Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов, О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 558–563

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:45:19

УДК 517.984

О БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ РЕГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Н. Б. Керимов, Х. Р. Мамедов

Рассматривается дифференциальный оператор $ly = y'' + q(x)y$ с периодически (антипериодическими) краевыми условиями, являющимися не усиленно регулярными. Предполагается, что $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0, 1]$ и $q(0) \neq q(1)$. Доказывается, что система корневых функций этого оператора образует базис Рисса пространства $L_2(0, 1)$.

Библиография: 7 названий.

Известно [1]–[3], что система корневых функций обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса в L_2 . В работе [2] приведен пример дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями (но не усиленно регулярными), корневые функции которого не образуют базис. В работах [4], [5] доказано, что система корневых функций дифференциального оператора с не усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса со скобками.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$ly = y'' + q(x)y \quad (1)$$

либо с периодическими краевыми условиями

$$y(1) = y(0), \quad y'(1) = y'(0), \quad (2)$$

либо с антипериодическими краевыми условиями

$$y(1) = -y(0), \quad y'(1) = -y'(0). \quad (3)$$

А. А. Шкаликов высказал гипотезу, что корневые функции задачи (1), (2) или (1), (3) образуют обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками, несмотря на то, что эти задачи только регулярны, а не усиленно регулярны.

В настоящей работе мы покажем, что для этих задач свойства базисности в некоторых случаях определяются значениями потенциала в концевых точках отрезка.

Справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0, 1]$ и $q(1) - q(0) \neq 0$. Тогда корневые функции краевой задачи (1), (2), а также краевой задачи (1), (3) образуют базис Рисса пространства $L_2[0, 1]$.

ЛЕММА. Пусть $q(x)$ – комплекснозначная функция из класса $C^{(4)}[0, 1]$,

$$q(1) - q(0) \neq 0, \quad \int_0^1 q(x) dx = 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) все собственные значения краевой задачи (1), (2), начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $k = N, N+1, \dots$, где N – некоторое натуральное число и

$$\begin{aligned} \lambda_{k,1} &= -(2k\pi)^2 + \frac{q(1) - q(0)}{4k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ \lambda_{k,2} &= -(2k\pi)^2 - \frac{q(1) - q(0)}{4k\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_{k,1}(x) = \sin 2k\pi x - \cos 2k\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (5)$$

$$y_{k,2}(x) = \sin 2k\pi x + \cos 2k\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right); \quad (6)$$

- б) все собственные значения краевой задачи (1), (3), начиная с некоторого, простые и образуют две бесконечные последовательности $\lambda_{k,1}$, $\lambda_{k,2}$, $k = N, N+1, \dots$, где N – некоторое натуральное число и

$$\begin{aligned} \lambda_{k,1} &= -((2k+1)\pi)^2 - \frac{q(1) - q(0)}{2(2k+1)\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ \lambda_{k,2} &= -((2k+1)\pi)^2 + \frac{q(1) - q(0)}{2(2k+1)\pi} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \end{aligned}$$

соответствующие собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} y_{k,1}(x) &= \sin(2k+1)\pi x - \cos(2k+1)\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right), \\ y_{k,2}(x) &= \sin(2k+1)\pi x + \cos(2k+1)\pi x + O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а) и б) доказываются одинаково, поэтому проведем рассуждения для а).

Рассмотрим уравнение $y'' + q(x)y = \lambda y$ или

$$y'' + q(x)y + \mu^2 y = 0, \quad (8)$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda}$ и $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ при $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Известно [6, с. 74], что собственные значения краевой задачи (1), (2) асимптотически расположены парами, т.е.

$$\lambda_{k,1} = \lambda_{k,2} + O(k^{1/2}) = -(2k\pi)^2 \left(1 + \frac{\xi_0}{k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right), \quad k = N, N+1, \dots$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} \mu_{k,1} &= \sqrt{-\lambda_{k,1}} = 2k\pi \left(1 + \frac{\xi_0}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right), \\ \mu_{k,2} &= \sqrt{-\lambda_{k,2}} = 2k\pi \left(1 + \frac{\xi_0}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right), \end{aligned} \quad k = N, N+1, \dots$$

Следовательно, $|\operatorname{Im} \mu_{k,1}| \leq c_0$, $|\operatorname{Im} \mu_{k,2}| \leq c_0$, где c_0 – некоторое положительное число.

Таким образом, при всех $k = N, N+1, \dots$ справедливо

$$\mu_{k,1}, \mu_{k,2} \in Q = \{\mu : \operatorname{Re} \mu \geq 0, |\operatorname{Im} \mu| \leq c_0\}.$$

Нетрудно проверить, что $Q \in S_0 - ic_0 \equiv T$, где $S_0 = \{\mu : 0 \leq \arg \mu \leq \pi/2\}$.

Хорошо известно [6, с. 64], что в области T комплексной плоскости μ уравнение (8) имеет два линейно независимых решения $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_2(x, \mu)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, \mu) &= e^{\mu\omega_j x} \left(\sum_{m=0}^4 \frac{u_m(x)}{(2\omega_j \mu)^m} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right), \\ \varphi'_j(x, \mu) &= \mu\omega_j e^{\mu\omega_j x} \left(u_0(x) + \sum_{m=1}^4 \frac{u_m(x) + 2u'_{m-1}(x)}{(2\omega_j \mu)^m} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right), \end{aligned} \quad j = 1, 2,$$

где

$$\omega_1 = -\omega_2 = i, \quad u_0(x) = 1, \quad u_m(x) = -\int_0^x l(u_{m-1}(\xi)) d\xi, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_j(0, \mu) &= 1 + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right), \\ \varphi_j(1, \mu) &= e^{\mu\omega_j} \left(1 + \frac{q(1) - q(0)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{1}{(2\mu\omega_j)^3} \left(q'(0) - q'(1) - \int_0^1 q^2(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q''(1) - q''(0) + \frac{5}{2}q^2(1) - \frac{3}{2}q^2(0) - q(0)q(1)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right), \\ \varphi'_j(0, \mu) &= \mu\omega_j \left(1 - \frac{2q(0)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{2q'(0)}{(2\mu\omega_j)^3} - \frac{2q''(0) + 2q^2(0)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right), \\ \varphi'_j(1, \mu) &= \mu\omega_j e^{\mu\omega_j} \left(1 - \frac{q(0) + q(1)}{(2\mu\omega_j)^2} + \frac{1}{(2\mu\omega_j)^3} \left(q'(1) + q'(0) - \int_0^1 q^2(t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q''(1) + q''(0) + \frac{3}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) - q(0)q(1)}{(2\mu\omega_j)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right). \end{aligned}$$

Подставим все эти выражения в характеристический определитель

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix}, \quad \text{где } U_1(y) = y(1) - y(0), \quad U_2(y) = y'(1) - y'(0).$$

С помощью элементарных преобразований находим, что при достаточно больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (i\mu)^{-1} e^{i\mu} \Delta(\mu) = & e^{2i\mu} \left(1 - \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} - \frac{1}{(2i\mu)^3} \int_0^1 q^2(t) dt \right. \\ & - \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \\ & - 2e^{i\mu} \left(1 - \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} - \frac{2q''(0) + 2q^2(0)}{(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right) \\ & + \left(1 - \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} + \frac{1}{(2i\mu)^3} \int_0^1 q^2(t) dt \right. \\ & \left. - \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{3}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Множитель при $e^{2i\mu}$ в равенстве (9) обозначим через $b(\mu)$. Используя разложение

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

нетрудно убедиться, что при больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ имеет место

$$\begin{aligned} b^{-1}(\mu) = & 1 + \frac{2q(0)}{(2i\mu)^2} + \frac{1}{(2i\mu)^3} \int_0^1 q^2(t) dt \\ & + \frac{2q''(0) - \frac{1}{2}q^2(1) + \frac{11}{2}q^2(0) + q(0)q(1)}{(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, при больших по абсолютной величине значениях $\mu \in T$ уравнение $\Delta(\mu) = 0$ равносильно уравнению

$$(i\mu)^{-1} b^{-1}(\mu) \Delta(\mu) e^{i\mu} = 0. \quad (11)$$

В силу (9), (10) уравнение (11) легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \left(e^{i\mu} - \left(1 + \frac{1}{(2i\mu)^3} \int_0^1 q^2(t) dt - \frac{(q(1) - q(0))^2}{2(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right) \right) \right)^2 \\ & = -\frac{(q(1) - q(0))^2}{(2i\mu)^4} + O\left(\frac{1}{\mu^5}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $q(1) - q(0) \neq 0$, уравнение (12) распадается на два:

$$e^{i\mu} - 1 = \frac{i(q(1) - q(0))}{(2i\mu)^2} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right), \quad (13)$$

$$e^{i\mu} - 1 = -\frac{i(q(1) - q(0))}{(2i\mu)^2} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right). \quad (14)$$

Согласно теореме Руше получим асимптотические выражения для корней $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$, $k = N, N+1, \dots$ (N – некоторое натуральное число), уравнений (13) и (14) соответственно:

$$\mu_{k,1} = 2k\pi - \frac{q(1) - q(0)}{(4k\pi)^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad (15)$$

$$\mu_{k,2} = 2k\pi + \frac{q(1) - q(0)}{(4k\pi)^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right). \quad (16)$$

Отметим, что $\mu_{k,1}$ и $\mu_{k,2}$ – простые корни уравнений (13) и (14) соответственно. Из равенств (15), (16) и соотношений $\lambda_{k,1} = -\mu_{k,1}^2$, $\lambda_{k,2} = -\mu_{k,2}^2$ легко получаются формулы (4) и простота этих собственных значений.

Вычислим $U_1(\varphi_1(x_1, \mu_{k,1}))$ и $U_1(\varphi_2(x_1, \mu_{k,1}))$. Поскольку

$$e^{i\mu_{k,1}} = 1 + \frac{i(q(1) - q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right),$$

имеем

$$\begin{aligned} U_1(\varphi_1(x, \mu_{k,1})) &= \varphi_1(1, \mu_{k,1}) - \varphi_1(0, \mu_{k,1}) \\ &= e^{i\mu_{k,1}} \left(1 + \frac{q(1) - q(0)}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right) \right) - 1 - O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^5}\right) \\ &= \frac{(1+i)(q(1) - q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично получим

$$U_1(\varphi_2(x, \mu_{k,1})) = \frac{(1-i)(q(1) - q(0))}{(2i\mu_{k,1})^2} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}^3}\right). \quad (18)$$

Поскольку $U_1(\varphi_j(x, \mu_{k,1})) \neq 0$, $j = 1, 2$, и $q(1) - q(0) \neq 0$, собственную функцию $y_{k,1}(x)$, соответствующую собственному значению $\lambda_{k,1}$, будем искать в виде

$$y_{k,1} = \frac{(2i\mu_{k,1})^2}{2i(q(1) - q(0))} \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \mu_{k,1}) & \varphi_2(x, \mu_{k,1}) \\ U_1(\varphi_1(x, \mu_{k,1})) & U_1(\varphi_2(x, \mu_{k,1})) \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Поскольку

$$\varphi_j(x, \mu_{k,1}) = e^{\mu_{k,1}\omega_j x} + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}}\right)$$

(так как $|\operatorname{Im} \mu_{k,1}| \leq c_0$), из формул (17)–(19) имеем

$$y_{k,1} = \sin \mu_{k,1} x - \cos \mu_{k,1} x + O\left(\frac{1}{\mu_{k,1}}\right).$$

Следовательно, в силу (15) для собственной функции $y_{k,1}(x)$ имеет место асимптотическая формула (5).

Повторяя предыдущие рассуждения для собственной функции $y_{k,2}(x)$, соответствующей собственному значению $\lambda_{k,2}$, получим формулу (6). Доказательство леммы завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Не нарушая общности, считаем, что

$$\int_0^1 q(x) dx = 0.$$

Система корневых функций краевой задачи (1), (2) минимальна в $L_2(0, 1)$, поскольку обладает биортогонально сопряженной системой, состоящей из корневых функций сопряженного оператора

$$l^*v = v'' + \overline{q(x)}v, \quad v(0) = v(1), \quad v'(0) = v'(1).$$

Кроме того, из асимптотических формул (5), (6) следует, что система корневых функций задачи (1), (2) квадратически близка к ортонормированному базису

$$\sin 2k\pi x - \cos 2k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sin 2k\pi x + \cos 2k\pi x, \quad k = 0, 1, \dots,$$

пространства $L_2(0, 1)$. Следовательно, в силу известной теоремы из [7, с. 440] система корневых функций краевой задачи (1), (2) образует базис Рисса пространства $L_2(0, 1)$.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для краевой задачи (1), (3). При этом используются асимптотические формулы (7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михайлов В. П. О базисах Рисса в $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
- [2] Кесельман Г. М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82–93.
- [3] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 3. М.: Мир, 1974.
- [4] Шкалик А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 235–236.
- [5] Шкалик А. А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
- [6] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [7] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1958.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

29.04.96

Исправленный вариант

01.04.98