Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Х. Муштари, Теорема Глисона для поля рациональных чисел и полей вычетов, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 584–591

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:54:11

УДК 517.98+511.2

ТЕОРЕМА ГЛИСОНА ДЛЯ ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ПОЛЕЙ ВЫЧЕТОВ

Д. Х. Муштари

Рассматриваются заряды μ со значениями в поле F , заданные на ортомодулярных частично упорядоченных множествах (логиках), состоящих из всех проекторов, действующих в некотором конечномерном линейном пространстве над F . В случаях, когда F – поле рациональных чисел или поле вычетов, доказывается представление Глисона: $\mu(P) = \text{tr}(T_\mu P)$, где T_μ – линейный оператор.

Библиография: 4 названия.

Рассматриваются заряды μ со значениями в поле F на ортомодулярных частично упорядоченных множествах (логиках), состоящих из всех проекторов, действующих в некотором конечномерном линейном пространстве над F . Для некоторых полей F доказывается представление Глисона [1]:

$$\mu(P) = \text{tr}(T_\mu P), \quad (1)$$

где T_μ – линейный оператор.

Классическая теорема Глисона устанавливает (1) для состояний (т.е. вероятностных мер), заданных на логике $\Pi(H)$ всех эрмитовых проекторов на вещественном гильбертовом пространстве H размерности не меньше 3. Представление (1) для зарядов в конечномерном случае требует условия ограниченности [2], иначе даже удовлетворяющий (1) заряд можно испортить суперпозицией с некоторой аддитивной, но неоднородной функцией на вещественной прямой. В бесконечномерном случае С. В. Дорофеев и А. Н. Шерстнёв [3] сняли условие ограниченности. В качестве области определения мер и зарядов можно рассматривать и другие логики, в частности, автор [4] рассмотрел логику $\mathfrak{P}(H)$ всех непрерывных (необязательно эрмитовых) проекторов на H . Доказанная в [4] теорема с учетом [3] может быть сформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H – бесконечномерное вещественное гильбертово пространство, $\mu: \mathfrak{P}(H) \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, сужение которой на любую σ -подалгебру счетно аддитивно. Тогда μ удовлетворяет (1), где ядерный оператор T_μ единствен.

Из теоремы 1 следует, что на логике $\mathfrak{P}(H)$ нет ни одного состояния. Формулировка теоремы использует лишь язык логик и имеет смысл для многих других ситуаций, например, для зарядов на логике $\mathfrak{P}(X)$ всех непрерывных проекторов на некотором линейном топологическом (вещественном или p -адическом) пространстве X . Однако, доказательство таких обобщений приводит к пока еще непреодоленным трудностям. Дело

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01265.

в том, что доказательство теоремы 1 использует саму теорему Глисона применительно к подлогикам $\mathfrak{P}(H)$, изоморфным $\Pi(H)$, каждый раз со своим оператором T_μ , после чего доказывается совпадение всех T_μ . В бесконечномерном негильбертовом случае таких подлогик мало или нет, а в конечномерном случае теорема Глисона для зарядов неверна. Возникает вопрос: можно ли доказывать какие-либо аналоги теоремы 1, не применяя при этом теорему Глисона? Любая аддитивная функция на поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел однородна, поэтому для конечномерных линейных пространств над $\mathbb{Q}$ отмеченный выше контрпример пропадает. Более того, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{P}(\mathbb{Q}^n)$ – логика всех линейных проекторов на пространстве $\mathbb{Q}^n$, $n \geq 3$, $\mu: \mathfrak{P}(\mathbb{Q}^n) \rightarrow \mathbb{Q}$ – заряд, т.е. $\mu(P_1 + P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ для любых ортогональных ($P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$) проекторов P_1 и P_2 в $\mathfrak{P}(\mathbb{Q}^n)$. Тогда

$$\mu(P) = \text{tr}(TP) \quad \text{для всех } P \in \mathfrak{P}(\mathbb{Q}^n), \quad (2)$$

где линейный оператор T определяется по μ единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $n = 3$. Введем базис $e = (1, 0, 0)$, $f = (0, 1, 0)$, $g = (0, 0, 1)$ в $\mathbb{Q}^3$ с биортогональным базисом $\{e', f', g'\}$. Одномерные проекторы P на $\mathbb{Q}^3$ представим в каноническом виде $N(P)^{-1}y' \otimes y$:

- 1) $N(P)^{-1}y'(y) = 1$;
- 2) каждый из векторов y' и y имеет целые координаты, не имеющие общего множителя;
- 3) $N(P)$ – натуральное число, которое будем называть *индексом* проектора P .

По определению $y' \otimes y: x \mapsto y'(x)y$. Проекторы $N(P_1)^{-1}y'_1 \otimes y_1$ и $N(P_2)^{-1}y'_2 \otimes y_2$ ортогональны тогда и только тогда, когда $y'_1(y_2) = y'_2(y_1) = 0$. С каждой тройкой попарно ортогональных одномерных проекторов $N(P_1)^{-1}y'_1 \otimes y_1$, $N(P_2)^{-1}y'_2 \otimes y_2$, $N(P_3)^{-1}y'_3 \otimes y_3$ (такие тройки будем называть *реперными*) ассоциируются две матрицы: $A(P_1, P_2, P_3)$, строки которой – векторы y'_1, y'_2, y'_3 , и $X(P_1, P_2, P_3)$, строки которой – векторы y_1, y_2, y_3 .

Шаг 0. Введем проекторы $P_1, \dots, P_9$, матрицы которых определяют линейный базис в девятимерном пространстве всех 3×3 рациональных матриц. Для определенности, базису $\{e, f, g\}$ в $\mathbb{Q}^3$ сопоставим базис из проекторов $\{P_i(e, f, g) : 1 \leq i \leq 9\}$:

$$\begin{aligned} P_1 &= e' \otimes e, & P_2 &= f' \otimes f, & P_3 &= g' \otimes g, & P_4 &= (e' + f') \otimes e, & P_5 &= (e' + g') \otimes e, \\ P_6 &= (e' + f') \otimes f, & P_7 &= (f' + g') \otimes f, & P_8 &= (e' + g') \otimes g, & P_9 &= (f' + g') \otimes g. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим, μ удовлетворяет (2). Тогда оператор T однозначно задается всеми значениями $\mu(P_i)$, $1 \leq i \leq 9$. Поэтому нам необходимо доказать лишь то, что любой заряд на $\mathfrak{P}(\mathbb{Q}^3)$ однозначно задается своими значениями на всех P_i , $1 \leq i \leq 9$, а следовательно, совпадает с некоторым зарядом, который имеет те же значения на P_i и задается соотношением (2).

Воспользуемся равенствами

$$\mu(P_1) + \mu(P_2) + \mu(P_3) - \mu(P'_1) - \mu(P'_2) - \mu(P'_3) = 0 \quad (4)$$

для всех реперных троек $\{P'_1, P'_2, P'_3\}$. Фиксируем “область единственности” $\{P_i : 1 \leq i \leq 9\}$ и расширим ее до всей логики $\mathfrak{P}(\mathbb{Q}^3)$.

Назовем преобразование тройки векторов $\{x, y, z\}$ *элементарным*, если оно получено последовательным применением нескольких преобразований вида:

- 1) замена одного вектора его разностью или суммой с другим вектором тройки;
- 2) перестановка векторов;
- 3) изменение знака одного из векторов.

Каждому элементарному преобразованию базиса $\{e, f, g\}$ сопоставим *элементарное преобразование координат* в пространствах $\mathbb{Q}^3$ и $(\mathbb{Q}^3)'$. Сформулируем некоторые факты об элементарных преобразованиях координат U , которые нам потребуются.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) U – взаимно однозначное отображение целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{Q}^3$ на себя;
- б) свойство координат целочисленного вектора в $\mathbb{Q}^3$ или в $(\mathbb{Q}^3)'$ не имеет общий множитель сокращается после применения U ;
- в) U не меняет индекс проектора;
- г) определитель, строки которого – координаты векторов x_1, x_2, x_3 в $\mathbb{Q}^3$, совпадает по абсолютной величине с определителем, составленным из координат этих векторов после применения U , что верно и для векторов в сопряженном пространстве.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$P_1 = N(P_1)^{-1}y'_1 \otimes y_1, \quad P_2 = N(P_2)^{-1}y'_2 \otimes y_2, \quad P_3 = N(P_3)^{-1}y'_3 \otimes y_3$$

– реперная тройка, причем $N(P_1) = p$, $N(P_2) = 1$, $N(P_3) = p$. Тогда

$$|\det(y_1, y_2, y_3)| = |\det(y'_1, y'_2, y'_3)| = p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойства 2) канонического вида проектора P_1 и утверждений б), в) леммы 1 легко следует, что существует такое элементарное преобразование координат, которое переводит y'_1 в $(1, 0, 0)$, а y_1 в вектор с целыми координатами $(p, t, 0)$. При этом в силу ортогональности проекторов P_2 преобразуется к виду $(\alpha, \beta, \gamma) \otimes (0, \rho, s)$, затем не меняющим вид P_1 элементарным преобразованием двух последних координат P_2 преобразуется к виду $(\alpha, \beta, 0) \otimes (0, \varphi, \psi)$. Согласно утверждению в) леммы 1 $\beta = \varphi = 1$ и P_3 преобразуется в $p^{-1}(\tau, \pi, p) \otimes (0, 0, 1)$. Согласно утверждению г) леммы 1 оба определителя равны p .

ЛЕММА 3. *Если $N(P) = pq$, где p и q взаимно просты, то существует реперная тройка $\{P, P_1, P_2\}$ такая, что $N(P_1) = p$ и $N(P_2) = q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарным преобразованием координат P приводится к виду $(pq)^{-1}(1, 0, 0) \otimes (pq, s, 0)$, где pq и s взаимно просты. В новых координатах определим

$$\begin{aligned} P_1 &= N(P_1)^{-1}(-ls, lpq, np) \otimes (0, 1, p), \\ P_2 &= N(P_2)^{-1}(-s, pq, -q) \otimes (0, n, -lq), \end{aligned} \quad n, l \in \mathbb{N}.$$

Существуют целые n и l такие, что $np + lq = 1$. Тогда $N(P_1) = p$, $N(P_2) = q$.

Шаг 1. Обозначим через $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$ множество всех проекторов, матрицы которых в базисе $\{e, f, g\}$ состоят только из чисел ± 1 или 0. Оно содержит все базисные проекторы P_i и состоит из 87 элементов.

ЛЕММА 4. *Если два заряда μ и ν совпадают на некоторых девяти линейно независимых элементах в $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$, то они совпадают на всем $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в вычислении ранга системы в всех уравнений вида (4), где тройки $\{P'_1, P'_2, P'_3\}$ взяты из $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$. С помощью компьютера найдено, что число таких уравнений равно 105 и что ранг системы равен 78 (причем не равный 0 определитель порядка 78 равен 1). Это доказывает лемму.

Шаг 2. Кроме $\{P_i(e, f, g) : 1 \leq i \leq 9\}$ множество $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$ содержит и другие базисы вида $\{P_i(x, y, z) : 1 \leq i \leq 9\}$, определяемые тем же правилом, исходя из некоторых базисов $\{x, y, z\}$ в $\mathbb{Q}^3$. Используя это, докажем основную лемму.

ЛЕММА 5. Если заряд μ задан на девяти элементах базиса $\{P_i(x, y, z) : 1 \leq i \leq 9\}$, то этот заряд определен единственным образом на множестве $\mathfrak{P}(x, y, z; \mathbb{Z})$ всех проекторов с целыми матричными элементами по отношению к базису $\{x, y, z\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности $x = e, y = f, z = g$. Покажем, что элементарными преобразованиями одного базиса в другой область единственности расширяется до множества $\mathfrak{P}(e, f, g; \mathbb{Z})$.

Для определенности рассмотрим преобразование базиса $\{e, f, g\}$ в $\{e + f, f, g\}$ с биортогональным базисом $\{e', f' - e', g'\}$. Легко проверяется, что соответствующий (см. (3)) базис $\{P_i(e + f, f, g) : 1 \leq i \leq 9\}$ также содержится в области единственности $\mathfrak{P}_0(e, f, g)$. В силу леммы 4 область единственности содержит также и 87 проекторов множества $\mathfrak{P}_0(e + f, f, g)$.

Итак, элементарные преобразования не выводят из области единственности. Пусть $N(P) = 1$, согласно лемме 3 P входит в реперную тройку $P = y' \otimes y, P_1 = y'_1 \otimes y_1, P_2 = y'_2 \otimes y_2$. Достаточно показать, что элементарным преобразованием базиса $\{e, f, g\}$ мы получим (y, y_1, y_2) . При элементарных преобразованиях базисов целочисленная матрица $X(P, P_1, P_2)$, составленная из векторов (y, y_1, y_2) , преобразуется с помощью элементарных преобразований строк.

Введем некоторое преобразование произвольной целочисленной матрицы M , являющееся результатом последовательности элементарных преобразований ее строк. Сначала обнуляются второй и третий элементы первого столбца, затем элементарными преобразованиями второй и третьей строк обнуляется третий элемент второго столбца. Далее диагональ приводится к неотрицательной, после чего все числа над диагональю делаются как можно меньше, но неотрицательными. Результат этой последовательности преобразований назовем *редукцией* матрицы M и обозначим $\text{red}(M)$.

Редукция свела матрицу со строками y, y_1, y_2 к целочисленной неотрицательной треугольной матрице. Согласно лемме 2 ее определитель равен 1. Поэтому на диагонали стоят 1 и, на самом деле, получившаяся матрица единичная. Следовательно, соответствующим редукции преобразованием базис $\{y, y_1, y_2\}$ переводится в $\{e, f, g\}$. Последовательность обратных преобразований включает P в область единственности.

Шаг 3. Обозначим через $\mathfrak{P}(p)$ множество всех проекторов P таких, что $N(P) = p$. Всюду в этом разделе $p = q^m$, где q – простое число. При продолжении области единственности на $\mathfrak{P}(p)$ возникают некоторые трудности. Например, рассмотрим $P = [p_{ij}]$ такой, что $p_{11} = 1/p$, где p велико. Пусть μ – глисоновский заряд с оператором $T_\mu = P_1(e, f, g)$. Если мы докажем включение $\mathfrak{P}(p)$ в область единственности, то получим $\mu(P) = 1/p$. Однако, для доказательства этого равенства можно использовать лишь уравнения вида (4), т.е. линейные уравнения с коэффициентами ± 1 или 0 при неизвестных, причем их правые части – целые числа (значения μ на тех проекторах, которые принадлежат $\mathfrak{P}(e, f, g; \mathbb{Z})$). Итак, из теоремы 2, в частности, следует существование

матрицы, состоящей из чисел ± 1 или 0, каждая строка которой задается некоторой реперной тройкой и определитель делится на p .

ЛЕММА 6. Пусть $P = p^{-1}(a, b, c) \otimes (x, y, z)$, z не делится на q . Пусть проекторы $P, P_1 = (a_1, b_1, c_1) \otimes (x_1, y_1, z_1), P_2 = p^{-1}(a_2, b_2, c_2) \otimes (x_2, y_2, z_2)$ составляют реперную тройку. Тогда преобразование редукции приводит матрицу $A(P, P_1, P_2)$ к виду

$$M(\alpha, \beta, p) = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ не зависят от выбора P_1 и P_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$a_{11} = a_{22} = 1. \quad (5)$$

Очевидно, что (x, y, z) пропорционален вектору

$$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Эти определители не могут одновременно делиться на q . Действительно, это означало бы, что две строки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) пропорциональны $(\text{mod } q)$, причем по свойству 2) канонического представления коэффициент пропорциональности не может делиться на q . Однако, тогда равенство $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = 1$ и вытекающее из $P_1 \perp P_2$ равенство $a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 = 0$ одновременно выполняться не могут.

Итак, если z не делится на q , то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod{q}.$$

Это означает, что матрица, составленная из двух первых столбцов матрицы $A(P, P_1, P_2)$, имеет ранг $(\text{mod } q)$ равный 2. Элементарные операции со строками не меняют этот ранг, в то же время, если неверно (5), то ранг $(\text{mod } q)$ нашей матрицы равен 1. Напомним (лемма 2), что $|\det(A(P, P_1, P_2))| = p$, поэтому $a_{11} = a_{22} = 1, a_{33} = p$. Независимость чисел α, β от выбора P_1 и P_2 мы покажем ниже.

Далее, с каждым проектором $P \in \mathfrak{P}(p)$ будет ассоциирована реперная тройка $\{P, P_1, P_2\}$ из леммы 6. Обозначим через $\mathfrak{P}^*(i, j, k; \alpha, \beta, p)$ (соответственно $\mathfrak{P}_*(i, j, k; \alpha, \beta, p)$) множество всех P таких, что после перестановки трех координат в порядке i -я, j -я, k -я и после редукции получим $\text{red}(A(P, P_1, P_2)) = M(\alpha, \beta, p)$ (соответственно $\text{red}(X(P, P_1, P_2)) = M(\alpha, \beta, p)$). Далее, для определенности рассмотрим случай $i = 1, j = 2, k = 3$, а проектор P возьмем из леммы 6. Легко видеть, что $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p) = \mathfrak{P}(e_1, f_1, g_1; \mathbb{Z})$, где $e_1 = (1, 0, 0), f_1 = (0, 1, 0), g_1 = p^{-1}(-\alpha, -\beta, 1)$. Согласно лемме 5 для доказательства единственности заряда на всех элементах $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$ достаточно включить в область единственности следующие элементы базиса в $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$:

$$\begin{aligned} P_1(\alpha, \beta) &= (1, 0, \alpha) \otimes (1, 0, 0), & P_2(\alpha, \beta) &= (0, 1, \beta) \otimes (0, 1, 0), \\ P_3(\alpha, \beta) &= p^{-1}(0, 0, p) \otimes (-\alpha, -\beta, 1), & P_4(\alpha, \beta) &= (1, 1, \alpha + \beta) \otimes (1, 0, 0), \\ P_5(\alpha, \beta) &= (1, 0, p + \alpha) \otimes (1, 0, 0), & P_6(\alpha, \beta) &= (1, 1, \alpha + \beta) \otimes (0, 1, 0), \\ P_7(\alpha, \beta) &= (0, 1, p + \beta) \otimes (0, 1, 0), & P_8(\alpha, \beta) &= p^{-1}(1, 0, p + \alpha) \otimes (-\alpha, -\beta, 1), \\ P_9(\alpha, \beta) &= p^{-1}(0, 1, p + \beta) \otimes (-\alpha, -\beta, 1). \end{aligned}$$

Для вычисления α и β выберем одну из координат (a или b) в каноническом представлении проектора P , которая не делится на q , и рассмотрим соответствующий столбец в матрице проектора P . Сопоставляя его с матричными элементами проекторов из базиса, мы видим, что если натуральное число n удовлетворяет условию $1 = nz \pmod{p}$, то $-\alpha = nx \pmod{p}$, $-\beta = ny \pmod{p}$. Отсюда следует, что α и β в лемме 6 не зависят от выбора P_1 и P_2 .

Отметим, что лишь два элемента этого базиса, P_8 и P_9 , принадлежат $\mathfrak{P}(p)$, остальные семь принадлежат $\mathfrak{P}(e, f, g; \mathbb{Z})$, и согласно лемме 5 значение заряда на них определено единственным образом. Рассмотрим матричные элементы $p_{ij}(k)$ проекторов P_k . Мы видим, что $p_{31}(k) \neq 0$ лишь для $k = 8$ и $p_{32}(k) \neq 0$ лишь для $k = 9$. Отсюда следует, что в разложении матрицы произвольного проектора $[p_{ij}] \in \mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$ по базисным элементам P_i коэффициент при P_8 равен $p \cdot p_{31}$, а коэффициент при P_9 равен $p \cdot p_{32}$. То же верно и для $\mathfrak{P}_*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$, в котором фиксирован базис из элементов $\{P'_i(\alpha, \beta) : 1 \leq i \leq 9\}$, отличающихся от элементов $P_i(\alpha, \beta)$ лишь порядком сомножителей в тензорном произведении.

Допустим, что $\alpha, \beta, \varphi, \xi$ — отличные от 0 целые числа такие, что

$$1 + \alpha\varphi + \beta\xi = p. \quad (6)$$

Рассмотрим проекторы

$$\begin{aligned} \pi_1 &= p^{-1}(\alpha, \beta, 1) \otimes (\varphi, \xi, 1), & \pi_2 &= p^{-1}(\alpha, \beta, 1) \otimes (\varphi + p\beta, \xi - p\alpha, 1), \\ \pi_3 &= p^{-1}(\alpha + p\xi, \beta - p\varphi, 1) \otimes (\varphi, \xi, 1), & \pi_4 &= p^{-1}(\alpha + p\beta, \beta, 1) \otimes (\varphi, \xi - p\varphi, 1). \end{aligned}$$

Согласно приведенному выше доказательству единственности в лемме 6 все π_i принадлежат $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p) \cap \mathfrak{P}_*(1, 2, 3; p - \alpha', p - \beta', p)$, где $\alpha' = \alpha \pmod{p}$, $\beta' = \beta \pmod{p}$, $\varphi' = \varphi \pmod{p}$, $\xi' = \xi \pmod{p}$. Значения заряда μ на каждом π_i можно выразить либо через его значения на базисных проекторах из $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p)$ (напомним, что из них лишь P_8 и P_9 не входят в $\mathfrak{P}(e, f, g; \mathbb{Z})$), либо через его значения на базисных проекторах из $\mathfrak{P}_*(1, 2, 3; p - \alpha', p - \beta', p)$. Таким образом, мы получаем четыре уравнения относительно четырех неизвестных: $u = \mu(P_8)$ и $v = \mu(P_9)$, где $P_8, P_9 \in \mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p)$, и $u' = \mu(P'_8)$ и $v' = \mu(P'_9)$, где $P'_8, P'_9 \in \mathfrak{P}_*(1, 2, 3; p - \alpha', p - \beta', p)$. Коэффициенты при неизвестных равны матричным элементам $p_{13}, p_{23}, p_{31}, p_{32}$ проекторов π_i . Выпишем получившиеся уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v - \varphi u' - \xi v' &= c_1, & \alpha u + \beta v - (\varphi + p\beta)u' - (\xi - p\alpha)v' &= c_2, \\ (\alpha + p\xi)u + (\beta - p\varphi)v - \varphi u' - \xi v' &= c_3, & (\alpha + p\beta)u + \beta v - \varphi u' - (\xi - p\varphi)v' &= c_4, \end{aligned}$$

где числа c_i вычисляются по значениям тех коэффициентов, которые соответствуют элементам базисов, принадлежащим $\mathfrak{P}(e, f, g; \mathbb{Z})$. Определитель системы равен $-\varphi\beta p^3 \times (2\alpha\varphi + 2\xi\beta) = -2\varphi\beta p^3(p - 1)$. Он отличен от 0, так как $\varphi \neq 0$, $\beta \neq 0$. Поэтому однозначно определены значения заряда как на всех элементах $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p)$, так и на всех элементах $\mathfrak{P}_*(1, 2, 3; p - \alpha', p - \beta', p)$.

Легко показать, что если φ' не делится на q , а ξ' любое, то всегда можно найти $\varphi, \xi, \alpha, \beta$ такие, что имеет место (6) и $\varphi' = \varphi \pmod{p}$, $\xi' = \xi \pmod{p}$. Поэтому заряд однозначно задан на $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p)$. То же верно, если ξ не делится на q . Если β' или α' не делится на q , то заряд однозначно задан на $\mathfrak{P}_*(1, 2, 3; p - \alpha', p - \beta', p)$.

Итак, если проектор P из леммы 6 таков, что sz не делится на q (или by , или ax), то по крайней мере одно из чисел ax или by также не делится на q , согласно данному выше описанию P содержится в некотором $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; p - \varphi', p - \xi', p)$, причем хотя бы одно из чисел φ', ξ' не делится на q . Кроме того, P принадлежит области единственности.

Несколько сложнее ситуация, когда в сумме $N(P) = ax + by + cz$ каждое слагаемое делится на q . По определению троек a, b, c и x, y, z хотя бы одно из этих чисел не делится на q . Для определенности предположим, что это z . Тогда $P \in \mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$. Пусть α и β делятся на q . Нужно показать, что заряд μ единствен на проекторах $P_8(\alpha, \beta)$ и $P_9(\alpha, \beta)$. Заменяем эти проекторы на другие проекторы из $\mathfrak{P}^*(1, 2, 3; \alpha, \beta, p)$, которые вместе с остальными $P_i(\alpha, \beta)$ составляют базис, а именно, на

$$\begin{aligned} p^{-1}(1, -1, \alpha - \beta) \otimes (-\alpha, -\beta, 1) &\in \mathfrak{P}_*(2, 3, 1; 1, -\alpha + \beta \pmod{p}, p), \\ p^{-1}(1, 1, 2p + \alpha + \beta) \otimes (-\alpha, -\beta, 1) &\in \mathfrak{P}_*(2, 3, 1; p - 1, -\alpha - \beta \pmod{p}, p). \end{aligned}$$

Согласно доказанному заряд единствен на этих проекторах, а следовательно, и на $P_8(\alpha, \beta)$ и $P_9(\alpha, \beta)$.

Итак, мы доказали единственность заряда для проекторов, индексы которых – степени простых чисел. Благодаря лемме 3 к этому случаю сводится общий случай. Теорема 2 доказана для $n = 3$.

Шаг 4. Теорема 2 для произвольного n доказывается индукцией по n . Для простоты опишем лишь переход от $n = 3$ к $n = 4$.

Зададим проекторы

$$\begin{aligned} e' \otimes e &= (1, 0, 0, 0) \otimes (1, 0, 0, 0), \quad f' \otimes f = (0, 1, 0, 0) \otimes (0, 1, 0, 0), \\ g' \otimes g &= (0, 0, 1, 0) \otimes (0, 0, 1, 0), \quad h' \otimes h = (0, 0, 0, 1) \otimes (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

и рассмотрим еще двенадцать базисных проекторов

$$\begin{aligned} e' \otimes (e + f), \quad e' \otimes (e + g), \quad e' \otimes (e + h), \quad f' \otimes (f + e), \quad f' \otimes (f + g), \quad f' \otimes (f + h), \\ g' \otimes (g + e), \quad g' \otimes (g + f), \quad g' \otimes (g + h), \quad h' \otimes (h + e), \quad h' \otimes (h + f), \quad h' \otimes (h + g). \end{aligned}$$

Фиксируем заряд μ на этих проекторах. Из доказанного ранее следует, что заряд можно однозначно продолжить на все проекторы вида

$$N(P)^{-1}(\varphi u' + \eta v' + \chi w') \otimes (\alpha u + \beta v + \gamma w), \quad (7)$$

где u, v, w – три произвольных вектора из канонического базиса $\{e, f, g, h\}$.

Возьмем проектор общего вида $(\varphi e' + \eta f' + \chi g' + \tau h') \otimes (\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)$. Он содержится в линейной оболочке девяти линейно независимых проекторов

$$\begin{aligned} N(P)^{-1}(\varphi e' + \eta f') \otimes (\alpha e + \beta f), \quad g' \otimes g, \quad h' \otimes h, \\ N(P)^{-1}(\varphi e' + \eta f') \otimes (\alpha e + \beta f + g), \quad N(P)^{-1}(\varphi e' + \eta f') \otimes (\alpha e + \beta f + h), \\ g' \otimes (\alpha e + \beta f + g), \quad g' \otimes (g + h), \quad h' \otimes (\alpha e + \beta f + h), \quad h' \otimes (g + h), \end{aligned}$$

причем каждый из этих проекторов удовлетворяет условию (7). Таким образом, заряд любого четырехмерного проектора однозначно определен.

Точно так же осуществляется переход от размерности n к $n + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности, на первом, втором и четвертом шагах мы доказали теорему 2 для логики $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}^n)$.

Сформулируем теорему 2 в алгебраических терминах.

ТЕОРЕМА 3. Если $n \geq 3$, то любая рациональнозначная аддитивная функция на множестве всех идемпотентов в $\text{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$ имеет аддитивное продолжение на все $\text{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$.

ЗАДАЧА 1. Пусть R, R_1 – два кольца, $\mathfrak{P}$ – логика всех идемпотентов в кольце R . В каком случае любой аддитивный оператор $\mu: \mathfrak{P} \rightarrow R_1$ допускает аддитивное продолжение на все R ?

Кроме колец $\text{Hom}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n)$ и $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$ это утверждение доказано для кольца всех операторов в конечномерном пространстве над полем вычетов (для них повторяется доказательство леммы 5, причем существенно используется, что детерминант ненулевого определителя на первом шаге можно выбрать равным 1). Таким образом, верна

ТЕОРЕМА 4. Пусть F – поле вычетов по простому модулю p , $n \geq 3$, $\mathfrak{P}(F^n)$ – логика всех линейных проекторов на пространстве F^n , $\mu: \mathfrak{P}(F^n) \rightarrow F$ – заряд. Тогда

$$\mu(P) = \text{tr}(TP) \quad \text{для всех } P \in \mathfrak{P}(F^n),$$

где линейный оператор T определяется по μ единственным образом.

Решение задачи 1 для операторов в линейных пространствах над произвольным полем характеристики 0 позволило бы получить, используя счетную аддитивность, аналоги теоремы Глисона для некоторых бесконечномерных линейных топологических пространств над полем вещественных или p -адических чисел.

ЗАДАЧА 2. Интересно доказать аналог теоремы 2 для логики $\Pi(\mathbb{Q}^3)$ всех проекторов, которые являются эрмитовыми по отношению к каноническому скалярному произведению, заданному базисом $\{e, f, g\}$.

К сожалению, использованный в настоящей статье прием перехода от одного базиса к другому в этой ситуации не работает.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gleason A. M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // J. Math. Mech. 1957. V. 6. №6. P. 885–893.
- [2] Шерстнёв А. Н. Понятие заряда в некоммукативной схеме теории меры // Вероятностные методы и кибернетика. №10–11. Казань, 1974. С. 68–72.
- [3] Дорофеев С. В., Шерстнёв А. Н. Функции реперного вида и их применения // Изв. вузов. Матем. 1990. №4. С. 23–29.
- [4] Муштари Д. Х. Логика проекторов в банаховых пространствах // Изв. вузов. Матем. 1989. №8. С. 44–52.

Научно-исследовательский институт математики и механики
Казанского государственного университета
E-mail: Daniar.Mushtari@ksu.ru

Поступило
12.07.96