Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, А. С. Маношина, Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 688–700

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:16:24

УДК 517.97

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТУРАНА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. В. Горбачев, А. С. Маношина

Рассмотрена экстремальная задача Турана о наибольшем среднем значении 1-периодической четной функции с неотрицательными коэффициентами Фурье, фиксированным значением в нуле и носителем на отрезке $[-h, h]$, $0 < h \leq 1/2$. Показано, как решение этой экстремальной задачи для рациональных чисел $h = p/q$ связано с решением двух конечномерных задач линейного программирования. Найдено решение задачи Турана для рациональных чисел h вида $2/q$, $3/q$, $4/q$, $p/(2p+1)$. Приведены приложения задачи Турана в аналитической теории чисел.

Библиография: 8 названий.

Часть результатов данной статьи была опубликована в работах [1], [2] и анонсирована в [3]. Обозначим $c(t) = \cos(2\pi t)$, $s(t) = \sin(2\pi t)$.

1. Задача Турана. Пусть $0 < h \leq 1/2$ и $K(h)$ – класс непрерывных 1-периодических четных функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c(nx), \quad (1)$$

$$a_n \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1, \quad (3)$$

$$f(x) = 0, \quad h \leq |x| \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Классы $K(h)$ для произвольного h непусты. Например, 1-периодическая функция $\varphi_h(x) = \max\{1 - h^{-1}|x|, 0\}$ ($|x| \leq 1/2$), имеющая разложение в ряд Фурье [4]

$$\varphi_h(x) = h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s(nh/2)}{\pi nh} \right)^2 c(nx),$$

очевидно, принадлежит к классу $K(h)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00647, и гранта “Мас”, грант № 03-01-06199.

Рассмотрим задачу об оценке величины

$$A(h) = \sup_{f \in K(h)} a_0 = \sup_{f \in K(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

Эта экстремальная задача для периодических функций с малым носителем была поставлена в 1970 году П. Тураном в связи с приложениями к теории чисел.

Для $h = 1/q$, где $q = 2, 3, \dots$, в 1972 году С. Б. Стечкин [4] доказал, что $A(1/q) = 1/q$ и экстремальной функцией является функция $\varphi_{1/q}(x)$. Из этого результата Стечкин выводит, что $A(h) = h + O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$ и асимптотически экстремальной функцией является $\varphi_h(x)$.

А. Ю. Попов (устное сообщение) показал, что для $h \neq 1/q$ величина $A(h)$ строго больше, чем h . Кроме того, он предположил, что при $h \rightarrow 0$ справедлива более сильная асимптотика $A(h) = h + O(h^3)$.

ТЕОРЕМА 1 [5]. *При $h \rightarrow 0$ $A(h) = h + O(h^3)$ константа в O не превосходит 16.*

Из следствия 1 (см. далее) вытекает, что заменить O -большое на o -малое в теореме 1 нельзя.

В продолжении результата Стечкина представляет интерес вычислить величину $A(h)$ для произвольных рациональных чисел h вида p/q , где p/q — несократимая дробь.

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$ и $p \leq q/2$. Рассмотрим две задачи линейного программирования.

ЗАДАЧА 1. Найти

$$S_1(p, q) = \max_s s_0$$

при условиях

$$\sum_{r=0}^{q-1} s_r = 1, \quad \sum_{r=0}^{q-1} s_r c\left(\frac{rk}{q}\right) = 0, \quad k = p, \dots, q-p, \quad s_r \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1. \quad (5)$$

ЗАДАЧА 2. Найти

$$S_2(p, q) = \frac{1}{q} \max_b \alpha(0)$$

при условиях

$$\alpha(r) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c\left(\frac{rk}{q}\right) \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1. \quad (6)$$

Ограничения задачи линейного программирования 1 определяют в пространстве векторов $s = (s_0, s_1, \dots, s_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ непустой ограниченный многогранник. Следовательно, решение задачи 1 существует и достигается на некотором экстремальном векторе $s^* \in \mathbb{R}^q$. Из леммы 3 будет следовать, что решение задачи 2 также существует и достигается на некотором экстремальном векторе $b^* \in \mathbb{R}^{p-1}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$. Тогда

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = S_1(p, q) = S_2(p, q).$$

Экстремальной функцией $\varphi_{p,q}(x)$ является 1-периодическая кусочно-линейная функция с вершинами в точках $(\pm k/q, b_k^*)$, $k = 0, \dots, p$, $b_0^* = 1$, $b_p^* = 0$, и равная

$$\varphi_{p,q}(x) = \begin{cases} b_k^* + (b_k^* - b_{k+1}^*)(k - q|x|), & \frac{k}{q} \leq |x| < \frac{k+1}{q}, \\ 0, & \frac{p}{q} \leq |x| < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь b_k^* , $k = 1, \dots, p-1$, — координаты экстремального вектора задачи линейного программирования 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ТЕОРЕМЫ ВЫТЕКАЕТ ИЗ ЛЕММ 1–3.

ЛЕММА 1. Имеет место оценка $A(p/q) \leq S_1(p, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную функцию $f \in K(p/q)$. Для нее выполняются соотношения.

1. Из (4) следует, что $f(k/q) = 0$, $k = p, \dots, q-p$. Подставляя сюда разложение функции f в ряд Фурье (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c\left(\frac{nk}{q}\right) = 0, \quad k = p, \dots, q-p. \quad (8)$$

Представим номер $n = qn_0 + r$, где $n_0 = 0, 1, 2, \dots$, $r = 0, \dots, q-1$. Тогда

$$c\left(\frac{nk}{q}\right) = c\left(\frac{rk}{q}\right)$$

и равенство (8) запишется так:

$$\sum_{r=0}^{q-1} s_r c\left(\frac{rk}{q}\right) = 0, \quad k = p, \dots, q-p, \quad (9)$$

где обозначено

$$s_r = \sum_{n_0=0}^{\infty} a_{qn_0+r}.$$

Из (2) вытекает, что

$$s_r \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1. \quad (10)$$

2. В силу (3)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{n_0=0}^{\infty} a_{qn_0+r}.$$

Поэтому

$$\sum_{r=0}^{q-1} s_r = 1. \quad (11)$$

3. Из (2) вытекает очевидная оценка $a_0 \leq s_0$.

Видим, что соотношения (9)–(11) есть условия задачи 1. Следовательно, справедлива оценка $s_0 \leq S_1(p, q)$. Отсюда и из соотношения 3 в силу произвольности функции f вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Справедлива оценка $A(p/q) \geq S_2(p, q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В классе функций $K(p/q)$ рассмотрим подмножество $K_0(p/q)$ кусочно-линейных функций с вершинами в точках с координатами $(\pm k/q, b_k)$, $k = 0, \dots, p$, $b_0 = 1$, $b_p = 0$.

Любая такая функция записывается в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_k + (b_k - b_{k+1})(k - q|x|), & \frac{k}{q} \leq |x| < \frac{k+1}{q}, \\ 0, & \frac{p}{q} \leq |x| < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

и имеет разложение в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c(nx),$$

где, как показывают несложные расчеты,

$$\alpha_0 = \frac{1}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k \right), \quad \alpha_n = 2q \left(\frac{s(n/(2q))}{\pi n} \right)^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c \left(\frac{nk}{q} \right) \right).$$

Для того, чтобы функция $\varphi(x)$ принадлежала $K_0(p/q) \subset K(p/q)$, необходимо, чтобы $\alpha_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это будет выполнено, если

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c \left(\frac{nk}{q} \right) \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \iff 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c \left(\frac{rk}{q} \right) \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1.$$

Подмножество $K_0(p/q)$ непусто. В частности, оно содержит функцию $\varphi_{p/q}(x)$. Будем искать среди всех функций $\varphi \in K_0(p/q)$ функцию с наибольшим α_0 . Для этого необходимо решить задачу

$$\alpha_0 = \frac{1}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k \right) = \frac{1}{q} \alpha(0) \rightarrow \max_b,$$

$$\alpha(r) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c \left(\frac{rk}{q} \right) \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1,$$

а это есть задача линейного программирования 2.

Пусть b_k^* , $k = 1, \dots, p-1$, — координаты экстремального вектора задачи 2. Обозначим через $\varphi_{p,q}(x) \in K_0(p/q)$ функцию, построенную по числам b_k^* в соответствии с формулой (12). У нее среднее значение в точности равно $S_2(p, q)$. Так как $\varphi_{p,q} \in K(p/q)$, то $A(p/q) \geq S_2(p, q)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство $S_1(p, q) = S_2(p, q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тригонометрическую сумму из задачи 1

$$b_k = \sum_{r=0}^{q-1} s_r c\left(\frac{rk}{q}\right), \quad k = 0, \dots, q-1, \quad b_0 = 1, \quad b_p = b_{p+1} = \dots = b_{q-p} = 0. \quad (13)$$

Применяя обратное дискретное косинус-преобразование Фурье [6], находим, что

$$\frac{s_r + s_{q-r}}{2} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} b_k c\left(\frac{rk}{q}\right), \quad r = 0, \dots, q-1, \quad s_0 = s_q.$$

Из (13) и соотношения $c(r(q-k)/q) = c(rk/q)$, $r \in \mathbb{Z}$, получаем, что

$$\frac{s_r + s_{q-r}}{2} = \frac{1}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c\left(\frac{rk}{q}\right) \right) = \frac{1}{q} \alpha(r).$$

Отсюда вытекает, что задача вычисления величины $S_1(p, q)$ эквивалентна задаче

$$\max s_0 = \frac{1}{q} \max_b \alpha(0),$$

$$\alpha(r) = q \frac{s_r + s_{q-r}}{2} \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1.$$

А это есть задача линейного программирования 2.

Так как решение задачи линейного программирования 1 существует, то существует и решение эквивалентной ей задачи 2, причем экстремальные векторы этих задач s^* и b^* связаны формулой (13). Лемма доказана.

Из лемм 1–3 непосредственно следует утверждение теоремы 2. Теорема 2 позволяет численно считать величину $A(p/q)$ для небольших значений p и q , решая задачи линейного программирования 1 или 2, например, симплекс-методом. Однако наибольший интерес представляет вычисление величины $A(p/q)$ для бесконечных серий параметров p и q .

В качестве следствия из теоремы 2 найдем значения величины $A(p/q)$ при $p = 2, 3, 4$ ($q \in \mathbb{N}$) и $q = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$), $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$.

ТЕОРЕМА 3. При $p = 2$, $q = 5, 7, \dots, 2q_0 + 1, \dots$

$$A\left(\frac{2}{q}\right) = \frac{1 + c(1/(2q))}{qc(1/(2q))}.$$

При $p = 3$, $q = 7, 8, 10, 11, \dots, 3q_0 + 1, 3q_0 + 2, \dots$

$$A\left(\frac{3}{q}\right) = \frac{(1 - c_1)(1 - c_2)}{q(1/2 + c_1 c_2)},$$

где $c_i = c(r_i/q)$, $r_1 = [q/3]$ – целая часть $q/3$, $r_2 = r_1 + 1$.

При $p = 4$, $q = 9, 11, 13, 15, \dots, 4q_0 + 1, 4q_0 + 3, \dots$

$$A\left(\frac{4}{q}\right) = \frac{(1 - c_1)(1 - c_2)(1 - c_3)}{q(-(c_1 + c_2 + c_3)/2 - c_1 c_2 c_3)},$$

где $c_i = c(r_i/q)$, $r_1 = [q/4]$, $r_2 = r_1 + 1$, $r_3 = (q - 1)/2$.

При $q = 2p + 1$, $p = 1, 2, \dots$

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{c(1/(2q))}{1 + c(1/(2q))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 имеем

$$qA\left(\frac{p}{q}\right) = qS_2(p, q) = \max_{\alpha} \alpha(0),$$

$$\alpha(r) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} b_k c\left(\frac{kr}{q}\right) \geq 0, \quad r = 0, \dots, q-1. \quad (14)$$

Предположим, что существуют числа $r_i = r_i(p, q) \in \mathbb{Z}$ и $\gamma_i = \gamma_i(p, q) \in \mathbb{R}_+$ такие, что

$$r_0 = 0 < r_1 < \dots < r_{p-1}, \quad r_{2i} = r_{2i-1} + 1, \quad i = 1, \dots, \left[\frac{p-1}{2}\right], \quad (15)$$

$$r_{p-1} = \left[\frac{q}{2}\right] = \frac{q-1}{2}, \quad \text{если } p \text{ четное,}$$

$$\gamma_i > 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i = 1, \quad \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i c\left(\frac{r_i k}{q}\right) = 0, \quad k = 1, \dots, p-1. \quad (16)$$

Покажем, что в этом случае $qA(p/q) = 1/\gamma_0(p, q)$.

Введем полином

$$\Gamma_{p,q}(k) = \Gamma(k) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i c\left(\frac{r_i k}{q}\right).$$

В силу (16) он удовлетворяет условиям

$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma(k) = 0, \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Отсюда следует, что если

$$\alpha(r) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k c\left(\frac{kr}{q}\right)$$

— произвольный тригонометрический полином, то

$$\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i \alpha(r_i) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k c\left(\frac{kr_i}{q}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \Gamma(k) = \alpha_0 \Gamma(0) = \alpha_0. \quad (17)$$

Применяя (17) к полиному α , удовлетворяющему условиям (14), получим

$$1 = \alpha_0 = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i \alpha(r_i) \geq \gamma_0 \alpha(0) \implies \alpha(0) \leq \frac{1}{\gamma_0}.$$

Здесь мы учли, что $\gamma_i > 0$, $r_i \in \mathbb{Z}$ и $\alpha(r_i) \geq 0$, $i = 0, \dots, p-1$.

Таким образом, имеем оценку сверху $qA(p/q) \leq 1/\gamma_0$.

Для доказательства оценки снизу, совпадающей с оценкой сверху, рассмотрим полином

$$\alpha^*(r) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (c(r/q) - c_i)}{\gamma_0 \prod_{i=1}^{p-1} (1 - c_i)} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k^* c\left(\frac{kr}{q}\right), \quad c_i = c\left(\frac{r_i}{q}\right), \quad i = 1, \dots, p-1.$$

В силу выбора чисел r_i (15) полином $\alpha^*(r)$ неотрицательный на сетке $r = 0, \dots, q-1$. (Действительно, он представляется в виде произведения неотрицательных на целочисленной сетке сомножителей $(c(r/q) - c(r_{2i-1}/q))(c(r/q) - c((r_{2i-1} + 1)/q))$. Если p четное, то будет присутствовать еще сомножитель $c(r/q) - c((q-1)/(2q)) = c(r/q) + c(1/(2q))$, который в силу $\min_{r=0, \dots, q-1} c(r/q) = -c(1/(2q))$ также неотрицательный на сетке.) Так как $\alpha^*(r_i) = 0$, $i = 1, \dots, p-1$, и $\alpha^*(0) = 1/\gamma_0$, то формула (17), примененная к полиному α^* , дает

$$1 = \gamma_0 \alpha^*(0) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i \alpha^*(r_i) = \alpha_0^*.$$

Следовательно, полином α^* удовлетворяет всем условиям (14) и $qA(p/q) \geq \alpha^*(0) = 1/\gamma_0$.

В итоге имеем, что $qA(p/q) = 1/\gamma_0(p, q)$. Экстремальной функцией является кусочно-линейная функция $\varphi_{p,q}(x)$ (7), построенная по точкам $(\pm k/q, b_k^*)$, где $b_k^* = \alpha_k^*/2$, $k = 1, \dots, p-1$.

Покажем, что во всех случаях доказываемой теоремы необходимые числа r_i, γ_i , удовлетворяющие (15), (16), существуют.

Случай $p = 2, q = 2q_0 + 1$. Положим

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{q-1}{2} = q_0, \\ \gamma_0 &= -\frac{c_1}{1-c_1} = \frac{c(1/(2q))}{1+c(1/(2q))} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{1}{1-c_1} > 0, \\ c_1 &= c\left(\frac{r_1}{q}\right) = c\left(\frac{q-1}{2q}\right) = -c\left(\frac{1}{2q}\right) < 0, \\ \Gamma_{2,q}(k) &= \frac{-c_1 + c(r_1 k/q)}{1-c_1} = \frac{c(1/(2q)) + (-1)^k c(k/(2q))}{1+c(1/(2q))}. \end{aligned}$$

Отметим, что из равенства

$$\min_{k=0, \dots, q-1} (-1)^k c\left(\frac{k}{2q}\right) = -c\left(\frac{1}{2q}\right)$$

следует, что

$$\Gamma_{2,q}(k) \geq 0, \quad k = 0, \dots, q-1. \quad (18)$$

Случай $p = 3, q = 3q_0 + a, a = 1, 2$. Положим

$$\begin{aligned} r_1 &= \left\lfloor \frac{q}{3} \right\rfloor = \frac{q-a}{3}, \quad r_2 = r_1 + 1 = \frac{q+a'}{3}, \quad a' = 3-a, \\ \Gamma_{3,q}(k) &= \sum_{i=0}^2 \gamma_i c\left(\frac{r_i k}{q}\right). \end{aligned}$$

Числа γ_i определяем из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_{3,q}(0) = 1, \quad \Gamma_{3,q}(r_1) = \Gamma_{3,q}(r_2) = 0 &\iff \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_0 + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = 0, \quad \gamma_0 + \gamma_1(2c_1^2 - 1) + \gamma_2(2c_2^2 - 1) = 0 &\implies \\ \gamma_0 = \frac{1/2 + c_1 c_2}{(1-c_1)(1-c_2)}, \quad \gamma_1 = \frac{-1/2 - c_2}{(1-c_1)(c_1 - c_2)}, \quad \gamma_2 = \frac{1/2 + c_1}{(1-c_2)(c_1 - c_2)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$c_1 = c\left(\frac{r_1}{q}\right) = c\left(\frac{q-a}{3q}\right) = c\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{3q}\right), \quad c_2 = c\left(\frac{r_2}{q}\right) = c\left(\frac{q+a'}{3q}\right) = c\left(\frac{1}{3} + \frac{a'}{3q}\right).$$

Поскольку $0 < r_1 < r_2 < q/2$, то $c_1 > c_2 \implies c_1 - c_2 > 0$.

Далее, $0 < 1/3 - a/(3q) < 1/3 \implies c_1 > c(1/3) = -1/2 \implies 1/2 + c_1 > 0 \implies \gamma_2 > 0$.

Аналогично, $1/3 < 1/3 + a'/(3q) < 1/2 \implies c(1/3) = -1/2 > c_2 \implies -1/2 - c_1 > 0 \implies \gamma_1 > 0$.

Наконец, $2c_1c_2 = 2c(1/3 - a/(3q))c(1/3 + (3-a)/(3q)) = c(2/3 + (3-2a)/(3q)) + c(1/q) > c(2/3 - 1/(3q)) \geq -1 \implies \gamma_0 > 0$.

Случай $p = 4, q = 4q_0 + a, a = 1, 3$. Положим

$$r_1 = \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor = \frac{q-a}{4}, \quad r_2 = r_1 + 1 = \frac{q+a'}{4}, \quad a' = 4-a, \quad r_3 = \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor = \frac{q-1}{2},$$

$$\Gamma_{4,q}(k) = \sum_{i=0}^3 \gamma_i c\left(\frac{r_i k}{q}\right).$$

Числа γ_i определяем из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,q}(0) = 1, \quad \Gamma_{4,q}(r_1) = \Gamma_{4,q}(r_2) = \Gamma_{4,q}(r_3) = 0 &\iff \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1, \quad \gamma_0 + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \gamma_3 c_3 = 0, \\ \gamma_0 + \gamma_1(2c_1^2 - 1) + \gamma_2(2c_2^2 - 1) + \gamma_3(2c_3^2 - 1) = 0, \\ \gamma_0 + \gamma_1(4c_1^3 - 3c_1) + \gamma_2(4c_2^3 - 3c_2) + \gamma_3(4c_3^3 - 3c_3) = 0 &\implies \\ \gamma_0 = \frac{-(c_1 + c_2 + c_3)/2 - c_1 c_2 c_3}{(1 - c_1)(1 - c_2)(1 - c_3)}, \quad \gamma_1 = \frac{(1 + c_2 + c_3)/2 + c_2 c_3}{(1 - c_1)(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)}, \\ \gamma_2 = \frac{-(1 + c_1 + c_3)/2 - c_1 c_3}{(1 - c_2)(c_1 - c_2)(c_2 - c_3)}, \quad \gamma_3 = \frac{(1 + c_1 + c_2)/2 + c_1 c_2}{(1 - c_3)(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_1 = c\left(\frac{r_1}{q}\right) = c\left(\frac{q-a}{4q}\right) = s\left(\frac{a}{4q}\right), \quad c_2 = c\left(\frac{r_2}{q}\right) = c\left(\frac{q+a'}{4q}\right) = -s\left(\frac{a'}{4q}\right), \\ c_3 = c\left(\frac{q-1}{2q}\right) = -c\left(\frac{1}{2q}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $0 < r_1 < r_2 < r_3 < q/2$, то $c_1 > c_2 > c_3 \implies c_1 - c_2 > 0, c_1 - c_3 > 0, c_2 - c_3 > 0$.

Далее, $(1 + c_2 + c_3)/2 + c_2 c_3 = (1 - s(a'/(4q)) - c(1/(2q)))/2 + s(a'/(4q))c(1/(2q))$, $a' = 1, 3$. Нетрудно показать, что функция $(1 - s(x) - c(2x))/2 + s(x)c(2x) > 0$ при $x = 1/(4q) \in (0, 1/36]$ (на этом промежутке она строго возрастает и равна нулю при $x = 0$). Следовательно, $\gamma_1 > 0$ для $a' = 1$. Аналогично, так как функция $(1 - s(3x) - c(2x))/2 + s(3x)c(2x) > 0$ при $x \in (0, 1/36]$, то $\gamma_1 > 0$ для $a' = 3$.

Аналогично показывается, что $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_0 > 0$. Например, $-(1 + c_1 + c_3)/2 - c_1 c_3 = -(1 + s(a/(4q)) - c(1/(2q)))/2 + s(a/(4q))c(1/(2q)) = -(1 + s(ax) - c(2x))/2 + s(ax)c(2x)$,

$x = 1/(4q) \in (0, 1/36]$. Функции $-(1 + s(ax) - c(2x))/2 + s(ax)c(2x)$, $a = 1, 3$, строго больше нуля при $x \in (0, 1/36]$, поэтому $\gamma_2 > 0$.

Случай $q = 2p + 1$, $p = 1, 2, \dots$. Положим $r_i(p, q) = i + 1$, $i = 1, \dots, p - 1$. Рассмотрим полином Фейера $F(x) = F_q(x)$:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{q-1} F_{\nu} c(\nu x) = \frac{1}{q} \left(1 + 2 \sum_{\nu=1}^{q-1} \left(1 - \frac{\nu}{q} \right) c(\nu x) \right) = \left(\frac{s(qx/2)}{qs(x/2)} \right)^2, \quad F(0) = 1. \quad (19)$$

Полином $\Gamma_{p,q}(k)$ построим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p,q}(k) &= F\left(\frac{k}{q}\right) + \frac{\gamma_1(2, q)}{2\gamma_0(2, q)} \left(F\left(\frac{k + r_1(2, q)}{q}\right) + F\left(\frac{k - r_1(2, q)}{q}\right) \right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{q-1} F_{\nu} \left(1 + \frac{\gamma_1(2, q)}{\gamma_0(2, q)} c\left(\frac{\nu r_1(2, q)}{q}\right) \right) c\left(\frac{\nu k}{q}\right) = \sum_{\nu=0}^{2p} F_{\nu} \frac{\Gamma_{2,q}(\nu)}{\gamma_0(2, q)} c\left(\frac{\nu k}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q\gamma_0(2, q)} + \sum_{\nu=1}^p (F_{\nu} + F_{q-\nu}) \frac{\Gamma_{2,q}(\nu)}{\gamma_0(2, q)} c\left(\frac{\nu k}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q\gamma_0(2, q)} + \sum_{\nu=2}^p \frac{\Gamma_{2,q}(\nu)}{\gamma_0(2, q)} c\left(\frac{\nu k}{q}\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i(p, q) c(r_i(p, q)k), \end{aligned}$$

$$\gamma_0(p, q) = \frac{1}{q\gamma_0(2, q)} = \frac{1 + c(1/(2q))}{qc(1/(2q))} > 0, \quad \gamma_i(p, q) = \frac{\Gamma_{2,q}(i+1)}{\gamma_0(2, q)} > 0, \quad i = 1, \dots, p-1.$$

Здесь мы учли соотношения $c((q - \nu)k/q) = c(\nu k/q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_{2,q}(1) = 0$, а также (18). Так как $F(k/q) = 0$ при $k \in \mathbb{Z}$, $q \nmid k$, в частности, $F(\pm r_1(2, q)/q) = F((q - 1)/(2q)) = 0$, то $\Gamma_{p,q}(0) = F(0) = 1$. Аналогично, при $k = 1, \dots, p - 1 = 1, \dots, (q - 3)/2$ числа k и $k \pm r_1(2, q) = k \pm (q - 1)/2$ не делятся на q , поэтому $\Gamma_{p,q}(k) = 0$ при $k = 1, \dots, p - 1$. Полином $\Gamma_{p,q}(k)$ и необходимые числа $r_i(p, q)$, $\gamma_i(p, q)$ построены.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы 3 остается в силе и в случае $p = 1$, $q = 2$, $3, \dots$, если использовать $r_0(1, q) = 0$, $\gamma_0(1, q) = 1$, $\Gamma_{1,q}(k) = 1$.

Ключевая идея, позволившая выписать решения задачи Турана при $p = 3, 4$ принадлежит В. И. Иванову. Нами также получены решения и при $p = 5, 6$, которые в силу громоздкости доказательства здесь не приводятся.

Приведем вытекающие из теоремы 3 асимптотические равенства при $p = 2, 3$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $h = 2/q \rightarrow 0$, $q = 2q_0 + 1$, $q_0 = 2, 3, \dots$

$$A(h) = h + \frac{\pi^2}{16} h^3 + \frac{5\pi^4}{768} h^5 + O(h^7).$$

При $h = 3/q \rightarrow 0$, $q = 3q_0 + 1$, $q_0 = 2, 3, \dots$

$$A(h) = h + \frac{16\pi^2}{243} h^3 - \frac{16\pi^3\sqrt{3}}{2187} h^4 + \frac{448\pi^4}{59049} h^5 + O(h^6);$$

при $h = 3/q \rightarrow 0$, $q = 3q_0 + 2$, $q_0 = 2, 3, \dots$

$$A(h) = h + \frac{16\pi^2}{243} h^3 + \frac{16\pi^3\sqrt{3}}{2187} h^4 + \frac{448\pi^4}{59049} h^5 + O(h^6).$$

Эти асимптотические равенства показывают, что в теореме 1 нельзя заменить O -большое на o -малое.

Решение экстремальной задачи Турана имеет приложения в аналитической теории чисел и дискретной математике.

2. Некоторые приложения в теории чисел. В работе [7, гл. 14] задача Турана используется при исследовании суперсингулярных гиперэллиптических кривых $y^2 = x^l + \lambda$ над $\mathbb{F}_p$, где $\lambda \neq 0$, l – нечетное простое число. В частности, через величину $A(h)$ оценивается функция $T_{\alpha,\beta}(l)$, $0 < \beta - \alpha < 1$, равная наибольшему целому числу r со свойством: существует целое g ($(g, l) = 1$) с мультипликативным порядком t по модулю l и такое, что для некоторого a ($(a, l) = 1$) и любого $x = 0, 1, \dots, t - 1$ существует число $\gamma \in (\alpha, \beta)$ такое, что $ag^x \equiv \gamma l \pmod{l}$. В [7, гл. 14] получена оценка

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{T_{\alpha,\beta}(l)}{\ln l} \geq \frac{1}{\ln A^{-1}(h)}, \quad h = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Еще одно приложение задачи Турана в теории чисел связано с множествами ван дер Корпута. В теории чисел весьма актуальным является следующий вопрос (см. [8], используются результаты гл. 2): является ли заданное множество чисел $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ равномерно распределенным по модулю 1?

Разработано много методов, при помощи которых пытаются ответить на данный вопрос [8]. Один из них был предложен ван дер Корпутом. Он заключается в изучении последовательности $\{u_{n+k} - u_n\}_{n=1}^{\infty}$, где k пробегает некоторое множество натуральных чисел K .

Множество $K \subset \mathbb{N}$ называется *множеством ван дер Корпута* [8], если из того, что последовательность $\{u_{n+k} - u_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно распределена по модулю 1 для любого $k \in K$, следует, что исходная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно распределена по модулю 1.

Множество всех натуральных чисел $K = \mathbb{N}$ является множеством ван дер Корпута. Это было доказано самим ван дер Корпутом [8].

В [8] предложен критерий, позволяющий определить, является ли заданное множество $K \subset \mathbb{N}$ множеством ван дер Корпута. Он базируется на решении экстремальной задачи для неотрицательных тригонометрических полиномов.

Пусть $K \subset \mathbb{N}$ и $\mathbf{T}(K)$ – множество неотрицательных тригонометрических полиномов

$$T(x) = T_0 + \sum_{k=1}^H T_k c(kx)$$

(H произвольно), удовлетворяющих условиям

$$T_k = 0, \quad k \notin K, \quad T(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad T(0) = 1. \quad (20)$$

Задача состоит в нахождении величины

$$\delta(K) = \inf_{T \in \mathbf{T}(K)} T_0.$$

ТЕОРЕМА [8]. *Множество $K \subset \mathbb{N}$ является множеством ван дер Корпута тогда и только тогда, когда $\delta(K) = 0$.*

Отсюда, например, получаем, что $\delta(\mathbb{N}) = 0$ (результат ван дер Корпута) и $\delta(K) > 0$ для любого конечного множества K . Следовательно, множество ван дер Корпута не может быть конечным.

Точное значение величины $\delta(K)$ известно в немногих случаях. Приведем два примера из [8], когда величина $\delta(K)$ вычислена.

ПРИМЕР 1. Пусть $q = 2, 3, \dots$,

$$K_q^0 = \{1, 2, \dots, q-1\}, \quad K_q = q\mathbb{Z}_+ + K_q^0 = \{k \in \mathbb{N} : q \nmid k\},$$

где использовано обозначение $q\mathbb{Z}_+ + K = \{q\nu + k : \nu \in \mathbb{Z}_+, k \in K\}$. Тогда

$$\delta(K_q^0) = \delta(K_q) = \frac{1}{q}.$$

Таким образом, множество K_q не является множеством ван дер Корпута.

ПРИМЕР 2. Имеем

$$\delta(\{2, 3\}) = \frac{\cos(\pi/5)}{1 + \cos(\pi/5)} = 0.44721 \dots$$

Для величины $\delta(K)$ в [8] установлено много свойств. Приведем некоторые из них (везде $K, K_1, K_2 \subset \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$):

- 1) если $K_1 \subset K_2$, то $\delta(K_1) \geq \delta(K_2)$;
- 2) $\delta(qK) = \delta(K)$, где $qK = \{qk : k \in K\}$;
- 3) $\delta(K^{(q)}) \leq q\delta(K)$, где $K^{(q)} = \{k \in K : q \mid k\}$ (если множество $K^{(q)}$ пусто, то $\delta(K) \geq 1/q$);
- 4) $\delta(K_1)\delta(K_2) \leq \delta(K_1 \cup K_2)$.

Эти свойства показывают, что полезно знать величину $\delta(K)$ для заданного множества K , даже если она будет отлична от нуля. Приведем примеры из [8]: множество $Q = \{\nu^2 + 1\}_{\nu=1}^\infty$ и множество простых чисел $\mathbb{P}$ не являются множествами ван дер Корпута, поскольку $Q \subset K_3$, $\mathbb{P} \subset K_4$ и, следовательно, $\delta(Q) \geq 1/3$, $\delta(\mathbb{P}) \geq 1/4$.

Имеется связь экстремальной задачи $\delta(K)$ с экстремальной задачей Турана $A(h)$ для рациональных $h = p/q$. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p \leq q/2$.

Введем множества

$$K_{p,q}^0 = \{p, p+1, \dots, q-p\}, \quad K_{p,q} = q\mathbb{Z}_+ + K_{p,q}^0, \quad K_{p,q}^0 \subset K_{p,q}.$$

ТЕОРЕМА 4. Справедливы оценки $A(p/q) \leq \delta(K_{p,q}) \leq \delta(K_{p,q}^0)$.

ТЕОРЕМА 5. В условиях теоремы 3, а также при $p = 1$, $q = 2, 3, \dots$, справедливы равенства

$$\delta(K_{p,q}^0) = \delta(K_{p,q}) = A\left(\frac{p}{q}\right).$$

Экстремальный полином $T^* \in \mathbf{T}(K_{p,q}^0) \subset \mathbf{T}(K_{p,q})$ имеет вид

$$T^*(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \frac{F(x + r_k/q) + F(x - r_k/q)}{2} = \frac{1}{q\gamma_0} + \sum_{\nu=p}^{q-p} \gamma_0^{-1} \Gamma(\nu) F_\nu c(\nu x), \quad (21)$$

где $F(x) = F_q(x)$ – полином Фейера (19), $r_k = r_k(p, q)$, $\gamma_k = \gamma_k(p, q)$, $k = 0, \dots, p-1$.

Так как $K_{1,q}^0 = K_q^0$, $K_{1,q} = K_q$, $K_{2,3}^0 = \{2, 3\}$ и

$$A\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}, \quad A\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\cos(\pi/5)}{1 + \cos(\pi/5)},$$

из теоремы 5 в качестве следствия получаем результаты из примеров 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $K(p/q)$, $T^{(\varepsilon)} \in \mathbf{T}(K_{p,q})$ – полином, для которого

$$T_0^{(\varepsilon)} \leq \delta(K_{p,q}) + \varepsilon, \quad (22)$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число. Так как $T_k^{(\varepsilon)} = 0$ при $k \in \mathbb{N} \setminus K_{p,q}$ ($k \leq H$), $f(k/q) = 0$ при $k = q\nu + k'$ ($\nu \in \mathbb{Z}_+$, $k' = p, \dots, q-p$), т.е. при $k \in K_{p,q}$ по определению множества $K_{p,q}$, то

$$T_0^{(\varepsilon)} = \sum_{\substack{k \in K_{p,q} \cup \{0\} \\ k \leq H}} T_k^{(\varepsilon)} f\left(\frac{k}{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\substack{k \in K_{p,q} \cup \{0\} \\ k \leq H}} T_k^{(\varepsilon)} c\left(\frac{nk}{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{(\varepsilon)}\left(\frac{nk}{q}\right).$$

Отсюда в силу неотрицательности $a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $T^{(\varepsilon)}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$, равенства $T^{(\varepsilon)}(0) = 1$ и неравенства (22) следует неравенство

$$a_0 \leq \delta(K_{p,q}) + \varepsilon.$$

Так как это неравенство установлено для произвольной функции $f \in K(p/q)$, то

$$\sup_{f \in K(p/q)} a_0 = A\left(\frac{p}{q}\right) \leq \delta(K_{p,q}) + \varepsilon.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ отсюда окончательно получаем оценку снизу величины $\delta(K_{p,q})$: $A(p/q) \leq \delta(K_{p,q})$. Так как $K_{p,q}^0 \subset K_{p,q}$, то $\delta(K_{p,q}) \leq \delta(K_{p,q}^0)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Покажем, что в условиях теоремы 3, а также при $p = 1, q = 2, 3, \dots$, справедлива оценка $\delta(K_{p,q}^0) \leq A(p/q)$. Вместе с теоремой 4 она доказывает теорему 5. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 3.

Возьмем полином $T^*(x)$, определенный по формуле (21):

$$\begin{aligned} T^*(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \frac{F(x + r_k/q) + F(x - r_k/q)}{2} \\ &= \sum_{\nu=0}^{q-1} \gamma_0^{-1} F_{\nu} c(\nu x) \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_k c\left(\frac{\nu r_k}{q}\right) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \gamma_0^{-1} \Gamma(\nu) F_{\nu} c(\nu x). \end{aligned}$$

Покажем, что полином $T^* \in \mathbf{T}(K_{p,q}^0)$, т.е. для него выполняются условия (20). Так как $\Gamma(\nu) = \Gamma(q - \nu) = 0$ при $\nu = 1, \dots, p-1$, $\Gamma(0) = 1$, $F_0 = 1/q$, то

$$T^*(x) = \frac{1}{q\gamma_0} + \sum_{\nu=p}^{q-p} \gamma_0^{-1} \Gamma(\nu) F_{\nu} c(\nu x) = T_0^* + \sum_{k \in K_{p,q}^0} T_k^* c(\nu x).$$

Все числа $\gamma_k > 0$ и $A(p/q) = (q\gamma_0)^{-1}$. Отсюда в силу неотрицательности полинома $F(x)$ и определения полинома $T^*(x)$ (21) следует, что и $T^*(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Наконец, имеем

$$T^*(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_0^{-1} \gamma_k F\left(\frac{r_k}{q}\right).$$

Но $F(\nu/q) = 0$ при $\nu = 1, \dots, q-1$, а все числа r_k при $k = 1, \dots, p-1$ — целые числа из интервала $(0, q/2)$. Следовательно, $F(r_k/q) = 0$ при $k = 1, \dots, p-1$ и

$$T^*(0) = F(r_0) = F(0) = 1.$$

Итак, полином $T^*(x)$ принадлежит множеству $\mathbf{T}(K_{p,q}^0)$ и

$$T_0^* = \frac{1}{q\gamma_0} = A\left(\frac{p}{q}\right).$$

Отсюда вытекает оценка сверху $\delta(K_{p,q}^0) \leq T_0^* = (q\gamma_0)^{-1} = A(p/q)$. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность В.И. Иванову за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горбачев Д.В., Маносина А.С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем // Чебышевский сб. 2001. Т. 2. С. 31–40.
- [2] Маносина А.С. Экстремальная задача Турана для функций с малым носителем // Изв. ТулГУ. Сер. матем., мех., информатика. 2000. Т. 6. № 3. С. 113–116.
- [3] Горбачев Д.В., Маносина А.С. Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем // Тезисы докл. IV Международной конференции “Современные проблемы теории чисел и ее приложения” (Тула, 2001). М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 45–46.
- [4] Стечкин С.Б. Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Стечкин С.Б. Избранные труды: Математика. М.: Наука, 1998. С. 244–245.
- [5] Горбачев Д.В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 346–352.
- [6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
- [7] Konyagin S., Shparlinski I. Character Sums with Exponential Functions and their Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [8] Montgomery H. L. Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.

Тулский государственный университет
E-mail: dvg@uic.tula.ru, manoshin@tula.net

Поступило
23.12.2003