Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Лаптев, Априорные оценки сильных решений полулинейных параболических уравнений, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 564–572

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:34:11

УДК 517.956.4

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. Г. Лаптев

Рассматривается начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha u = f(x, t, u, Du, \dots, D^{2b-1}u),$$

где левая часть – линейный равномерно параболический оператор порядка $2b$. Устанавливаются достаточные условия роста функции f по переменным $u, Du, \dots, D^{2b-1}u$, при которых имеет место априорная оценка нормы решения в пространстве Соболева $W_p^{2b,1}$ через младшую норму в пространстве Лебега суммируемых функций $L_{l,m}$.

Библиография: 8 названий.

Введение. Изучается начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения, имеющего высокий порядок по пространственным переменным и первый по времени. Рассматривается проблема существования априорных оценок решения в пространстве Соболева через его норму в пространстве Лебега. Определяются показатели соответствующих нелинейностей, при которых эта проблема имеет решение. Используемый в работе интерполяционный метод получения априорных оценок применительно к эллиптическим уравнениям развивался С. И. Похожаевым в работах [1], [2]. Там же были построены контрпримеры, показывающие неулучшаемость показателей нелинейностей.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $a \in \mathbb{R}_+ \equiv \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$. Введем следующие обозначения:

- $x = (x_1, \dots, x_N)$ – точка в пространстве $\mathbb{R}^N$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^{2b} , $b \geq 1$;
- $Q_t = \Omega \times (a, a+t)$ – цилиндрическая область в пространстве $\mathbb{R}^{N+1}$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- $\partial Q_t = \partial\Omega \times (a, a+t)$ – боковая поверхность цилиндра Q_t ;
- $Q \equiv Q_T = \Omega \times (0, T)$ – цилиндр заданной высоты $T > 0$.

Всюду далее функции считаются вещественнозначными. В работе используются следующие функциональные пространства [3, с. 126], [4, с. 118]:

пространство суммируемых функций $L_p(Q_t)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|u\|_{p;Q_t} = \left(\int_a^{a+t} \int_\Omega |u(x, t)|^p dx dt \right)^{1/p};$$

анизотропное пространство суммируемых функций $L_{q,r}(Q_t)$, $q, r \geq 1$, с нормой

$$\|u\|_{q,r;Q_t} = \left(\int_a^{a+t} \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r};$$

анизотропное пространство Соболева $W(Q_t) \equiv W_p^{2b,1}(Q_t)$ с нормой

$$\|u\|_{W(Q_t)} = \|u\|_{p;Q_t} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_i^{2b}} \right\|_{p;Q_t} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{p;Q_t}.$$

Через $D^i u$ обозначим вектор из частных производных $D^\alpha u$ функции $u(x, t)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0)$, $|\alpha| = i$. Этот вектор имеет N_i компонент, где N_i – число различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0)$, $|\alpha| = i$.

Работа посвящена изучению обобщенных решений $u \in W(Q)$ задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha u &= f(x, t, u, Du, \dots, D^{2b-1}u), \\ u|_{t=0} &= 0, \quad D^\omega u|_{\partial Q} = 0, \quad |\omega| \leq b-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_\alpha(x, t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Предполагаются выполненными следующие условия:

1) линейный оператор

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha u$$

является равномерно параболическим [4];

2) функция $f(x, t, \xi_0, \dots, \xi_{2b-1})$ определена на $\overline{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{2b-1}}$ и является каратеодориевой, т.е. измеримой по x, t при $\xi_0, \dots, \xi_{2b-1} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{2b-1}}$ и непрерывной по $\xi_0, \dots, \xi_{2b-1}$ для почти всех $x, t \in Q$;

3) при $x, t, \xi_0, \dots, \xi_{2b-1} \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{2b-1}}$ выполнено неравенство

$$|f(x, t, \xi_0, \dots, \xi_{2b-1})| \leq b(x, t) + \sum_{i=0}^{2b-1} b_i(x, t) |\xi_i|^{\mu_i},$$

где $b(x, t) \in L_p(Q)$, $b_i(x, t) \in L_{q_i, r_i}(Q)$;

4) $p > N + 2b$, $q_i \geq p$, $p \leq r_i < \infty$, $i = 0, \dots, 2b-1$;

5) степени μ_i определяются формулой

$$\mu_i = \frac{1}{i + N/l + 2b/m} \left(2b + \frac{N}{l} + \frac{2b}{m} - \frac{N}{q_i} - \frac{2b}{r_i} \right),$$

где $1 \leq l, m \leq \infty$ – некоторые числа;

6) выполнены неравенства

$$\mu_i \frac{pq_i}{q_i - p} \geq l, \quad \mu_i \frac{pr_i}{r_i - p} \geq m, \quad i = 0, \dots, 2b-1;$$

из 4) следует, что всегда $\mu_i > 1$.

Основным утверждением работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1)–6) и для любого возможного решения задачи (1) известна априорная оценка $\|u\|_{l,m;Q} \leq M$. Тогда

$$\|u\|_{W_p^{2b,1}(Q)} \equiv \|u\|_{W(Q)} \leq C,$$

где константа C зависит только от известных данных.

ЗАМЕЧАНИЕ. Степени μ_i в условии 5) аналогичны соответствующим степеням из работы [1], однако в отличие от рассмотренных там эллиптических уравнений для параболических задач эти степени достигаются, что показывает теорема 1. Этот факт впервые был отмечен в работах [5], [6], где изучались случаи $l = 2$ и $l = \infty$ для $m = q_i = r_i = \infty$. При этом на функцию $f(x, t, \xi_0, \dots, \xi_{2b-1})$ накладывались дополнительные условия гладкости.

2. Доказательство основного результата. В основе доказательства теоремы 1 лежат следующие два момента: использование интерполяционного неравенства для оценки $\|D^i u\|^{\mu_i}$ через $\|u\|_{W(Q_t)}$ и $\|u\|_{l,m;Q_t}$ и применение теоремы о разрешимости линейных параболических задач в малом цилиндре [4, с. 120]. С помощью специальных построений показано, что коэффициенты при $\|u\|_{W(Q_t)}$ не зависят от высоты цилиндра, когда эта высота мала. Это позволяет за счет использования цилиндров малой высоты установить достижимость предельных степеней μ_i , которые не достигаются в эллиптическом случае.

ЛЕММА 1. Пусть $u \in W(Q_\tau)$, $Q_\tau = \Omega \times (t_0, t_0 + \tau) \subset Q$. Пусть $u(x, t_0) = 0$ и выполнены условия 4)–6). Тогда

$$\|D^i u\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q_\tau} \leq c_0 \|u\|_{W(Q_\tau)}^{1/\mu_i} \|u\|_{l,m;Q_\tau}^{1-1/\mu_i} + c_0 \|u\|_{l,m;Q_\tau},$$

где

$$z_{xi} = \frac{\mu_i p q_i}{q_i - p}, \quad z_{ti} = \frac{\mu_i p r_i}{r_i - p},$$

причем константа c_0 не зависит от t_0 и τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию леммы функция $u(x, t)$ первоначально задана в цилиндре малой высоты τ . Продолжим ее на весь цилиндр Q , доопределив нулем на отрезке $[0, t_0]$, а затем отобразив четным образом относительно точки $t_0 + \tau$. Подробнее,

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0, \\ u(x, t), & t_0 < t < t_0 + \tau, \\ u(x, 2(t_0 + \tau) - t), & t_0 + \tau \leq t < t_0 + 2\tau, \\ 0, & t \geq t_0 + 2\tau. \end{cases}$$

Заметим, что согласно теореме о следах [4, с. 116] при каждом $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ определен след $u(x, t)$ как непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция. В частности, вполне определены функции $u(x, t_0)$ и $u(x, t_0 + \tau)$. Очевидно, $\tilde{u} \in W(Q)$, при этом

$$\|\tilde{u}\|_{l,m;Q} \leq 2\|u\|_{l,m;Q_\tau}, \quad \|\tilde{u}\|_{W(Q)} \leq 2\|u\|_{W(Q_\tau)}, \quad \|D^i \tilde{u}\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q} \geq \|D^i u\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q_\tau}. \quad (2)$$

К функции $\tilde{u} \in W(Q)$ применим теорему вложения анизотропных пространств Соболева [7], [3, с. 304], согласно которой найдется $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$ такое, что для любого $0 < \delta \leq \delta_0$

$$\|D^i \tilde{u}\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q} \leq C \delta^{-\kappa_0} \|\tilde{u}\|_{l, m; Q} + C \delta^{\kappa_1} \left(\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial^{2b} \tilde{u}}{\partial x_j^{2b}} \right\|_{p; Q} + \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_{p; Q} \right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \frac{1}{2b} \left(N \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{z_{xi}} \right) + i + 2b \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z_{ti}} \right) \right), \\ \kappa_1 &= 1 - \frac{1}{2b} \left(N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z_{xi}} \right) + i + 2b \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z_{ti}} \right) \right). \end{aligned}$$

Отметим также, что константа C не зависит от t_0 и τ , так как функция $\tilde{u}$ определена во всем цилиндре Q . Возможность применения теоремы вложения при условиях 4)–6) легко проверяется. В частности, $\kappa_0 > 0$, $\kappa_1 > 0$. Далее, положим [3, с. 415]

$$\delta = \min \{ (\|\tilde{u}\|_{l, m; Q} \|\tilde{u}\|_{W(Q)}^{-1})^{1/(\kappa_0 + \kappa_1)}; \delta_0 \}.$$

В результате несложных преобразований имеем

$$\|D^i \tilde{u}\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q} \leq C \|\tilde{u}\|_{W(Q)}^{\kappa_0/(\kappa_0 + \kappa_1)} \|\tilde{u}\|_{l, m; Q}^{\kappa_1/(\kappa_0 + \kappa_1)} + C \|\tilde{u}\|_{l, m; Q}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что $\kappa_0/(\kappa_0 + \kappa_1) = 1/\mu_i$. Заметим, что степени μ_i выбираются в теореме 1 исходя из этого равенства. Учитывая неравенства (2), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Оператор $f[u] \equiv f(x, t, u(x, t), \dots, D^{2b-1}u(x, t))$ при условиях 2)–6) является ограниченным и непрерывным оператором из пространства $W(Q_\tau)$ в $L_p(Q_\tau)$ (для любого цилиндра $Q_\tau = \Omega \times (t_0, t_0 + \tau)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p > N + 2b$, по теореме вложения все производные функции $u \in W(Q_\tau)$ по переменным $x_1, \dots, x_N$ до порядка $2b - 1$ непрерывны, при этом

$$\|D^i u\|_{\infty; Q_\tau} \leq C \|u\|_{W(Q_\tau)}, \quad i = 0, \dots, 2b - 1.$$

Используя 3), получим

$$\begin{aligned} \|f(x, t, u, \dots, D^{2b-1}u)\|_{p; Q_\tau} &\leq \|b\|_{p; Q_\tau} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{p; Q_\tau} \|D^i u\|_{\infty; Q_\tau}^{\mu_i} \\ &\leq \|b\|_{p; Q_\tau} + \sum_{i=0}^{2b-1} c \|b_i\|_{q_i, r_i; Q_\tau} (C \|u\|_{W(Q_\tau)})^{\mu_i}. \end{aligned}$$

Это доказывает ограниченность оператора f , откуда согласно общим свойствам оператора суперпозиции следует его непрерывность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим в цилиндре $Q_\tau = \Omega \times (t_0, t_0 + \tau)$ линейную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha u = g(x, t),$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad D^\omega u|_{\partial Q_\tau} = 0, \quad |\omega| \leq b - 1.$$

По условию 1) эта задача является параболической; следовательно, к ней можно применить теорему о разрешимости в малом цилиндре [4, с. 120], согласно которой задача имеет единственное решение $u \in W(Q_\tau)$ для $g \in L_p(Q_\tau)$ и

$$\|u\|_{W(Q_\tau)} \leq c_1 \|g\|_{p; Q_\tau}, \quad (3)$$

причем константа c_1 не зависит от t_0 и τ .

Далее, подберем малое τ , исходя из следующих соображений. Пусть на отрезке $[0, T]$ задана суммируемая функция $\varphi(t)$. Напомним свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега [8, с. 301]: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $e \subset [0, T]$, удовлетворяющего условию $\text{mes } e < \delta$, независимо от его положения выполняется неравенство

$$\left| \int_e \varphi(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Применим это утверждение к функциям

$$\varphi_i(t) = \|b_i(x, t)\|_{q_i; \Omega}^{r_i}, \quad i = 0, \dots, 2b - 1.$$

Напомним, что согласно условию 3) считаются конечными нормы

$$\|b_i\|_{q_i, r_i; Q} = \left(\int_0^T \|b_i(x, t)\|_{q_i; \Omega}^{r_i} dt \right)^{1/r_i},$$

поэтому введенные выше функции $\varphi_i(t)$ суммируемы на $[0, T]$. В качестве множества e выберем отрезки $[t_0, t_0 + \tau]$. Тогда $\text{mes } e = \tau$. Тем самым, свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега запишется в следующей форме: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau > 0$ такое, что

$$\|b_i\|_{q_i, r_i; Q_\tau} = \left(\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \|b_i(x, t)\|_{q_i; \Omega}^{r_i} dt \right)^{1/r_i} < \varepsilon$$

независимо от положения точки $t_0 \in [0, T]$.

Используя изложенное, подберем τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_1 \sum_{i=0}^{2b-1} (4c_0)^{\mu_i} M^{\mu_i-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q_\tau} \leq \frac{1}{2}, \quad (4)$$

где c_0 – константа из леммы 1, c_1 – константа из неравенства (3), M – постоянная из условия теоремы. Напомним, что они не зависят от выбора t_0 и τ .

Разобьем область Q на цилиндры

$$Q^0 = \Omega \times (0, \tau), \quad Q^1 = \Omega \times (\tau, 2\tau), \quad \dots, \quad Q^k = \Omega \times (k\tau, (k+1)\tau), \quad \dots, \quad Q^K = \Omega \times (K\tau, T)$$

высоты τ . Поскольку τ фиксировано, число этих цилиндров конечно.

Пусть $u_0 \in W(Q)$ – решение (1). Рассмотрим задачу (1) в цилиндре Q^0 как линейную с правой частью $f_0 = f(x, t, u_0, \dots, D^{2b-1}u_0)$. Согласно неравенству (3) и условию 3)

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{W(Q^0)} &\leq c_1 \|f_0\|_{p; Q^0} = c_1 \|f(x, t, u_0, \dots, D^{2b-1}u_0)\|_{p; Q^0} \\ &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^0} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i |D^i u_0|^{\mu_i}\|_{p; Q^0} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для оценки норм в последней сумме применим неравенство Гёльдера с векторными показателями. Имеем

$$\begin{aligned} \|b_i |D^i u_0|^{\mu_i}\|_{p; Q^0} &= \left(\int_{Q^0} |b_i|^p |D^i u_0|^{\mu_i p} dx dt \right)^{1/p} \\ &\leq (\|b_i^p\|_{s_{xi}, s_{ti}; Q^0} \| |D^i u_0|^{\mu_i p} \|_{s'_{xi}, s'_{ti}; Q^0})^{1/p} \\ &= \|b_i\|_{ps_{xi}, ps_{ti}; Q^0} \| |D^i u_0|^{\mu_i} \|_{\mu_i s'_{xi} p, \mu_i s'_{ti} p; Q^0}, \end{aligned}$$

где s_{xi} , s_{ti} и s'_{xi} , s'_{ti} находим из равенств

$$ps_{xi} = q_i, \quad ps_{ti} = r_i, \quad s'_{xi} = \frac{s_{xi}}{s_{xi} - 1}, \quad s'_{ti} = \frac{s_{ti}}{s_{ti} - 1},$$

так что

$$s_{xi} = \frac{q_i}{p}, \quad s_{ti} = \frac{r_i}{p}, \quad s'_{xi} = \frac{q_i}{q_i - p}, \quad s'_{ti} = \frac{r_i}{r_i - p}, \quad \mu_i s'_{xi} p = \frac{\mu_i p q_i}{q_i - p}, \quad \mu_i s'_{ti} p = \frac{\mu_i p r_i}{r_i - p}.$$

Заметим, что последние два значения совпадают с z_{xi} и z_{ti} из леммы 1. Продолжим неравенство (5), применяя для оценки $\|D^i u_0\|$ лемму 1:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{W(Q^0)} &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^0} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^0} \|D^i u_0\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q^0}^{\mu_i} \right) \\ &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^0} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^0} c_0^{\mu_i} (\|u_0\|_{W(Q^0)}^{1/\mu_i} \|u_0\|_{l, m; Q^0}^{1-1/\mu_i} + \|u_0\|_{l, m; Q^0})^{\mu_i} \right) \\ &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^0} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^0} c_0^{\mu_i} 2^{\mu_i} (\|u_0\|_{W(Q^0)} \|u_0\|_{l, m; Q^0}^{\mu_i - 1} + \|u_0\|_{l, m; Q^0}^{\mu_i}) \right) \\ &\leq \|u_0\|_{W(Q^0)} c_1 \sum_{i=0}^{2b-1} (2c_0)^{\mu_i} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^0} M^{\mu_i - 1} \\ &\quad + c_1 \left(\|b\|_{p; Q^0} + \sum_{i=0}^{2b-1} (2c_0)^{\mu_i} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^0} M^{\mu_i} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (4) коэффициент при $\|u_0\|_{W(Q^0)}$ не превосходит $1/2$, так что неравенство (6) принимает вид

$$\|u_0\|_{W(Q^0)} \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{W(Q^0)} + \frac{1}{2}C^0,$$

где постоянная C^0 определяется из (6). Отсюда $\|u_0\|_{W(Q^0)} \leq C^0$.

Рассмотрим цилиндры Q^{k-1} и Q^k , $1 \leq k \leq K$, и допустим, что уже получена оценка $\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} \leq C^{k-1}$. Убедимся, что из нее следует оценка $\|u_0\|_{W(Q^k)} \leq C^k$.

Обозначим $v(x, t) = u_0(x, 2k\tau - t)$ и положим

$$\tilde{u}(x, t) = u_0(x, t) - v(x, t), \quad t \in (k\tau, (k+1)\tau).$$

Очевидно, $\tilde{u} \in W(Q^k)$ и $\tilde{u}(x, k\tau) = 0$. Рассмотрим в цилиндре Q^k задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha u &= f(x, t, u + v, \dots, D^{2b-1}(u + v)) - \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha v, \\ u(x, k\tau) &= 0, \quad D^\omega u|_{\partial Q^k} = 0, \quad |\omega| \leq b-1. \end{aligned}$$

Функция $\tilde{u}$ является решением этой задачи, так как согласно предположению функция u_0 является решением исходной задачи (1). Используя оценки

$$\|\tilde{u}\|_{l, m; Q^k} \leq 2\|u_0\|_{l, m; Q} \leq 2M$$

и равенство $\|v\|_{W(Q^k)} = \|u_0\|_{W(Q^{k-1})}$, аналогично (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} &\leq c_1 \left\| f(x, t, \tilde{u} + v, \dots, D^{2b-1}(\tilde{u} + v)) - \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2b} a_\alpha(x, t) D^\alpha v \right\|_{p; Q^k} \\ &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^k} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^k} \|D^i(\tilde{u} + v)\|_{z_{xi}, z_{ti}; Q^k}^{\mu_i} + c_2 \|v\|_{W(Q^k)} \right) \\ &\leq c_1 \left(\|b\|_{p; Q^k} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^k} c_0^{\mu_i} 2^{\mu_i} (\|\tilde{u} + v\|_{W(Q^k)} \|\tilde{u} + v\|_{l, m; Q^k}^{\mu_i-1} \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{u} + v\|_{l, m; Q^k}^{\mu_i}) + c_2 \|u_0\|_{W(Q^{k-1})} \right) \\ &\leq \|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} c_1 \sum_{i=0}^{2b-1} (4c_0)^{\mu_i} M^{\mu_i-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^k} \\ &\quad + c_1 \left(\|b\|_{p; Q^k} + \sum_{i=0}^{2b-1} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^k} (4c_0)^{\mu_i} M^{\mu_i} \right) \\ &\quad + \|u_0\|_{W(Q^{k-1})} c_1 \left(\sum_{i=0}^{2b-1} (4c_0)^{\mu_i} \|b_i\|_{q_i, r_i; Q^k} M^{\mu_i-1} + c_2 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как коэффициент при $\|\tilde{u}\|_{W(Q^k)}$ не превосходит $1/2$, неравенство (7) принимает вид

$$\|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} \leq \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} + c_3\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} + c_4,$$

где c_3 и c_4 определяются из (7). Отсюда

$$\|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} \leq 2c_3\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} + 2c_4. \quad (8)$$

Заметим, что $u_0 = \tilde{u} + v$, так что $\|u_0\|_{W(Q^k)} \leq \|\tilde{u}\|_{W(Q^k)} + \|v\|_{W(Q^k)}$. Используя (8) и определение функции v , получим

$$\|u_0\|_{W(Q^k)} \leq (2c_3 + 1)\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} + 2c_4. \quad (9)$$

Согласно предположению $\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} \leq C^{k-1}$, так что из (9) следует

$$\|u_0\|_{W(Q^k)} \leq C^k.$$

Применение индукции завершает доказательство теоремы.

3. Примеры. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t, u, Du),$$

где $f(x, t, \xi_0, \xi_1)$ – каратеодориева функция. Пусть априорная оценка $\|u\|_{\infty; Q} \leq M$ известна и

$$|f(x, t, \xi_0, \xi_1)| \leq b(x, t) + b_1(x, t)|\xi_1|^{\mu_1},$$

где

$$\mu_1 = 2 - \frac{N+2}{p}, \quad b(x, t), b_1(x, t) \in L_p(Q), \quad p > N+2.$$

Тогда по теореме 1 имеем оценку

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C.$$

Неулучшаемость показателя μ_1 покажем на примере задачи

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b_\varepsilon(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{\mu_1}, \quad Q = (-1, 1) \times (0, 1),$$

где

$$b_\varepsilon(x, t) = \frac{-\partial u_\varepsilon / \partial t + \partial^2 u_\varepsilon / \partial x^2}{|\partial u_\varepsilon / \partial x|^{\mu_1}}, \quad u_\varepsilon(x, t) = \frac{x + t - 1}{(x^2 + 1 - t + \varepsilon)^\delta}.$$

Пусть $\mu_1 > 2 - (N+2)/p$. Можно выбрать $0 < \delta < 1/2$ такое, что u_ε является решением этой задачи для любого $\varepsilon > 0$, $\|b_\varepsilon\|_{p; Q} \leq C$ и $\|u_\varepsilon\|_{\infty; Q} \leq M$ равномерно по ε . Однако, $\|u_\varepsilon\|_{W_p^{2,1}(Q)} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В качестве второго примера к теореме 1 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b \Delta^b u = - \sum_{i=0}^{2b-1} \gamma_i(x, t, u) |D^i u|^{\mu_i},$$

где $\gamma_i(x, t, \xi_0)$ – каратеодориевы функции,

$$\sup_{\xi_0 \in \mathbb{R}} |\gamma_i(x, t, \xi_0)| \in L_p(Q),$$

для любого $\xi_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\gamma_i(x, t, \xi_0) \cdot \xi_0 \geq 0$, $p > N + 2b$ и

$$\mu_i = \frac{1}{i + N/2} \left(2b + \frac{N}{2} - \frac{N + 2b}{p} \right).$$

Умножая исходное уравнение на $u(x, t)$ и интегрируя по цилиндру $Q_t = \Omega \times (0, t)$, можно получить для этой задачи априорную оценку $\|u\|_{2, \infty; Q} \leq M$. Далее по теореме 1 получаем более сильную априорную оценку

$$\|u\|_{W_p^{2b, 1}(Q)} \leq C.$$

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю член-корр. РАН С. И. Похожаеву за постановку задачи и полезное обсуждение результатов, а также Я. Ш. Ильясову за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Похожаев С. И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 2. С. 251–265.
- [2] Похожаев С. И. Об априорных оценках решений квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 117. № 1. С. 101–110.
- [3] Бесов О. В., Ильин В. А., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [4] Солонников В. А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. МИАН. Т. 83. М.: Наука, 1965.
- [5] Wahl von W. Klassische Lösbarkeit im Großen für nichtlineare parabolische Systeme und das Verhalten der Lösungen für $t \rightarrow \infty$ // Nachr. Acad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II. 1981. № 5. P. 131–177.
- [6] Wahl von W. Extention of a result of Ladyženskaja and Ural'ceva concerning second-order parabolic equations of arbitrary order // Ann. Pol. Math. 1983. V. 41. № 1. P. 63–72.
- [7] Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 12–30.
- [8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
25.06.97