Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Леонов, Проблема сопряженности в одном классе 2-
групп, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 573–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:12:48

УДК 512.54

ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЕННОСТИ В ОДНОМ КЛАССЕ 2-ГРУПП

Ю.Г. Леонов

В работе разрешена проблема сопряженности элементов в 2-группах Григорчука. Каждая группа рассматривается с позиции преобразований интервала $(0, 1)$ типа "перекладываний" и с позиции сплетений групп. Указано несколько подходов, позволяющих выяснить сопряженность элементов.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В 1980 году Р. И. Григорчук построил новый замечательный пример бесконечной 3-порожденной 2-группы [1]. Впоследствии он обобщил свою конструкцию, получив класс не локально конечных 2-групп, обладающих дополнительно целым рядом интересных свойств. Каждая из этих групп является финитно-аппроксимируемой, аменабельной, имеет промежуточный рост [2].

Определим группы данного класса, следуя [2]. Рассмотрим пространство последовательностей

$$\Omega = \{\omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}, \omega_n \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Зададим отображение $\omega_i \mapsto \bar{\omega}_i$, где

$$\bar{1} = (T, \Pi, \Pi), \quad \bar{2} = (\Pi, T, \Pi), \quad \bar{3} = (\Pi, \Pi, T),$$

T, Π – буквы. Пусть $W_{1,\omega}, W_{2,\omega}, W_{3,\omega}$ – бесконечные слова в алфавите $\{T, \Pi\}$, совпадающие соответственно с первой, второй и третьей строками в последовательности $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \dots \bar{\omega}_n \dots$. Определим преобразования интервала $(0, 1)$, взятого без точек вида $k/2^n$, где $n \in \mathbb{Z}_+, k = \bar{0}, 2^n$:

$$\begin{array}{l} a \sim \begin{array}{c} \text{---} \Pi \text{---} \\ 0 \qquad \qquad 1/2 \qquad \qquad 1 \end{array}, \quad d_{1,\omega} \sim \begin{array}{c} w_{1,1} \quad w_{1,2} \quad w_{1,3} \dots \\ 0 \qquad \qquad 1/2 \qquad \qquad 3/4 \qquad \qquad 1 \end{array}, \\ d_{2,\omega} \sim \begin{array}{c} w_{2,1} \quad w_{2,2} \quad w_{2,3} \dots \\ 0 \qquad \qquad 1/2 \qquad \qquad 3/4 \qquad \qquad 1 \end{array}, \quad d_{3,\omega} \sim \begin{array}{c} w_{3,1} \quad w_{3,2} \quad w_{3,3} \dots \\ 0 \qquad \qquad 1/2 \qquad \qquad 3/4 \qquad \qquad 1 \end{array}, \end{array}$$

где

$$W_{1,\omega} = w_{1,1} \dots w_{1,n} \dots, \quad W_{2,\omega} = w_{2,1} \dots w_{2,n} \dots, \quad W_{3,\omega} = w_{3,1} \dots w_{3,n} \dots$$

Под буквами T и Π будем понимать соответственно тождественное преобразование и перестановку половин интервала, к которому эта буква относится. Таким образом, по определению буквы T и Π относятся к интервалам вида $(1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Группу $G_\omega = \langle a, d_{1,\omega}, d_{2,\omega}, d_{3,\omega} \rangle$ назовем *группой Григорчука типа ω* .

Согласно [2] G_ω является бесконечной, финитно-аппроксимируемой 2-группой при $\omega \in \Omega_0 \subset \Omega$, где Ω_0 – пространство последовательностей ω , в которые цифры 1, 2, 3 входят бесконечное число раз. В группе G_ω разрешима проблема равенства тогда и только тогда, когда ω – рекурсивная последовательность [2]. Однако, вопрос о разрешимости проблемы сопряженности до сих пор оставался открытым.

Пусть $R\Omega_0 = \{\omega \in \Omega_0, \omega \text{ – рекурсивная последовательность}\}$, $R_1\Omega_0 = \{\omega \in R\Omega_0, \omega_n \neq \omega_{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$. Целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. В группе G_ω , $\omega \in R_1\Omega_0$, разрешима проблема сопряженности.

Предложенный нами метод объединяет два подхода исследований группы Григорчука с позиции преобразований интервала $(0, 1)$ типа “перекладываний” и с позиции сплетений групп. Последнее является следствием того, что группа G_ω есть подгруппа сплетения $P_\infty = \prod_{i=1}^\infty \mathbb{Z}_2^{(i)}$. Каждый элемент такого сплетения может быть задан так называемой “таблицей” [3] вида

$$[b_0, b_1(x_1), b_2(x_1, x_2), \dots, b_k(x_1, \dots, x_k), \dots],$$

где $x_1, x_2, \dots$ – формальные переменные кольца $\mathbb{Z}_2$, $b_0, b_1, \dots$ – полиномы от соответствующих переменных с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_2$. Произведение таблиц определим следующим образом:

$$\begin{aligned} & [b_0, b_1(x_1), b_2(x_1, x_2), \dots] \cdot [c_0, c_1(x_1), c_2(x_1, x_2), \dots] \\ &= [b_0 + c_0, b_1(x_1) + c_1(x_1 + b_0), b_2(x_1, x_2) + c_2(x_1 + b_0, x_2 + b_1(x_1)), \dots]. \end{aligned}$$

В этих терминах порождающие элементы группы G_ω можно представить так:

$$a = [1, 0, 0, \dots], \quad d_{j, \omega} = [0, T_j^1(x_1 + 1), \dots, T_j^k(x_1 x_2 \cdots x_{k-1}(x_k + 1)), \dots], \quad (1)$$

где

$$T_j^k Y = \begin{cases} 0, & \text{если } j = \omega_k, \\ Y, & \text{если } j \neq \omega_k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

а Y – любой многочлен.

2. Проекции. Элементы группы G_ω имеют сложное внутреннее строение. Поэтому для получения более полной информации о действии $g \in G_\omega$ на интервал $(0, 1)$ имеет смысл рассматривать сужения преобразований на подынтервалах. Будем называть

$$R_n^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right), \quad \text{где } i = \overline{1, 2^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

интервалом уровня n .

Пусть $H_\omega^{(n)}$ – подгруппа группы G_ω , состоящая из элементов, переводящих интервалы уровня n в себя. Таким образом, каждый элемент $g \in H_\omega^{(n)}$ определяет на интервале $R_n^{(i)}$ некоторое преобразование $\varphi_{R_n^{(i)}}(g)$, которое назовем *проекцией* g на $R_n^{(i)}$. Заметим (ср. [2]), что проекции элементов группы $H_\omega^{(n)}$ на интервалы уровня n образуют группу $G_{\sigma^n \omega}$, где σ – сдвиг влево в пространстве последовательностей: $\sigma\omega = \{\omega_2, \omega_3, \dots\}$, а σ^n есть n -кратное повторение сдвига: $\sigma^n \omega = \{\omega_{n+1}\}_{i=1}^\infty$.

Считая ω фиксированной последовательностью пространства $R_1\Omega_0$, для упрощения обозначений в этом пункте положим $d_j = d_{j,\omega}$, $G_n = G_{\sigma^n\omega}$, $H_n = H_{\sigma^n\omega}$, $G = G_0 = G_\omega$, $H^{(n)} = H_\omega^{(n)}$. Пусть $\Phi = \{1, 2, 3\}$. Порождающие элементы группы G_n обозначим через $a_n, (d_j)_n$, где $j \in \Phi, n \in \mathbb{Z}_+$.

В группе G очевидны следующие соотношения:

$$a^2 = d_{j_1}^2 = 1, \quad d_{j_1}d_{j_2} = d_{j_3},$$

где j_1, j_2, j_3 – попарно различные элементы множества Φ . Следовательно, элементы d_1, d_2 порождают группу $\{1, d_1, d_2, d_3\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Единицу этой группы иногда будем обозначать через d_0 .

Группа $H = H^{(1)} = \langle d_1, d_2, d_3, ad_1a, ad_2a, ad_3a \rangle$ имеет следующую таблицу проектирования своих порождающих:

	d_1	d_2	d_3	ad_1a	ad_2a	ad_3a
$\varphi_{R_1^{(1)}}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	$(d_1)_1$	$(d_2)_1$	$(d_3)_1$
$\varphi_{R_1^{(2)}}$	$(d_1)_1$	$(d_2)_1$	$(d_3)_1$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$

(2)

где

$$u_{j,n} = \begin{cases} a_n, & \text{если } j \neq \omega_n, \\ 1, & \text{если } j = \omega_n. \end{cases}$$

Аналогичную операцию проектирования можно произвести и в терминах сплетений. Если $g = [0, b_1(x_1), b_2(x_1, x_2), \dots] \in H$, то

$$\varphi_{R_1^{(1)}}(g) = [b_1(0), b_2(0, x_1), \dots], \quad \varphi_{R_1^{(2)}}(g) = [b_1(1), b_2(1, x_1), \dots],$$

т.е. при проектировании таблицы на левый (или правый) полуинтервал осуществляется гомоморфизм формальных переменных

$$x_1 \mapsto 0 \text{ (или } 1), \quad x_n \mapsto x_{n-1} \text{ при } n > 1,$$

а также сдвиг последовательности полиномов влево

$$(0, b_1, b_2, \dots) \mapsto (b_1, b_2, b_3, \dots).$$

При $g = [0, \dots, 0, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots] \in H^{(n)}$ проекция на любой интервал производится индуктивно с использованием проектирования на один шаг.

В общем случае $g \in G_\omega$ обычная проекция не осуществима, однако при помощи сплетения можно определить аналог проекции на интервалы уровня $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{R_n^{(i)}}([b_0, b_1(x_1), \dots, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots]) = \varphi_{R_n^{(i)}}([0, \dots, 0, b_n(x_1, \dots, x_n), \dots]).$$

При этом элемент $g^{(n-1)} = [b_0, b_1(x_1), \dots, b_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})]$ назовем *верхней частью* g уровня $n - 1$.

При фиксированном n рассмотрим $g_i = \varphi_{R_n^{(i)}}(g)$. Набор $s_n(g) = (g_1, \dots, g_{2^n}; g^{(n-1)})$ назовем *стемой элемента g уровня n* , а последовательность $\partial_n(g) = (g_1, \dots, g_{2^n})$ — *границей элемента g уровня n* . Очевидно, что каждый элемент $g \in G$ однозначно задает схему любого уровня. Так как у разных элементов таблицы различны, $s_n(g) \neq s_n(h)$ при $g \neq h$.

Заметим, что группа G финитно аппроксимируется группами

$$K^{(n)} = \langle a, d_1^{(n)}, d_2^{(n)} \rangle \leq P_{n+1} = \wr_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}_2^{(i)} \leq S_{2^{n+1}},$$

где $S_{2^{n+1}}$ — симметрическая группа степени 2^{n+1} .

Пусть $s_n(g) = (g_1, \dots, g_{2^n}; g^{(n-1)})$, $s_n(h) = (h_1, \dots, h_{2^n}; h^{(n-1)})$. Из сказанного выше о представлении элементов g и h в виде элементов бесконечного сплетения, а элементов $g^{(n-1)}$ и $h^{(n-1)}$ в виде конечного сплетения имеем

$$s_n(gh) = (g_1 h_{\rho 1}, \dots, g_{2^n} h_{\rho 2^n}; g^{(n-1)} h^{(n-1)}).$$

Здесь $\rho = (g^{(n-1)})^{-1}$ действует на множество $\{1, \dots, 2^n\}$ как элемент группы S_{2^n} .

Из (2) видно, что длины проекций элемента g при проектировании всегда меньше длины g , кроме случая, когда g — порождающий или единичный элемент. Отсюда следует, что существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что элементы последовательности $\partial_n(g)$ принадлежат множеству $\{1, a_n, (d_1)_n, (d_2)_n, (d_3)_n\}$. Наименьшее n с таким свойством назовем *рангом элемента g* и обозначим через $f(g)$. Положим $f(a) = f(1) = f(d_j) = 0, j \in \Phi$.

Специфика действия элемента $g \in G$ на интервале $(0, 1)$ влечет необходимость ряда определений на языке подынтервалов.

Дополнением к интервалу $R_n^{(k)}$ или связанным с ним интервалом первого уровня назовем интервал $\Delta_1 R_n^{(k)} = R_n^{(\delta(k))}$, где

$$\delta(k) = \begin{cases} k+1, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ k-1, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases}$$

Таким образом, выполняется $R_n^{(k)} \cup \Delta_1 R_n^{(k)} = R_{n-1}^{[(k+1)/2]}$. По индукции i -м *дополнением* или *связанным интервалом i -го уровня* ($i > 1$) для $R_n^{(k)}$ ($n > 1$) назовем интервал

$$\Delta_i R_n^{(k)} = \Delta_1 (\Delta_{i-1} R_n^{(k)} \cup \Delta_1 (\Delta_{i-1} R_n^{(k)})).$$

Положим $\text{ind}((d_j)_n) = j$, $\text{ind}(1_{G_n}) = \text{ind}(a_n) = 0$.

Пусть $t = (a_n)(d_{j_1})_n a_n (d_{j_2})_n \dots a_n (d_{j_\mu})_n (a_n)$. Запись $(a_n)t$ (или $t(a_n)$) означает, что мы рассматриваем одновременно t и $a_n t$ (или t и $t a_n$). *Индексом элемента $t \in G_n$* назовем элемент $I(t) = \text{ind}((d_{j_1})_n (d_{j_2})_n \dots (d_{j_\mu})_n) \in \Phi$.

Для произвольного множества X зададим функцию со значениями в кольце $\mathbb{Z}_2$:

$$Q(x, X) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin X, \\ 0, & \text{если } x \in X. \end{cases}$$

Множество элементов вида (ν, ε, τ) , $\nu \in \{1, d_1, d_2, d_3\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\varepsilon, \tau \in \mathbb{Z}_2$, превратим в группу L_y , $y \in \Phi$, определив произведение:

$$(\nu_1, \varepsilon_1, \tau_1) \cdot (\nu_2, \varepsilon_2, \tau_2) = (\nu_1 + \nu_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tau_1 + \tau_2 + \varepsilon_1 \cdot Q(\nu_2, \{1, d_y\})).$$

Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)}(t) &= Q(t, H_n), & \tau^{(n)}(t) &= Q(I(\varphi_{R_1^{(1)}}(t)), \{0, \omega_n\}), \\ \chi_n(t) &= (d_{I(t)}, \varepsilon^{(n)}(t), \tau^{(n)}(t)) \in L_{\omega_n}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение χ_n является эпиморфизмом группы G_n на L_{ω_n} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_1, t_2 \in G_n$. Докажем равенство $\chi_n(t_1 t_2) = \chi_n(t_1) \cdot \chi_n(t_2)$.

Действительно, при $t = t_1 t_2$ имеем $d_{I(t_1)} d_{I(t_2)} = d_{I(t)}$ и $\varepsilon^{(n)}(t) = Q(t_1, H_n) + Q(t_2, H_n)$. Осталось показать совпадение третьих координат. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon^{(n)}(t_1) = 0$, то $\varphi_{R_1^{(1)}}(t) = \varphi_{R_1^{(1)}}(t_1) \varphi_{R_1^{(1)}}(t_2)$. Следовательно, $\tau^{(n)}(t) = \tau_1 + \tau_2$. В случае $\varepsilon_1 = 1$ выполнено

$$I(\varphi_{R_1^{(1)}}(t)) = I(\varphi_{R_1^{(1)}}(t_1) \cdot \varphi_{R_1^{(2)}}(t_2)) = I(\varphi_{R_1^{(1)}}(t_1) \cdot \varphi_{R_1^{(1)}}(t_2) \cdot t_2).$$

Отсюда $\tau^{(n)}(t) = \tau^{(n)}(t_1) + \tau^{(n)}(t_2) + Q(I(t_2), \{0, \omega_n\})$.

Далее будем писать $\varepsilon = \varepsilon^{(n)}$, $\tau = \tau^{(n)}$, считая параметр n определенным по смыслу.

Элемент $\chi_n(t)$ назовем *характеристикой* $t \in G_n$ уровня n , а L_{ω_n} – *группой характеристик* этого уровня. Отображение τ иногда будем называть *внутренним оператором*.

ЛЕММА 1. *Пусть $t \in G_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\chi_{n+1}(\varphi_{R_1^{(i)}}(t)) = (d_{j_i}, \varepsilon_i, \tau_i)$, $i = 1, 2$. Тогда*

- а) $\varepsilon_i = Q(j_{\delta(i)}, \{0, \omega_{n+1}\})$, $i = 1, 2$;
- б) $\tau_1 + \tau_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждений а) и б) проведем индукцией по длине слова t . База индукции для порождающих группы G_n следует непосредственно из их определений.

Пусть $\text{len}(g)$ – длина элемента g при заданной системе порождающих. Предположим, что лемма выполнена для элементов длины меньшей k . Проектированием на половины интервала $(0, 1)$ убеждаемся в верности утверждения для $t = t'u$, где $\text{len}(t) = k$, $\text{len}(t') = k - 1$ и u – один из порождающих группы G_n .

Для некоторого натурального n рассмотрим произвольную последовательность $t_1, \dots, t_{2^n}$ элементов группы G_n . Очевидно, что в группе P_∞ существует π такое, что проекция таблицы $\varphi_{R_n^{(i)}}(\pi)$ равна t_i , $i = \overline{1, 2^n}$.

Зафиксируем $t \in H_n$ и опишем процесс получения $\bar{t} \in H$ с условием $\varphi_{R_n^{(2^n)}}(\bar{t}) = t$. При этом существует возможность выбрать $\bar{t}$, удовлетворяющим дополнительным свойствам (которые нам понадобятся в дальнейшем).

ЛЕММА 2. а) *Если $t \in H_1$, то элемент $\bar{t}$ с проекцией $\varphi_{R_1^{(2)}}(\bar{t}) = t$ существует в H при правильном выборе единственного элемента из множества $J_1 = \{1, a_1, a_1^{(d_1)1}, a_1 \cdot a_1^{(d_1)1}\}$, $l = \omega_2$, для проекции $\varphi_{R_1^{(1)}}(\bar{t})$.*

б) *Пусть $t \in H_n$, $n > 1$. Тогда элемент $\bar{t}$ с проекциями*

$$\varphi_{R_n^{(2^n)}}(\bar{t}) = t, \quad \varphi_{\Delta_i R_n^{(2^n)}}(\bar{t}) = u_{I(t), n-i+1}, \quad i = \overline{2, n},$$

существует в H при правильном выборе единственного элемента из множества $J_n = \{1, a_n, a_n^{(d_1)n}, a_n \cdot a_n^{(d_1)n}\}$, $l = \omega_{n+1}$, для проекции $\varphi_{R_n^{(2^n-1)}}(\bar{t})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовем t *главным по отношению к $\bar{t}$* , а элемент из множества J_n *побочным*. Будем говорить, что $\bar{t}$ есть *распространение элемента t уровня n* относительно интервала $R_n^{(2^n)}$. Доказательство существования распространения проведем индукцией по n . Будем считать, что $j \in \Phi$.

а) Пусть $n = 1$. Если $t = (d_j)_1$, то положим $\bar{t} = d_j$, при этом $\varphi_{R_1^{(1)}}(\bar{t}) \in \{1, a_1\}$.

Аналогично, для $t = (d_j)_1^{a_1}$ возьмем $\bar{t} = d_l^a \cdot d_j \cdot d_l^a$, где $l = \omega_2$. В этом случае $\varphi_{R_1^{(1)}}(\bar{t}) \in \{1, a_1^{(d_l)_1}\}$. Однозначный выбор l возможен, поскольку $l \neq \omega_1$ и $|a_1(d_l)_1| = 4$. Последнее равенство показывает, что побочные элементы порождающих элементов группы H_1 формируют множество J_1 и, тем самым, утверждение а) доказано.

б) Из предположения $\bar{t} \in G$ в силу леммы 1, примененной к элементу $\varphi_{R_{n-1}^{(2^{n-1})}}(\bar{t})$, и того, что характеристики элементов множества J_n попарно различны, следует, что в множестве J_n не может быть более одного побочного элемента для данного t .

Допустим, лемма доказана для $k < n$. Покажем существование распространения при $k = n$.

Равенство $\varphi_{\Delta_i R_n^{(2^n)}}(\bar{t}) = u_{I(t), n-i+1}$, $i = \overline{2, n}$, следует из утверждения а) леммы 1, примененной к элементу $\varphi_{\Delta_i R_n^{(2^n)} \cup \Delta_1(\Delta_i R_n^{(2^n)})}(\bar{t})$.

Если $t = (d_j)_n$, то аналогично доказательству утверждения а) полагаем $\bar{t} = d_j$.

Пусть теперь $t = ((d_j)_n)^{a_n}$. Рассмотрим элемент $t_1 = ((d_l)_{n-1})^{a_{n-1}}$, где $l = \omega_{n+1}$, в качестве главного на интервале $R_{n-1}^{(2^{n-1})}$. По нашему предположению на интервале $R_{n-1}^{(2^{n-1}-1)}$ для t_1 найдется побочный элемент

$$\begin{cases} 1, & \text{если } l = \omega_{n-1}, \\ a_{n-1}^{(d_{\omega_n})^{n-1}}, & \text{если } l \neq \omega_{n-1}. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\bar{t} = (d_j)^{\bar{t}_1}$ является искомым распространением элемента t уровня n , поэтому распространение порождающих группы H_n найдено.

Рассмотрим гомоморфизм $z_n : H_n \rightarrow H$ с условием

$$z_n((d_j)_n) = d_j, \quad z_n(((d_j)_n)^{a_n}) = (d_j)^{\bar{t}_1}.$$

Аналогично утверждению а) распространением $t \in H_n$ является элемент $z_n(t)$. Лемма доказана.

Будем считать $B_n^{(i)}$ меткой элемента t , если $\varepsilon(\varphi_{R_n^{(i)}}(t)) = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, 2^n}$.

Пусть $M(t)$ – множество меток элемента t . Назовем метку $B_n^{(i)}$ *свободной относительно $M(t)$* , если $B_n^{(i)} \in M(t)$ и для любого другого элемента $B_r^{(s)} \in M(t)$ выполняется $R_r^{(s)} \cap R_n^{(i)} = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой последовательности $\omega \in R\Omega_0$ и любого интервала $R_n^{(i)}$ существует $t \in G_\omega$ такое, что метка $B_n^{(i)}$ является свободной относительно $M(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим по индукции множество элементов $(i, n)_\Pi$ группы G_ω , для которых метка $B_n^{(i)}$ является свободной относительно $M((i, n)_\Pi)$. Одновременно построим множество элементов $(i, n)_T \in G_\omega$ таких, что для любой метки $B_r^{(s)} \in M((i, n)_T)$ выполняется $R_r^{(s)} \cap R_n^{(i)} \neq \emptyset$.

Возьмем $(1, 1)_\Pi = d_j$, $(2, 1)_\Pi = (d_j)^a$, где $j \in \Phi \setminus \{\omega_1\}$, а также $(1, 1)_T = d_{\omega_1}$, $(2, 1)_T = (d_{\omega_1})^a$.

Будем говорить, что t на интервале $R_n^{(i)}$ имеет *свободный активный порождающий*, если $\varphi_{R_n^{(i)}}(t) = (d_j)_n$, $j \in \Phi$, и для любого $B_r^{(s)} \in M(t)$ такого, что $r \neq n$, выполняется $R_n^{(i)} \cap R_r^{(s)} = \emptyset$. Построенные нами $(i, 1)_\Pi$ и $(i, 1)_T$ имеют свободные активные порождающие на интервале $\Delta_1 R_1^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Пусть уже построены элементы $(i, k)_\Pi$ и $(i, k)_T$ для $k < n$, $i = \overline{1, 2^k}$, которые имеют свободные активные порождающие на интервале $\Delta_1 R_k^{(i)}$. Построим $(i, n)_\Pi$ и $(i, n)_T$ с аналогичным свойством, $i = \overline{1, 2^n}$.

Для каждого $i = \overline{1, 2^n}$ определим m из включения $R_n^{(i)} \subset \Delta_1 R_{n-1}^{(m)}$. Если i нечетно, то возьмем

$$(i, n)_\Pi = \begin{cases} (m, n-1)_T, & \text{если } \omega_{n-1} \neq \omega_n, \\ (m, n-1)_\Pi, & \text{если } \omega_{n-1} = \omega_n. \end{cases}$$

Пусть теперь i четно. Положим $(i, n)_\Pi = ((i-1, n)_\Pi)^{(i/2, n-1)_\Pi}$. Для определенности будем считать, что $\omega_{n-1} \neq \omega_n$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} \varphi_{R_{n-1}^{(i/2)}}((i, n)_\Pi) &= (\varphi_{R_{n-1}^{(i/2)}}((m, n-1)_T))^{a_{n-1}} \\ &= (\varphi_{\Delta_1 R_{n-1}^{(m)}}((m, n-1)_T))^{a_{n-1}} = ((d_{\omega_{n-1}})_{n-1})^{a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varphi_{R_n^{(i)}}((i, n)_\Pi) = u_{n, \omega_{n-1}} = a_n$ и $\varphi_{\Delta_1 R_n^{(i)}}((i, n)_\Pi) = (d_{\omega_{n-1}})_n$, т.е. так выбранный элемент $(i, n)_\Pi$ имеет свободный активный порождающий на интервале $\Delta_1 R_n^{(i)}$. Случай $\omega_{n-1} = \omega_n$ рассматривается аналогично. Осталось отметить, что элемент $(i, n)_T$ строится таким же образом. Предложение доказано.

Следующие результаты демонстрируют роль группы характеристик для $G = G_\omega$, $\omega \in R_1 \Omega_0$.

ЛЕММА 3. Пусть $t_1, \dots, t_{2^n} \in G_n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $\chi_n(t_i) = (d_0, 0, 0)$, где d_0 – единица группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, для любого $i = \overline{1, 2^n}$, то существует $t \in H^{(n+1)}$ с условием $\varphi_{R_n^{(i)}}(t) = t_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in G_n$, $\chi_n(t) = (d_0, 0, 0)$. Обозначим через $t(i)$ элемент группы P_∞ с условиями $\varphi_{R_n^{(s)}}(t(i)) = 1$ при $s \neq i$, $\varphi_{R_n^{(i)}}(t(i)) = t$, $i \in \overline{1, 2^n}$. Покажем, что $t(i) \in G$. При $i = 2^n$ это следует из леммы 2. Если $i = \overline{1, 2^n - 1}$, то $t(i)$ можно получить из $t(2^n)$ посредством сопряжений подходящими элементами $(m, n)_\Pi$. Точнее, если

$$i = 2^n - (2^{n-k} + \rho_{k-1} 2^{n-k-1} + \dots + \rho_1 2^{n-1}), \quad \rho_1, \dots, \rho_{k-1} \in \{0, 1\},$$

то

$$t(i) = (t(i + 2^{n-k}))^{(2^{n-k-1}, n-k-1)_\Pi} \quad \text{и} \quad t(2^n - 2^{n-1}) = (t(2^n))^a.$$

Нетрудно видеть, что $t = t_1(1) \cdots t_{2^n}(2^n)$.

Назовем $t(i)$ *распространением элемента t относительно интервала $R_n^{(i)}$* .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $t \in H$ и $\chi_n(\varphi_{R_n^{(i)}}(t)) = \chi_{n,i} \in L_{\omega_n}$, $i = \overline{1, 2^n}$. Тогда для любой последовательности $g_i \in G_n$ с характеристиками $\chi_n(g_i) = \chi_{n,i}$ существует $g \in H$, имеющее границу $\partial_n(g) = (g_1, \dots, g_{2^n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $t_i = \varphi_{R_n^{(i)}}(t)$. Рассмотрим элемент $\bar{g} \in P_\infty$ со схемой $s_n(\bar{g}) = (g_1 t_1^{-1}, \dots, g_{2^n} t_{2^n}^{-1}; 1)$. По лемме 3 выполняется $\bar{g} \in H^{(n+1)}$. Ясно, что $g = \bar{g}t \in H$.

Итак, если любую проекцию n -го уровня элемента группы G заменить на другой элемент с сохранением характеристики, то новый элемент также принадлежит G . Последовательность элементов $\chi_n^{(1)}, \dots, \chi_n^{(2^n)}$ группы L_{ω_n} назовем *правильной*, если в G существует хотя бы один элемент g с условием $\chi_n(\varphi_{R_n^{(i)}}(g)) = \chi_n^{(i)}$.

Для $n \geq 0$ рассмотрим множество $\text{In}_n(G)$, состоящее из элементов $g \in P_\infty$, для которых все проекции $\varphi_{R_n^{(i)}}(g)$ принадлежат G_n . Очевидно, $\text{In}_n(G) \subseteq \text{In}_{n+k}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, и $\text{In}_0(G) = G$.

Следующее утверждение является в некотором смысле обращением леммы 1.

ЛЕММА 4. Пусть $g \in \text{In}_n(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $g \in \text{In}_{n-1}(G)$, если и только если последовательность $\chi_{n,i} = \chi(\varphi_{R_n^{(i)}}(g)) = (d_{j_i}, \varepsilon_i, \tau_i) \in L_{\omega_n}$, $i = \overline{1, 2^n}$, подчинена условиям

$$\varepsilon_i = Q(j_{\delta(i)}, \{0, \omega_n\}), \quad \tau_i + \tau_{\delta(i)} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{\delta(i)}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из леммы 1, примененной к проекциям.

Доказывать достаточность будем индукцией по n сразу для всех $\omega \in R_1\Omega_0$. Пусть $g \in \text{In}_1(G_\omega)$ и верно (3). Покажем, что $g \in G_\omega$.

Не ограничивая общности, считаем $B_0 \notin M(g)$, $\varphi_{R_1^{(1)}}(g) \in H_{\sigma\omega}$. Если это не так, то элемент g приводится к необходимому виду умножением на d_j и (или) на a , $j \neq \omega_1$.

Положим $g_i = \varphi_{R_1^{(i)}}(g)$, $\chi_1(g_i) = (d_{j_i}, \varepsilon_i, \tau_i) = \chi_i$, $i = 1, 2$. Следуя лемме 2, построим g' – распространение элемента g_1 относительно $R_1^{(1)}$. При этом $\varphi_{R_1^{(2)}}(g') = g'_2 \in J_1$ и $\chi_1(g'_2) = (d_0, Q(j_1, \{0, \omega_1\}), \tau_1)$.

В то же время из условий (3) в силу выбора ε_1 имеем $j_2 \in \{0, \omega_1\}$, $\varepsilon_2 = Q(j_1, \{0, \omega_1\})$, $\tau_2 = \tau_1$.

Рассмотрим g'' – распространение $(g'_2)^{-1}g_2$ относительно интервала $R_1^{(2)}$. Так как $\chi_1((g'_2)^{-1}g_2) = (\chi_1(g'_2))^{-1} \cdot \chi_1(g_2) = (d_{j_2}, 0, 0)$, по лемме 2 g'' можно взять с условием $\varphi_{R_1^{(1)}}(g'') = 1$. Итак, $g', g'' \in G_\omega$ и $g = g'g''$.

Предположим теперь $g \in \text{In}_n(G_\omega)$ и выполнено (3). Из доказанной достаточности для случая $\text{In}_1(G_\omega)$, применяя рассуждение к группе $G_{\sigma^{n-1}\omega}$, получаем, что

$$\varphi_{R_{n-1}^{(i)}}(g) \in G_{\sigma^{n-1}\omega}, \quad g \in \text{In}_{n-1}(G_\omega).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 4 позволяет строить все правильные последовательности уровней n элементов группы L_{ω_n} , $n \geq 1$.

3. Критерий сопряженности. Пусть g, h сопряжены в G , т.е. для некоторого $t \in G$ выполняется $t^{-1}gt = h$. Положим $n = \max(f(g), f(h), 1)$,

$$g_i = \varphi_{R_{n+1}^{(i)}}(g), \quad h_i = \varphi_{R_{n+1}^{(i)}}(h), \quad t_i = \varphi_{R_{n+1}^{(i)}}(t), \quad i = \overline{1, 2^{n+1}}.$$

Очевидно, что $\beta^{-1}g^{(n)}\beta = h^{(n)}$, где $\beta = t^{(n)} \in K^{(n)}$. По правилу получения схемы произведения, имеем $(t^{-1})_i g_{t^{(n)}_i} t_{(g^{(n)})^{-1}t^{(n)}_i} = h_i$, или при $k = t^{(n)}_i$

$$g_k t_{(g^{(n)})^{-1}k} (h_{(t^{(n)})^{-1}k})^{-1} = t_k.$$

Очевидно,

$$g_k g_{(g^{(n)})^{-1}k} t_{(g^{(n)})^{-2}k} (h_{(t^{(n)})^{-1}(g^{(n)})^{-1}k})^{-1} (h_{(t^{(n)})^{-1}k})^{-1} = t_k.$$

Пусть порядок $g^{(n)}$ равен U . Тогда

$$\left(\prod_{q=0}^{U-1} g_{(g^{(n)})^{-q}k} \right) t_k \left(\prod_{q=0}^{U-1} h_{(t^{(n)})^{-1}(g^{(n)})^{-q}k} \right)^{-1} = t_k.$$

Элементы в скобках обозначим через $g_n(k, \beta)$ и $h_n(k, \beta)$ соответственно. Это определение корректно для $h_n(k, \beta)$, поскольку $(t^{(n)})^{-1}(g^{(n)})^{-q}k = (h^{(n)})^{-q}(t^{(n)})^{-1}k$.

Мы получаем условие на элемент t_k :

$$(t_k)^{-1} g_n(k, \beta) t_k = h_n(k, \beta), \quad k = \overline{1, 2^{n+1}}. \quad (4)$$

ЛЕММА 5. *Имеют место оценки*

$$\text{len}(g_{2n+1}(k, t^{(2n)})) \leq 1, \quad \text{len}(h_{2n+1}(k, t^{(2n)})) \leq 1, \quad k = \overline{1, 2^{2n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, проведем доказательство только для $g_{2n+1}(k, t^{(2n)})$. Заметим, что для любых $v, x \in G$ справедливо следующее равенство, дающее большую информацию о роли действия элемента конечного сплетения на множество:

$$\varphi_{R_{n+r}^{(x(n+r-1)\bar{k})}}(v) = \varphi_{R_r^{(\bar{k})}}(\varphi_R(v)),$$

где $\bar{k} = (k-1)2^r + i$, $\bar{k} = (\varphi_R(v))^{(r-1)i}$, $R = R_n^{(x^{(n-1)k})}$, $i = \overline{1, 2^r}$, $k = \overline{1, 2^n}$, $r \in \mathbb{N}$.

Обозначим проекцию слева через $v_{n+r}(\bar{k}, x)$.

Пусть $f(v) \leq n+r-1$. Если $v_{n+r}(\bar{k}, x) = a_{n+r}$, то

$$v_{n+r-1}(k', x) = (d_j)_{n+r-1}, \quad j \neq \omega_{n+r}, \quad \bar{k} \in \{2k' - 1, 2k'\},$$

и

$$v_{n+r+1}(\bar{k}, x) = 1, \quad \bar{k} \in \{2\bar{k}, 2\bar{k} - 1\}.$$

Так как длина $\text{len}(g_{n+1}(\bar{k}, t^{(n)})) \leq U \leq 2^n$ при $\bar{k} = \overline{1, 2^{n+1}}$, то, выбирая для $q = \overline{1, U}$ элементы $x = g^{-q}$, $v = g$, $r = 1$ и используя $(g^{-q})^{(r)} = (g^{(r)})^{-q}$, очевидно, получаем

$$\text{len}(g_{n+2}(\bar{k}, t^{(n+1)})) \leq \left\lceil \frac{U+1}{2} \right\rceil.$$

Отсюда по индукции $\text{len}(g_{2n+1}(k, t^{(2n)})) \leq 1$ для любого $k = \overline{1, 2^{2n+1}}$.

Из леммы 5 и (4) следует, что в случае $t^{-1}gt$ выполняются равенство $g_{2n+1}(k, t^{(2n)}) = h_{2n+1}(k, t^{(2n)})$ и вхождение $t_k \in C_{G_{2n+1}}(g_{2n+1}(k, t^{(2n)}))$ для любого $k = \overline{1, 2^{2n+1}}$.

Докажем основной результат.

ТЕОРЕМА (критерий сопряженности). Пусть $\omega \in R_1\Omega_0$, $g, h \in G_\omega$ и $m = 2 \max(f(g), f(h), 1) + 3$. Если $g^{(m)}$ и $h^{(m)}$ сопряжены в $K_\omega^{(m)}$, то g и h сопряжены в G_ω . Кроме того, существует $t \in G_\omega$ с условием $g^t = h$ такое, что $f(t) \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраняя обозначения этого пункта, выберем $\beta \in K_\omega^{(m)}$, для которого справедливо

$$(g^{(m)})^\beta = h^{(m)}. \quad (5)$$

В группе $K_\omega^{(m)}$ проблема сопряженности разрешима, так как $K_\omega^{(m)}$ является подгруппой сплетения P_{m+1} с явно известными порождающими (формула (1) для первых $m+1$ координат).

Назовем $t \in G_\omega$ продолжением β , если $t^{(m)} = \beta$. Заметим, что хотя бы одно продолжение мы можем установить всегда. Действительно, представим β в виде произведения порождающих группы $K_\omega^{(m)}$. Тем самым, $\beta = (a)d_{j_1}^{(m)}a \cdots ad_{j_\mu}^{(m)}(a)$ и $t = (a)d_{j_1}a \cdots ad_{j_\mu}(a)$ – одно из продолжений. Нетрудно видеть, что любое другое продолжение t' представимо в виде αt , где $\alpha \in H_\omega^{(m+1)}$. Из (5) следует, что

$$t_{(g^{(m-3)})^{-1}k}^{(2)} = (g_k^{(2)})^{-1} \cdot t_k^{(2)} \cdot h_{\beta^{-1}k}^{(2)}, \quad k = \overline{1, 2^{m-2}}.$$

Пользуясь леммой 1 и неравенством $\omega_{s+1} \neq \omega_{s+2}$, несложно установить, что характеристика χ_s любого элемента $v \in G_{\sigma^s \omega}$ может быть определена однозначно по элементу $v^{(2)} \in K_{\sigma^s \omega}^{(2)}$. Отсюда

$$\chi_{m-2}(t_{(g^{(m-3)})^{-1}k}) = \chi_{m-2}(g_k^{-1}) \cdot \chi_{m-2}(t_k) \cdot \chi_{m-2}(h_{\beta^{-1}k}).$$

Это равенство дает возможность использовать идею п. 2 – формировать необходимый нам элемент $\tilde{t}$ путем замены на уровне $m-2$ существующих проекций иными элементами $\tilde{t}_k$ группы $G_{\sigma^{m-2}\omega}$ с сохранением последовательности характеристик проекций.

Пусть $i_1, \dots, i_\zeta$ – представители различных орбит множества $\{1, \dots, 2^{m-2}\}$, порожденных элементом $(g^{(m-3)})^{-1}$. Будем требовать, чтобы t_{i_r} принадлежал централизатору $C_{G_{\sigma^{m-2}\omega}}(g_{m-2}(i_r, \tilde{\beta}))$, где $\tilde{\beta} = t^{(m-3)}$, $r = 1, \dots, \zeta$. Если теперь $\tilde{\beta}^{-1}i \neq i_r$, $r \in \overline{1, \zeta}$, и выполняется

$$\tilde{t}_{\tilde{\beta}^{-1}i} = (g_i)^{-1} \cdot \tilde{t}_i \cdot h_{\tilde{\beta}^{-1}i}, \quad (6)$$

то элемент $\tilde{t}$ со схемой $s_{m-2}(\tilde{t}) = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{2^{m-2}}; \tilde{\beta})$ будет переводить g в h согласно (4). При этом $\tilde{t}$ принадлежит G_ω в силу правильности последовательности характеристик его проекций.

Осталось обосновать возможность выбора $\tilde{t}_k$. По правилу произведения элементов группы L_y , $y \in \Phi$, видно, что $C_{G_{\sigma^{m-2}\omega}}(a_{m-2})$ не содержит элементов индекса отличного от 0. Аналогично, если $\xi \in C_{G_{\sigma^{m-2}\omega}}((d_{j'})_{m-2})$, $j' \in \Phi$, то

$$\chi_{m-2}(\xi) \in \begin{cases} \{(d_j, 0, 0)\}, & \text{если } j' \neq \omega_{m-3}, \\ \{(d_j, 0, \tau)\}, & \text{если } j' = \omega_{m-3}, \end{cases} \quad \tau \in \mathbb{Z}_2, \quad j \in \Phi.$$

Для каждой возможной характеристики централизаторов порождающих группы $G_{\sigma^{m-2}\omega}$ находим конкретный элемент:

характеристика χ_{m-2}	элемент централизатора
(d_0, ε, τ)	$((d_\eta)_{m-2}^{a_{m-2}} (d_\eta)_{m-2})^\tau a_{m-2}^\varepsilon$
$(d_j, 0, 1)$	$(d_\eta)_{m-2}^{a_{m-2}} (d_\eta d_j)_{m-2}$
$(d_j, 0, 0)$	$(d_j)_{m-2}$

где $\eta = \omega_{m-3}$.

Для $t_{i_1}, \dots, \tilde{t}_{i_\zeta}$ выбираем элементы из данной таблицы по требованию характеристики, а остальные $\tilde{t}_i$ получаем при помощи (6).

Таким образом, мы построили $\tilde{t} \in G_\omega$ с условием $g^{\tilde{t}} = h$. Заметим, учитывая вид g_i и $h_{\beta-1_i}$, что все элементы $\tilde{t}_i$ имеют ранг не больше 2. Отсюда $f(\tilde{t}) \leq m$.

Из доказанной теоремы вытекает два возможных критерия сопряженности. Во-первых, элементы $g, h \in G_\omega$ для $\omega \in R_1\Omega_0$ сопряжены, если сопряжены $g^{(2n+3)}$ и $h^{(2n+3)}$ при $n = \max(f(g), f(h), 1)$. Отсюда разрешимость проблемы сопряженности в группе G_ω следует из ее разрешимости в группах $K_\omega^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что группа G_ω является конечной относительно сопряженности.

Во-вторых, если g и h сопряжены, то найдется элемент t ограниченного ранга, который удовлетворяет равенству $g^t = h$. В этом случае сопряженность g и h выясняется ввиду возможности перебора всех элементов, имеющих ранг ниже некоторого фиксированного.

Отметим, что леммы 1–4 не зависят от проблемы сопряженности. По-видимому, идеи, заложенные в них, могут оказаться действенными и при изучении других свойств группы G_ω , а также при изучении p -групп Григорчука, p -групп Гупты и Сидки [4] и других периодических групп похожей конструкции.

В заключение отметим, что совсем недавно Дж. Вилсон и П. Залесский [5] показали конечность относительно сопряженности p -групп Григорчука и p -групп Гупты и Сидки, где p – нечетное простое. Удовлетворяют ли условию их основной теоремы 2-группы Григорчука по-прежнему неизвестно, хотя следствие, как видно из результатов данной работы, является верным.

Автор выражает глубокую признательность В. И. Сущанскому и М. Н. Васякиной за их поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
- [2] Григорчук Р. И. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. № 5. С. 939–985.
- [3] Сущанский В. И. Сплетения и периодические факторизуемые группы // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 8. С. 1073–1091.
- [4] Gupta N., Sidki S. Some infinite p -groups // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 5. С. 584–589.
- [5] Wilson J. S., Zalesskii P. A. Conjugacy separability of certain torsion groups // Arch. Math. (Basel). 1997. V. 68. P. 441–449.