots$, существуют единственные целое $p \geq 0$ и точка $M_p \in D_1^p$ либо $N_p \in D_2^p$ такие, что $M_p = T^{-p}(M)$ либо $N_p = \tilde{T}^{-p}(N)$;
- б) если же при каком-то целом $k \geq 0$ $M \in T^k(D_{r_1}^0)$ либо $N \in \tilde{T}^k(D_{r_2}^0)$, то существует единственная точка $M_k \in D_{r_1}^0$ либо $N_k \in D_{r_2}^0$ такая, что $M_k = T^{-k}(M)$ либо $N_k = \tilde{T}^{-k}(N)$.

Итак, для любой точки $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 > 0\}$ определено отображение G_T , которое имеет вид

$$G_T(M) = \tilde{T}^p G T^{-p}(M), \quad (17)$$

где p – целое число ($p \geq 0$) такое, что $T^{-p}(M) \in D_1^0 \setminus T(D_{r_1}^0)$.

Если $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 = 0\}$, то существует и единственная по построению множества $D(M^*)$ точка $M_\infty^0 \in D_{r_1}^0$ такая, что $\lim_{p \rightarrow +\infty} T^p(M_\infty^0) = M$, и можно положить

$$G_T(M) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{T}^k(G(M_\infty^0)), \quad (18)$$

где точка $N_\infty^0 = G(M_\infty^0) \in D_{r_2}^0$, а предел в (18) существует в силу построения множества $D(N^*)$.

Тем самым, из (17) и (18) следует справедливость свойства 1 и следующего свойства.

СВОЙСТВО 2. *Отображение G_T переводит траектории $M, T(M), T^2(M), \dots, M \in D(M^*)$, отображения T в траектории $N, \tilde{T}(N), \tilde{T}^2(N), \dots, N \in D(N^*)$, отображения T (при $N = G_T(M)$).*

СВОЙСТВО 3. *Отображение G_T взаимно однозначно (по определению) и является взаимно непрерывным.*

Действительно, если $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 > 0\}$ и $M \notin T^k(D_{r_1}^0)$ при $k = 0, 1, \dots$, то G_T взаимно непрерывно в точке M в силу (17).

Если $M \in T^k(D_{r_1}^0)$ при некотором целом $k > 0$, то достаточно малая окрестность $\Omega(M)$ точки M имеет вид $\Omega = \Omega(M) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \Omega \cap D_1^{k-1}$, $\Omega_2 = \Omega \cap D_1^k$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_{12} \subset T^k(D_{r_1}^0)$. Согласно (17) $G_T(\Omega) = \tilde{T}^{k-1}GT^{1-k}(\Omega_1) \cup \tilde{T}^kGT^{-k}(\Omega_2)$, при этом $\tilde{T}^{k-1}GT^{1-k}(\Omega_1) \cap \tilde{T}^kGT^{-k}(\Omega_2) = \tilde{T}^kGT^{-k}(\Omega_{12}) = \tilde{\Omega}_{12} \subset \tilde{T}^k(D_{r_2}^0)$ и $N = G_T(M) \in \tilde{\Omega}_{12}$. Поэтому в силу гомеоморфности отображений $T, \tilde{T}, G$ достаточно малая окрестность $\Omega(M)$ перейдет при отображении G_T в любую заданную малую окрестность $\Omega(N)$ точки N . Аналогичные рассуждения доказывают непрерывность G_T^{-1} в точке N .

Если $M \in T^0(D_{r_1}^0) = D_{r_1}^0$, то свойство 3 справедливо, так как при $M \in D_1^0$ отображения G и G_T совпадают.

Если $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 = 0\}$, то ее достаточно малая окрестность $\Omega(M)$ в области определения $D(M^*)$ отображения G_T содержится во множестве $\Omega_p = D(M^*) \setminus \bigcup_{k=0}^p D_1^k$ при достаточно большом числе $p > 0$ (см. обоснование свойства 1). Кроме того, все точки множества D_1^0 , которые при итерациях отображения T переходят в точки множества $\Omega(M)$, находятся на траекториях дифференциальных уравнений (12), лежащих (в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий) в малой окрестности траектории (12), соединяющей точку M и соответствующую точку $M_\infty^0 \in D_{r_1}^0$. Поэтому можно всегда найти достаточно большое $p > 0$ и достаточно малую окрестность $\Omega(M) \subset \Omega_p$ такие, что в силу (16) $G_T(\Omega(M)) \subset D(N^*) \cap \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 < \varepsilon\}$, где ε – любое сколь угодно малое число ($\varepsilon > 0$), и множество $G_T(\Omega)$ лежит в сколь угодно малой окрестности фазовой траектории дифференциальных уравнений (15), проходящей через точки $N = G_T(M)$ и $N_\infty^0 = G_T(M_\infty^0) \in D_{r_2}^0$.

Последнее означает, что отображение G_T является непрерывным в точке $M \in D(M^*) \cap \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_1 = 0\}$. Аналогично доказывается непрерывность обратного отображения G_T^{-1} в точке $N = G_T(M) \in D(N^*) \cap \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 = 0\}$.

Справедливость свойств 1–3 отображения G_T доказывает топологическую эквивалентность окрестностей $D(M^*)$ и $D(N^*)$ при действии отображений T и $\tilde{T}$. При этом $G_T(M^*) = N^*$ по определению отображения G_T .

Пусть $E(M^*)$ – окрестность точки M^* в фазовом пространстве системы (1), (2), которую заполняют участки траекторий системы (2), выходящие из точек множества $D(M^*)$ и пересекающие гиперповерхность удара $x_n = 0$; $x_i = \varphi_i(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – общее решение системы (2) с начальными условиями $x_i^0 = \varphi_i(0, x_1^0, \dots, x_n^0)$, $i = 1, \dots, n$. Соответственно, пусть $E(N^*)$ – окрестность точки N^* в фазовом пространстве системы (13), (14), которую заполняют участки траекторий системы (14), выходящие из точек множества $D(N^*)$ и пересекающие гиперповерхность удара $y_n = 0$; $y_i = \psi_i(t, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ – общее решение системы (14) с начальными условиями $y_i^0 = \psi_i(0, y_1^0, \dots, y_n^0)$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда можно задать отображение G_0 окрестности $E(M^*)$ на $E(N^*)$:

$$G_0(M) = (\psi_1(|\tau|\tilde{\theta}\theta^{-1}, y_1^N, \dots, y_{n-1}^N, 0), \dots, \psi_n(|\tau|\tilde{\theta}\theta^{-1}, y_1^N, \dots, y_{n-1}^N, 0)),$$

где $M = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in E(M^*)$, $(y_1^N, \dots, y_{n-1}^N) = G_T(M_{-1})$; $M_{-1} = (\varphi_1(\tau, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(\tau, x_1, \dots, x_n)) = (x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-(n-1)})$; τ – ближайший к 0 неположительный корень уравнения $\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0$; θ – ближайший к 0 положительный корень уравнения $\varphi_n(t, x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-(n-1)}, 0) = 0$; $\tilde{\theta}$ – ближайший к 0 положительный корень уравнения $\psi_n(t, y_1^N, \dots, y_{n-1}^N, 0) = 0$.

В силу единственности и непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных условий и того, что G_T – гомеоморфизм, величины $\tau, \theta, \tilde{\theta}$ существуют, единственны и являются непрерывными функциями, причем $\tau \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$, $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ при $M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, p_2^*, \dots, p_{n-1}^*, 0) \in E(M^*) \cap \Gamma$. Следовательно, отображение G_0 , переводящее $E(M^*)$ в $E(N^*)$, является гомеоморфизмом, а по построению G_0 переводит траектории системы (1), (2) в траектории системы (13), (14). Последнее означает топологическую эквивалентность качественной структуры окрестностей $E(M^*)$ и $E(N^*)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [3] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [4] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [5] Денисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Сандалов В. М., Цветков Ю. В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1973. № 4. С. 7–13.
- [6] Федосенко Ю. С. О структуре фазового пространства и периодических движениях неавтономных динамических систем с ударными взаимодействиями // ПММ. 1976. Т. 40. № 4. С. 618–629.
- [7] Горбиков С. П., Неймарк Ю. И. Вспомогательные скользящие движения динамических систем с ударными взаимодействиями // Дифференц. и интегральные уравнения. Межвузовский сб. Горький: ГГУ, 1981. С. 59–64.
- [8] Горбиков С. П. Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1987. № 3. С. 23–26.
- [9] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
- [10] Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
- [11] Нагаев Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Поступило
26.09.95
Исправленный вариант
28.01.98