Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рожков, Проблема сопряженности в одной группе автоморфизмов бесконечного дерева, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 592–597

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:25:13

УДК 512.54

ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЕННОСТИ В ОДНОЙ ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ БЕСКОНЕЧНОГО ДЕРЕВА

А. В. Рожков

Построен алгоритм распознавания сопряженности элементов в 2-группе Григорчука.

Библиография: 3 названия.

Речь идет о 3-порожденной 2-группе Григорчука [1], активно изучаемой в последнее время. В данной работе решается проблема сопряженности в группе Григорчука. Указывается алгоритм, позволяющий за конечное число шагов выяснить являются ли два данных слова в алфавите из канонических порождающих сопряженными или нет, а также указать сопрягающие элементы. В работе используются некоторые утверждения из [2].

В работе [3] решается проблема сопряженности в p -группах Григорчука при нечетном p . Отметим, что для 2-группы Григорчука доказательства из [3] не проходят, поскольку сужения на поддеревья (костабилизаторы) в 2-группе Григорчука не содержат коммутанта соответствующей индуцированной группы (срезки группы). Однако не исключено, что при доработке метода, предложенного в [3], возможно решение проблемы сопряженности и в 2-группе Григорчука. Отметим однако, что решение проблемы сопряженности в [3] использует методы математической логики и мало полезно при практических вычислениях.

1. Основные соотношения. Группа Григорчука $G = \text{gr}(c, f, g, h)$ задается четырьмя, фактически тремя, автоморфизмами бесконечного однородного 2-дерева T :

где $\pi = (0, 1)$ – подстановка ребер, последовательности

$$\pi, \pi, 1, \dots, \pi, 1, \pi, \dots, 1, \pi, \pi, \dots$$

циклически повторяются, а во всех непомеченных вершинах стоят тождественные подстановки. Из определения следует, что

$$c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1, \quad fg = h, \quad gh = f, \quad hf = g. \quad (1)$$

Мы будем использовать следующие обозначения. Если v – вершина, то $T_{(v)}$ – поддереву с начальной вершиной v . Деревья T и $T_{(v)}$ естественным образом изоморфны. Пусть $\text{id}^{(v)}: T \rightarrow T_{(v)}$ – указанный изоморфизм, который мы будем обозначать через $\text{id}^{(n)}$, если важна только длина n вершины v . Указанный изоморфизм естественным образом задает изоморфизм $\text{Aut } T \rightarrow \text{Aut } T_{(v)}$ групп автоморфизмов деревьев, который мы будем обозначать теми же символами $\text{id}^{(v)}$ и $\text{id}^{(n)}$.

Если V – некоторое множество вершин дерева T , то по определению

$$\text{st}_G(V) = \bigcap_{v \in V} \text{st}_G(v), \quad \text{cost}_G(V) = \text{gr} \left(\bigcup_{v \in V} \text{st}_G(T \setminus T_{(v)}) \right)$$

– стабилизатор и костаблизатор множества V соответственно. Пусть $|v|$ – длина вершины v . Тогда по определению

$$\text{st}_G(n) = \bigcap_{|v|=n} \text{st}_G(v), \quad \text{cost}_G(n) = \text{gr} \left(\bigcup_{|v|=n} \text{cost}_G(v) \right).$$

Если $x \in \text{st}_G(v)$, то сужение автоморфизма x на поддереву $T_{(v)}$ будем обозначать через $x_{(v)}$ и называть v -срезкой. Если $x \in \text{st}_G(n)$, то автоморфизм x однозначно определяется своими v -срезками, $|v| = n$, и естественно отождествление

$$x = (\dots, x_{(v)}, \dots) \circ \text{id}^{(n)}, \quad |v| = n.$$

Чаще всего мы будем пользоваться им при $n = 1$, опуская в обозначении $\text{id}^{(1)}$ верхний индекс.

В указанных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} f &= (g, c) \circ \text{id}, \quad cfc = (c, g) \circ \text{id}, \\ g &= (h, c) \circ \text{id}, \quad cgc = (c, h) \circ \text{id}, \quad h = (f, 1) \circ \text{id}, \quad chc = (1, f) \circ \text{id}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычисления показывают, что

$$(ch)^4 = (cg)^8 = (cf)^{16} = 1, \quad \text{gr}(c, h) \cong D_4, \quad \text{gr}(c, g) \cong D_8, \quad \text{gr}(c, f) \cong D_{16}.$$

Пусть φ – автоморфизм диэдральной группы $\text{gr}(c, h)$, меняющий местами порождающие элементы.

Всякий элемент x группы G может быть записан в виде

$$c^\varepsilon * c * \dots * c * c^\delta, \quad * \in \{f, g, h\}, \quad \varepsilon, \delta \in \{0, 1\}. \quad (3)$$

Длиной такой записи мы назовем число входящих в нее символов c, f, g, h . Длину самой короткой записи назовем *длиной элемента* x и обозначим через $\partial(x)$. На множестве слов вида (3) введем частичный порядок. Положим $x < y$, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\partial(x) < \partial(y)$;
- 2) $\partial(x) = \partial(y)$, слово x содержит вхождения символа h , а слово y нет;
- 3) $\partial(x) = \partial(y)$, слово x содержит вхождения символа g , а слово y не содержит ни g , ни h .

Отождествим символы c и $c \circ \text{id}$, f и $f \circ \text{id}$, и т.д. Теперь мы можем сравнивать слова x и $x_{(u)}$. Как показано в [2], если $x = (x_1, x_2)$, то $x_1, x_2 < x$. Если $x = (x_1, x_2)c$, то $x_1x_2, x_2x_1 < x$. Этим мы в дальнейшем будем часто пользоваться. Отметим, что введенный нами порядок задан на множестве слов вида (3), а не на множестве элементов группы Григорчука.

В обозначениях стабилизаторов и костабilizаторов, если они рассматриваются во всей группе G или во всей группе $G \circ \text{id}^{(n)}$, мы будем опускать для краткости индексы G и $G \circ \text{id}^{(n)}$.

Если X – подмножество группы G , то $\overline{X}^G$ – нормальное замыкание множества X в группе G .

ЛЕММА 1 [2]. Пусть $K = \overline{(cf)^2}^G$, $L = \overline{f}^G$ – нормальные подгруппы. Тогда имеют место соотношения:

- 1) $K = \text{gr}((cf)^2, (1, (cf)^2) \circ \text{id}, ((cf)^2, 1) \circ \text{id})$, $L = \text{gr}(f, K)$;
- 2) $G/L \cong D_4 \cong \text{gr}(c, h)$, $G/K \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong \text{gr}(c, h) \times \text{gr}(f)$;
- 3) $\text{cost}(v)_{(v)} = L \circ \text{id}$ *нпу* $|v| = 1$;
- 4) $\text{cost}(v)_{(v)} = \text{cost}_K(v)_{(v)} = K \circ \text{id}^{(n)}$ *нпу* $|v| = n > 1$;
- 5) $K > \text{st}(3)$.

В силу леммы 1 всякий $x \in G$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} x &= t(x)k(x), & t(x) &\in \text{gr}(c, h) \times \text{gr}(f), & k(x) &\in K, \\ x &= s(x)l(x), & s(x) &\in \text{gr}(c, h), & l(x) &\in L. \end{aligned}$$

Очевидно, отображения t и s являются гомоморфизмами.

Поскольку $\text{st}(1) = \text{gr}(h, h^c, g, g^c)$ и первые два порождающих принадлежат костабilizатору $\text{cost}(1)$, из леммы 4 из [2], описывающей костабilizатор $\text{cost}(1)$, непосредственно следует

ЛЕММА 2. Имеют место соотношения $\text{st}(1) = \text{gr}(g, cgc) \text{cost}(1)$; в частности, если $x \in \text{st}(1)$, то $x = (x_1, x_2)$, где $s(x_2) = \varphi(s(x_1))$, а $l(x_1), l(x_2)$ – любые элементы из $L \circ \text{id}$.

Следующая лемма не сформулирована в явном виде в [2], но может быть получена при сопоставлении формулировок леммы 2 из [2], описывающей факторгруппу по подгруппе K , и лемм 6, 9–11 из [2], описывающих централизаторы порождающих элементов 2-группы Григорчука.

ЛЕММА 3. Смежным классам по подгруппе K принадлежат следующие множества $D(x)$ элементов из централизатора $C(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} \{c, (ch)^2, hch, (cf)^8\} & \text{нпу } x = c, \\ \{f, g, h, (cg)^4\} & \text{нпу } x \in \{f, g\}, \\ \{f, g, h, chc, (ch)^2, fchc, f(ch)^2, (1, (cf)^2) \circ \text{id}\} & \text{нпу } x = h. \end{cases}$$

Отметим, что следующая лемма восходит к работе [1], хотя явно там и не сформулирована. Мы приводим ее доказательство в силу его небольшого объема, а также как наиболее ясный пример рассуждений, лежащих в основе всех доказательств данной статьи.

ЛЕММА 4. В группе G алгоритмически разрешимы:

- 1) запись элемента $x \in G$ в виде $(x_1, x_2)c^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$;
- 2) проблема равенства слов;
- 3) разложения вида $x = t(x)k(x)$, $x = s(x)l(x)$, в частности, проблема вхождения в подгруппы K, L ;
- 4) определение смежного класса по подгруппе K , которому принадлежит элемент x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Всякий элемент x группы G записывается как некоторое слово вида (3). Пусть число вхождений символа c в слово x нечетно. Тогда положим $x = xc \cdot c$. После этого к слову xc применяем соотношения (1), (2) и получаем требуемую запись.

2) Проблему равенства докажем индукцией по частичному порядку. Если $x \in \{c, f, g, h\}$, то $x \neq 1$. Пусть для всех элементов группы G , меньших элемента x в смысле частичного порядка, равенство единице алгоритмически распознаваемо. В силу 1) найдем запись $x = (x_1, x_2)c^\varepsilon$. Если $\varepsilon \neq 1$, то $x \neq 1$. Если же $\varepsilon = 0$, то, поскольку $x_1, x_2 < x$, по предположению индукции равенство x_1, x_2 единице алгоритмически разрешимо.

3) Пусть x – слово вида (3). Используя тождество $g = fh$, заменяем все символы g на слово fh . Все подслова вида cf, fc заменяем на $(cf)^2fc$ и $(fc)^2cf$ соответственно. После этого перебрасываем символы f в начало слова x , затем в начало перебрасываем символы c, h . Таким образом, слева получается слово $t(x)$ вида $t'(x)t''(x)$, где $t'(x)$ – слово в алфавите $\{c, h\}$, а $t''(x)$ есть 1 или символ f . Справа же остается слово $k(x)$, принадлежащее, очевидно, подгруппе K . Для подгруппы L рассуждения те же, только перебрасываем влево символы c, h через символ f .

4) С помощью утверждения 5) леммы 1 переходим к факторгруппе $G/\text{st}(3) \cong \mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2$ (см. [2]) и дальнейшее очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)})$ – элементы группы G такие, что $y = (z^{(i)})^{-1}xz^{(i)}$, $i \in I$, все сопрягающие элементы $z^{(i)}$ лежат в разных смежных классах по подгруппе K и I – максимальное множество с этим свойством. Пусть, далее, $z_1^{(j)}, z_2^{(j')}$, $j \in J, j' \in J'$, – все сопрягающие элементы для y_1 с x_1 и y_2 с x_2 соответственно, лежащие в разных смежных классах по подгруппе $K \circ \text{id}$.

Тогда среди пар $z^{(jj')} = (z_1^{(j)}, z_2^{(j')})$ таких, что $z^{(jj')} \in G$, ровно $|I|$ лежат в разных смежных классах по подгруппе K . Более того, для всякого $i \in I$ найдутся $j \in J, j' \in J'$ такие, что $z^{(i)} \equiv z^{(jj')} \pmod{K}$. Поиск элементов $z^{(jj')}$ может быть осуществлен за конечное число шагов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Очевидно, искомым пар элементов $(z_1^{(j)}, z_2^{(j')})$ не может быть больше чем $|I|$, иначе множество I не было бы максимальным. Рассмотрим элемент $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)})$, $i \in I$. Тогда $z_1^{(i)}$ лежит в некотором смежном классе по подгруппе $K \circ \text{id}$ и, значит, найдется некоторый $z_1^{(j)}$, $j \in J$, такой, что $z_1^{(i)} \equiv z_1^{(j)} \pmod{K \circ \text{id}}$. Аналогично, найдется $z_2^{(j')}$, $j' \in J'$, такой, что $z_2^{(i)} \equiv z_2^{(j')} \pmod{K \circ \text{id}}$.

Положим $z^{(jj')} = (z_1^{(j)}, z_2^{(j')})$. Тогда $z^{(i)} \equiv z^{(jj')} \pmod{(K \times K) \circ \text{id}}$. Так как в силу леммы 1 $(K \times K) \circ \text{id} < K < G$, имеем $z^{(i)} \equiv z^{(jj')} \pmod{K}$.

б) Так как $|J|, |J'| \leq 16$ (лемма 1), пар $z^{(jj')}$ конечное число. Используя лемму 2, находим те из них, которые принадлежат группе G . Затем, используя лемму 4, выби-

раем среди них те, которые лежат в разных смежных классах по подгруппе K . Лемма доказана.

Смысл леммы 5 состоит в том, что, поднимаясь в рассуждениях по индукции от срезов к исходному элементу, мы не теряем сопрягающих элементов, если они есть. Ограничиться подгруппой L вместо подгруппы K нельзя, так как для вершин длины не меньшей 2 костаблизатор совпадает с $K \circ \text{id}^{(n)}$ (лемма 1).

2. Построение алгоритма.

ТЕОРЕМА. В 2-группе Григорчука G проблема сопряженности алгоритмически разрешима. При этом в случае сопряженности элементов могут быть построены все неединичные сопрягающие элементы, взятые по одному в каждом смежном классе по подгруппе K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x, y – слова вида (3). Построение алгоритма произведем индукцией по частичному порядку. База индукции $x \in \{1, c, f, g, h\}$.

а) Пусть $x = 1$, что алгоритмически разрешимо. В этом случае x, y сопряжены тогда и только тогда, когда $y = 1$. Искомые сопрягающие элементы – элементы множества $\text{gr}(c, h) \cdot \text{gr}(f)$.

б) Пусть $x = c$ и $z = (z_1, z_2)$ или $z = c(z_1, z_2)$. Тогда $z^{-1}cz = (z_1^{-1}z_2, z_2^{-1}z_1)c$. Поэтому элемент y сопряжен с элементом x в том и только том случае, когда $y = (y_1, y_2)c$, $y_1y_2 = 1$. Если элементы c и y сопряжены, то, рассуждая как в лемме 15 из [2], находим некоторый сопрягающий элемент $z = (z_1, z_2)$. Искомые сопрягающие элементы – это элементы множества $z \cdot D(c)$ (лемма 3).

в) Пусть теперь $x \in \{f, g, h\}$. Введем индукцию по частичному порядку для элемента y .

Если $y = 1$ или число вхождений символа c в слово y нечетно (в частности, $y = c$), то элементы x, y несопряжены.

Пусть $y \in \{f, g, h\}$. Покажем, что среди элементов $\{f, g, h\}$ нет сопряженных.

Так как $h = (f, 1) \circ \text{id}$, то $h \in \text{st}(2)$ и в то же время $f, g \notin \text{st}(2)$. Значит, элемент h не сопряжен ни с f , ни с g . Если сопряжены f и g , то сопряжены $g \circ \text{id}$ и $h \circ \text{id}$, что, как показано выше, невозможно.

Пусть $x = y \in \{f, g, h\}$. Тогда искомые сопрягающие элементы – это элементы множества $D(x)$ (лемма 3).

Пусть для всех элементов, меньших y , алгоритм уже построен и для определенности $x = f$. Как было показано выше, если $y \notin \text{st}(1)$, то f и y несопряжены.

Пусть $y = (y_1, y_2)$. Если f и y сопряжены, то существует $z = (z_1, z_2)$ такой, что

$$g^{z_1} = y_1, \quad c^{z_2} = y_2 \quad \text{или} \quad g^{z_1} = y_2, \quad c^{z_2} = y_1.$$

Так как $y_1, y_2 < y$, по предположению индукции мы можем указать все элементы $z_1^{(j)}$, $z_2^{(j')}$, $j \in J$, $j' \in J'$ (если они существуют), сопрягающие g и y_1 , c и y_2 соответственно и лежащие в разных смежных классах по подгруппе $K \circ \text{id}$ (аналогично находятся сопрягающие элементы и для второй системы). Затем, как в лемме 5, находим требуемые элементы $z^{(jj')}$. В случае первой системы искомыми сопрягающими элементами будут сами $z^{(jj')}$; в случае второй системы – элементы $c \cdot z^{(jj')}$.

Если $x = g$ или $x = h$, поступаем аналогично.

г) Пусть теперь для всех пар x', y' таких, что $x' < x$, $y' < y$, алгоритм уже построен и в случае сопряженности указаны все сопрягающие элементы, лежащие в разных смежных классах по подгруппе K .

Пусть $x = (x_1, x_2)c$ и $y = (y_1, y_2)c^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Если $\varepsilon = 0$, то элементы x, y несопряжены. Пусть $\varepsilon = 1$ и элементы x, y сопряжены при помощи элемента $z = (z_1, z_2)$ (если $z \notin \text{st}(1)$, то домножаем его на x). Тогда $y = z^{-1}xz$ или

$$z_2 = x_1^{-1}z_1y_1, \quad y_1y_2 = z_1^{-1}(x_1x_2)z_1.$$

Так как $x_1x_2 < x$ и $y_1y_2 < y$, по предположению индукции мы можем указать все сопрягающие элементы $z_1^{(j)}$, $j \in J$, лежащие в разных смежных классах по подгруппе $K \circ \text{id}$. После этого среди пар $(z_1^{(j)}, x_1^{-1}z_1^{(j)}y_1)$ выбираем те, которые принадлежат группе G , а из оставшихся оставляем по одной из разных смежных классов по подгруппе K (рассуждаем, как в лемме 5).

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)c^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Если $\varepsilon = 1$, то элементы x, y несопряжены. Пусть $\varepsilon = 0$. Если $z = c^\delta(z_1, z_2)$, $\delta \in \{0, 1\}$, – сопрягающий элемент, то

$$(y_1, y_2) = \begin{cases} (x_1^{z_1}, x_2^{z_2}) & \text{при } \delta = 0, \\ (x_2^{z_1}, x_1^{z_2}) & \text{при } \delta = 1. \end{cases}$$

Так как $x_1, x_2 < x$ и $y_1, y_2 < y$, по предположению индукции мы можем указать все различные сопрягающие элементы $z_1^{(j)}, z_2^{(j')}$, $j \in J, j' \in J'$, лежащие в разных смежных классах по подгруппе $K \circ \text{id}$, и т.д. Теорема доказана.

Отметим, что аналогично можно решить проблему сопряженности и во многих других АТ-группах. Для этого достаточно, чтобы на АТ-группе выполнялись аналогии лемм 1–5. Приведение точных формулировок потребовало бы введения некоторых новых понятий и дополнительных построений, поэтому мы ограничимся только этим кратким замечанием.

Поскольку наш алгоритм является вполне рабочим и может быть применен даже в ручной реализации, его использование предполагает наличие достаточно детальной информации об изучаемой группе. В частности, необходимо описание централизаторов порождающих элементов, описание костабилизаторов, введение некоторого частичного порядка на множестве элементов группы, для которого сравнимость элементов должна быть распознаваема за конечное число шагов.

Приведем пример.

ПРИМЕР. Пусть p – нечетное простое число, $G = \text{gr}(c, d)$ является AT_ω -группой, $\omega = (p, p, \dots)$, где $d = (d, c, c^{-1}, 1, \dots, 1) \circ \text{id}$. Тогда G – бесконечная p -группа и в ней разрешима проблема сопряженности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
- [2] Рожков А. В. Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 82–105.
- [3] Wilson J. S., Zalesskii P. A. Conjugacy separability of certain torsion groups // Arch. Math. (Basel). 1997. V. 68. P. 441–449.