Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Хомич, К вопросу об отделимости нормализуемых суперинтуиционистских пропозициональных логик, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 606–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:10:53

УДК 510.64

К ВОПРОСУ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ НОРМАЛИЗУЕМЫХ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ЛОГИК

В. И. Хомич

В работе изучается проблема делимости суперинтуционистских пропозициональных логик – расширений интуционистской пропозициональной логики. Получен критерий делимости нормальных суперинтуционистских пропозициональных исчислений, а также результаты, касающиеся полноты фрагментов таких исчислений. Данный критерий позволяет устанавливать делимость нормализуемых суперинтуционистских пропозициональных логик. С помощью этих результатов исправлены обнаруженные автором ошибки в доказательствах некоторых утверждений Мак-Кея и Хосои.

Библиография: 26 названий.

Настоящая работа посвящена изучению проблемы делимости суперинтуционистских пропозициональных логик – расширений интуционистской пропозициональной логики (в зарубежной литературе суперинтуционистские пропозициональные логики называют промежуточными пропозициональными логиками – *intermediate propositional logics*). Мы строим для заданной логики равнообъемное с ней исчисление гильбертова типа, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) каждая его аксиома содержит не более двух логических знаков, причем если их два, то один из них – импликация;
- 2) для любой выводимой в этом исчислении формулы существует ее вывод в нем, формулы которого не содержат логических знаков, отличных от импликации и знаков рассматриваемой формулы.

Свойство делимости исчислений, определяемое условиями 1) и 2), введено в статье [1], там же доказана делимость интуционистской пропозициональной логики. Однако, предложенное доказательство содержит ошибку [2, с. 399], что стало предметом обсуждения в работах [3]–[5]. Впервые правильное доказательство делимости этой логики дано в [6] (см. также [7, с. 406]). В [7] доказана делимость и классической пропозициональной логики. В [8] делимость интуционистской пропозициональной логики получена алгебраическим методом. Далее, в работах [9]–[12] доказана делимость табличных логик, порожденных конечными и счетной линейно упорядоченными псевдобулевыми алгебрами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00944.

Впервые пример неотделимой логики был построен в статье [13]. Неотделимость той логики состоит в невозможности задать ее исчислением, удовлетворяющим условию 1). Чтобы констатировать наличие или отсутствие этого факта, там же были введены понятия нормального исчисления и нормализуемой логики. Исчисление называется *нормальным*, если оно удовлетворяет условию 1), а логика – *нормализуемой*, если ее можно задать нормальным исчислением. Ненормализуемые логически и, следовательно, неотделимые были обнаружены среди табличных логик [14], [15].

В работах [15]–[19] автором рассматривалась проблема отделимости суперинтуиционистских пропозициональных логик, порожденных формулами, не содержащими дизъюнкции или допускающими ее элиминирование. Такие логики можно задать исчислениями, дополнительные аксиомы которых не содержат логических знаков, отличных от импликации и отрицания. Для них условно решена проблема отделимости [18], что позволило доказать отделимость логик из достаточно широкого их класса, содержащего логики, порожденные имплицативными формулами [18], [19]. Для четырех нетривиальных классов исчислений построены алгоритмы, распознающие отделимые среди исчислений этих классов [17], [19].

Вместе с тем в работах [13], [20], [21] исследовалась проблема отделимости логик, допускающих задание в виде нормальных исчислений, дополнительные аксиомы которых содержат знак дизъюнкции. Отметим, что для этой цели не применимы методы, разработанные автором в [15]–[19].

В настоящей работе изучается проблема отделимости нормализуемых суперинтуиционистских пропозициональных логик. Получен критерий (теорема 1) отделимости нормальных суперинтуиционистских пропозициональных исчислений, позволяющий устанавливать отделимость и нормализуемых суперинтуиционистских пропозициональных логик. С помощью теоремы 1 исправлена обнаруженная автором ошибка (см. [17]) в доказательстве теоремы 3 из [13] об отделимости нормализуемых табличных логик и, тем самым, устранены пробелы в доказательствах следствий 2.6, 3.7 и 4.13 из [20]. Кроме того, получены результаты (теорема 2, следствие 1), касающиеся полноты фрагментов исчислений, дополнительные аксиомы которых не содержат логических знаков, отличных от импликации и отрицания; изложены также результаты статьи [21] (найдена ошибка в доказательстве леммы 5.2, эта лемма легко следует из теоремы 16 работы [18], и опровергнута лемма 5.4, исправлением которой является теорема 1).

1. Введем необходимые понятия и обозначения. *Интуиционистское пропозициональное исчисление* [7], [8], заданное десятью аксиомами и двумя правилами вывода (подстановка и модус поненс), будем обозначать через $\mathbf{H}$, а *суперинтуиционистское пропозициональное исчисление*, получающееся из $\mathbf{H}$ путем добавления в список аксиом $\mathbf{H}$ конечного множества пропозициональных формул $\mathfrak{X}$, называемых его дополнительными аксиомами, – через $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ и $\mathbf{H} + \mathfrak{Y}$ называются *равнообъемными*, если множество формул, выводимых в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$, совпадает с множеством формул, выводимых в $\mathbf{H} + \mathfrak{Y}$.

Пусть μ – какой-нибудь набор логических пропозициональных знаков. Пропозициональную формулу назовем μ -*формулой*, если она не содержит логических знаков, отличных от знаков набора μ ; μ -формула называется μ -*выводимой* в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$, если в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ существует ее вывод, каждая формула которого является μ -формулой. Исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ называется *нормальным* [13], если каждая его аксиома является $\supset \neg$ -формулой, или $\supset \vee$ -формулой, или $\supset \&$ -формулой. Исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ называется μ -*полным* [9], если

всякая μ -формула, выводимая в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$, является $\mu \cup \{\supset\}$ -выводимой в нем. Исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ называется *отделимым* [1], [8], [7], [22], [9], если $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ является нормальным и μ -полным при любом μ .

Согласно работе [8] аксиомы интуиционистского пропозиционального исчисления можно выбрать так, что оно будет отделимым. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $\mathbf{H}$ является отделимым исчислением.

Суперинтуиционистской пропозициональной логикой называется множество пропозициональных формул, содержащее все аксиомы $\mathbf{H}$ и замкнутое относительно правила подстановки и правила модус поненс. Суперинтуиционистское пропозициональное исчисление называется *аксиоматизацией* суперинтуиционистской пропозициональной логики, если в нем выводимы все ее формулы и только они. Суперинтуиционистская пропозициональная логика называется *аксиоматизируемой* (*нормализуемой, отделимой* [13]), если существует ее аксиоматизация (нормальная аксиоматизация, отделимая аксиоматизация соответственно).

Пусть ν – набор логических пропозициональных знаков, содержащий импликацию. Понятие ν -алгебры, введенное в работе [8] для изучения фрагментов исчисления $\mathbf{H}$, стало обобщением таких уже известных под другими названиями понятий, как импликативная полуструктура, импликативная структура и псевдобулева алгебра [23], [24]. По сути дела, ν -алгебра – это множество, на котором заданы операции псевдобулевой алгебры, определяемые набором ν и включающие операцию относительного псевдодополнения. Точнее говоря, ν -алгебра – это множество Ξ , в котором указан выделенный элемент, обозначаемый через 1 , и заданы соответствующие логическим знакам набора ν операции, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) если для любого ξ из Ξ верно $1 \supset \xi = 1$, то имеет место $\xi = 1$;
- 2) если для любых ξ и η из Ξ верны $\xi \supset \eta = 1$ и $\eta \supset \xi = 1$, то имеет место $\xi = \eta$;
- 3) для каждой ν -аксиомы Q (т.е. аксиомы, являющейся ν -формулой) исчисления $\mathbf{H}$ значение любого выражения, получающегося из Q путем замены переменных ν -формулы Q элементами Ξ , а логических знаков соответствующими им операциями Ξ , равно выделенному элементу.

Операции ν -алгебр обозначаем так же, как и соответствующие им (интерпретируемые ими) логические пропозициональные связки.

Определение ν -алгебры можно найти также в работе [19]. При ν , содержащем все четыре логических пропозициональных знака, ν -алгебра будет псевдобулевой алгеброй.

Множество пропозициональных формул, верных (общезначимых) на какой-либо конечной псевдобулевой алгебре, является суперинтуиционистской пропозициональной логикой, которую называют *табличной логикой*.

В работах [25], [13] понятия суперинтуиционистской пропозициональной логики и табличной логики обобщены следующим образом. *Суперинтуиционистской ν -логикой* называется множество ν -формул, содержащее все ν -аксиомы $\mathbf{H}$ и замкнутое относительно правила модус поненс и правила подстановки ν -формул. Множество ν -формул, верных на какой-нибудь конечной ν -алгебре, является суперинтуиционистской ν -логикой, которую называют *табличной ν -логикой*. Для любой суперинтуиционистской пропозициональной логики (табличной логики) Ω подмножество Ω_ν всех ν -формул Ω является суперинтуиционистской ν -логикой (табличной ν -логикой соответственно). Естественным образом понятия аксиоматизируемости и нормализуемости суперинтуиционистских пропозициональных логик распространяются [25], [13] и на ν -логики.

Пусть $\mathfrak{X}$ – конечное непустое множество пропозициональных формул, $Y, Z, X_1, \dots, X_n$ – какие-нибудь пропозициональные формулы, а $q_1, \dots, q_n$ – различные пропозициональные переменные. Выражение $Y \vdash Z$ ($Y \models Z$) означает, что формула Z выводима в $\mathbf{H}$ из формулы Y с помощью обоих правил (с помощью правила модус поненс и выводимых в $\mathbf{H}$ формул соответственно); выражение $\vdash Z$ означает, что формула Z выводима в $\mathbf{H}$, выражение $\vdash^\nu Z$ означает, что ν -формула Z ν -выводима в $\mathbf{H}$, а выражение $\mathbf{F}(q_1, \dots, q_n \mid X_1, \dots, X_n \mid Y)$ – результат подстановки в формулу Y вместо переменных $q_1, \dots, q_n$ формул $X_1, \dots, X_n$ соответственно.

Конъюнкцию всех элементов множества $\mathfrak{X}$ обозначим через $\bar{\mathfrak{X}}$, а формулу $X_n \supset (\dots \supset (X_1 \supset Z) \dots)$ – через $\{X_1, \dots, X_n\} \supset Z$.

2. Докажем критерий отделимости нормальных суперинтуционистских пропозициональных исчислений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – конечное множество формул, каждая из которых является $\supset \&$ -формулой, или $\supset \neg$ -формулой, или $\supset \vee$ -формулой. Тогда если исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ является $\supset$ -полным, $\supset \neg$ -полным и $\supset \vee$ -полным, то оно отделимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано конечное множество $\mathfrak{X}$ формул, каждая из которых является $\supset \&$ -формулой, или $\supset \neg$ -формулой, или $\supset \vee$ -формулой. Если $\mathfrak{X} = \emptyset$, то теорема верна.

Пусть $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ и исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ является $\supset$ -полным, $\supset \neg$ -полным и $\supset \vee$ -полным. Согласно определению отделимости исчислений нам достаточно доказать μ -полноту исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ при μ , содержащем $\supset$ и не содержащем все четыре логических пропозициональных знака. Пусть ν – один из следующих наборов логических знаков: $\supset$, или $\supset \neg$, или $\supset \vee$. Тогда с помощью результатов работы [13] нетрудно показать, что исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ будет $\nu \&$ -полным. Тем не менее, докажем этот факт.

Пусть $\nu \&$ -формула Q выводима в исчислении $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Тогда с помощью следующих выводимых в $\mathbf{H}$ эквивалентностей:

$$\begin{aligned} ((X \& Y) \supset Z) &\equiv (X \supset (Y \supset Z)), & (X \supset (Y \& Z)) &\equiv ((X \supset Y) \& (X \supset Z)), \\ ((X \& Y) \vee Z) &\equiv ((X \vee Z) \& (Y \vee Z)), & (X \vee (Y \& Z)) &\equiv ((X \vee Y) \& (X \vee Z)), \\ \neg(X \& Y) &\equiv (X \supset \neg Y), \end{aligned}$$

где X, Y и Z – произвольные формулы, для Q построим непустое конечное множество ν -формул $\mathfrak{H}$ такое, что $\vdash Q \equiv \bar{\mathfrak{H}}$. Поэтому имеем $\vdash \bar{\mathfrak{H}} \supset Q$, значит верна выводимость $\vdash \mathfrak{H} \supset Q$. Так как формула $\mathfrak{H} \supset Q$ является $\nu \&$ -формулой, в силу отделимости $\mathbf{H}$ имеем $\vdash^{\nu \&} \mathfrak{H} \supset Q$. Но формула $\bar{\mathfrak{H}}$ выводима в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Тогда и все формулы множества $\mathfrak{H}$ выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Так как каждая из них является ν -формулой и исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ ν -полное, все они ν -выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Поэтому $\nu \&$ -формула Q $\nu \&$ -выводима в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Следовательно, исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ является $\nu \&$ -полным.

Покажем, что исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ будет μ -полным при μ равном $\supset \vee \neg$. Пусть μ -формула S выводима в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$. Если $\vdash S$, то, используя непустоту $\mathfrak{X}$, получаем, что $\vdash \mathbf{F}(q \mid q \mid P) \supset S$, где $p \in \mathfrak{X}$, а q – пропозициональная переменная. Если S не выводима в $\mathbf{H}$, то в силу непустоты $\mathfrak{X}$ каждый вывод формулы S в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ содержит аксиомы из $\mathfrak{X}$. Тогда верна выводимость $\vdash \&_{i=1}^n \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid Q_1^i, \dots, Q_{m_i}^i \mid P_i) \supset S$, где $P_i \in \mathfrak{X}$ ($1 \leq i \leq n$), $q_1^i, \dots, q_{m_i}^i$ –

различные пропозициональные переменные, а $Q_1^i, \dots, Q_{m_i}^i$ – формулы. Так же, как и выше, для каждой формулы Q_j^i ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i$) построим непустое конечное множество μ -формул $\mathfrak{X}_j^i$ такое, что $\vdash Q_j^i \equiv \bar{\mathfrak{X}}_j^i$. Тогда имеем $\vdash \&_{i=1}^n F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{X}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{X}}_{m_i}^i \mid P_i) \supset S$.

Пусть $\mathfrak{Z}_1^1, \dots, \mathfrak{Z}_{m_1}^1, \dots, \mathfrak{Z}_1^n, \dots, \mathfrak{Z}_{m_n}^n$ – множества пропозициональных переменных такие, что все их переменные отличны друг от друга, число переменных множества $\mathfrak{Z}_j^i$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i$) равно числу формул множества $\mathfrak{X}_j^i$ (т.е. $|\mathfrak{Z}_j^i| = |\mathfrak{X}_j^i|$), и все переменные из множеств $\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i$ ($1 \leq i \leq n$) не входят в формулу P_i . Так как P_i – ν -формула, то $F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)$ является $\nu\&$ -формулой. Для каждой такой $\nu\&$ -формулы построим непустое конечное множество ν -формул $\mathfrak{U}_i$ такое, что $\vdash F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i) \equiv \bar{\mathfrak{U}}_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \vdash F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)) \\ & \equiv \{F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i\}. \end{aligned}$$

Так как все переменные из множеств $\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i$ отличны друг от друга и не входят в формулу P_i , то

$$\begin{aligned} & F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)) \\ & = F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{X}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{X}}_{m_i}^i \mid P_i). \end{aligned}$$

Следовательно, $\vdash \{F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\} \supset S$. Поскольку эта формула является μ -формулой, в силу отделимости **H** имеем $\vdash^\mu \{F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\} \supset S$.

Легко видеть, что формула $F(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)$ выводима в **H** + $\mathfrak{X}$. Тогда и формула $\bar{\mathfrak{U}}_i$ выводима в **H** + $\mathfrak{X}$. Поэтому все формулы множества $\mathfrak{U}_i$ выводимы в **H** + $\mathfrak{X}$. Так как ν есть $\supset$, или $\supset \neg$, или $\supset \vee$, $\mathfrak{U}_i$ – множество ν -формул, а исчисление **H** + $\mathfrak{X}$ ν -полное, то все ν -формулы множества $\mathfrak{U}_i$ ν -выводимы в **H** + $\mathfrak{X}$. Но $\nu \subseteq \mu$ и для любого j ($1 \leq j \leq m_i$) $\mathfrak{X}_j^i$ является множеством μ -формул. Тогда все формулы множества $\{F(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\}$ будут μ -формулами, μ -выводимыми в **H** + $\mathfrak{X}$. Поэтому μ -формула S μ -выводима в **H** + $\mathfrak{X}$. Следовательно, исчисление **H** + $\mathfrak{X}$ является μ -полным. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что любая суперинтуиционистская пропозициональная логика, имеющая нормальную, $\supset$ -полную, $\supset \neg$ -полную и $\supset \vee$ -полную аксиоматизацию, отделима. Покажем, что ее нельзя усилить, а именно: нельзя опустить условие $\supset \neg$ -полноты. Для этого достаточно построить нормальное исчисление, являющееся $\supset$ -полным и $\supset \vee$ -полным и не являющееся $\supset \neg$ -полным.

Пусть q, t и w – пропозициональные переменные. Формулу $(\neg \neg q \supset t) \supset (((\neg \neg q \supset q) \supset t) \supset t)$ обозначим через P , а исчисление **H** + $\{P\}$ – через $\mathfrak{I}$. Очевидно, что исчисление $\mathfrak{I}$ является нормальным. Так как имеет место выводимость $\neg q \vee \neg \neg q \models \neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q)$, в силу результатов работы [25] или [26] множество $\supset \vee \&$ -формул, выводимых в **H** + $\{\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q)\}$, совпадает с множеством $\supset \vee \&$ -формул, выводимых в **H**. Очевидно, верны выводимости $\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q) \models P$ и $F(t \mid \neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q) \mid P) \models \neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q)$.

Тогда исчисления $\mathfrak{T}$ и $\mathbf{H} + \{\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q)\}$ равнообъемны. Поэтому множество $\supset\vee\&$ -формул, выводимых в $\mathfrak{T}$, совпадает с множеством $\supset\vee\&$ -формул, выводимых в $\mathbf{H}$. Поскольку исчисление $\mathbf{H}$ отделимо, исчисление $\mathfrak{T}$ будет $\supset$ -полным и $\supset\vee$ -полным.

Докажем, что исчисление $\mathfrak{T}$ не является $\supset\neg$ -полным (факт анонсирован в работе [15]). Для этой цели достаточно показать, что $\supset\neg$ -формула

$$T = (\neg\neg w \supset t) \supset (((\neg\neg w \supset (\neg\neg q \supset q)) \supset t) \supset t)$$

выводима в $\mathbf{H} + \{\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q)\}$, но не $\supset\neg$ -выводима в $\mathfrak{T}$, т.е. не существует ее вывода в $\mathfrak{T}$, состоящего только из $\supset\neg$ -формул.

Легко видеть, что $\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q) \vdash \neg\neg(w \& q) \vee (\neg\neg(w \& q) \supset (w \& q))$. Кроме того, в $\mathbf{H}$ выводима эквивалентность

$$\begin{aligned} & (\neg\neg(w \& q) \vee (\neg\neg(w \& q) \supset (w \& q))) \\ & \equiv (((\neg\neg w \& \neg\neg q) \vee ((\neg\neg w \& \neg\neg q) \supset w)) \& ((\neg\neg w \& \neg\neg q) \vee ((\neg\neg w \& \neg\neg q) \supset q))). \end{aligned}$$

Тогда верна выводимость $\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q) \vdash (\neg\neg w \& \neg\neg q) \vee ((\neg\neg w \& \neg\neg q) \supset q)$. Нетрудно проверить, что $(\neg\neg w \& \neg\neg q) \vee ((\neg\neg w \& \neg\neg q) \supset q) \models T$. Поэтому $\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q) \vdash T$. Следовательно, T выводима в $\mathbf{H} + \{\neg\neg q \vee (\neg\neg q \supset q)\}$.

Покажем, что $\supset\neg$ -формула T не будет $\supset\neg$ -выводимой в $\mathfrak{T}$. Достаточно построить конечную $\supset\neg$ -алгебру, на которой $\supset\neg$ -формула P верна, а $\supset\neg$ -формула T опровержима. Рассмотрим псевдобулеву алгебру Ω с диаграммой

Легко видеть, что множество $\Phi = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ элементов Ω замкнуто в Ω относительно операций $\supset$ и $\neg$, а следовательно, является $\supset\neg$ -алгеброй.

Покажем, что $\supset\neg$ -формула P верна на Φ . Пусть задана оценка f переменных $\supset\neg$ -формулы P на Φ . Рассмотрим случай $f(q) \in \{0, a, d\}$. Тогда $\neg\neg f(q) = f(q)$, откуда

$$\begin{aligned} f(P) &= (\neg\neg f(q) \supset f(t)) \supset (((\neg\neg f(q) \supset f(q)) \supset f(t)) \supset f(t)) \\ &= (f(q) \supset f(t)) \supset (((f(q) \supset f(q)) \supset f(t)) \supset f(t)) \\ &= (f(q) \supset f(t)) \supset ((1 \supset f(t)) \supset f(t)) = (f(q) \supset f(t)) \supset (f(t) \supset f(t)) \\ &= (f(q) \supset f(t)) \supset 1 = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $f(q) \in \{c, e, 1\}$. Тогда $\neg\neg f(q) = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} f(P) &= (\neg\neg f(q) \supset f(t)) \supset (((\neg\neg f(q) \supset f(q)) \supset f(t)) \supset f(t)) \\ &= (1 \supset f(t)) \supset (((1 \supset f(q)) \supset f(t)) \supset f(t)) = f(t) \supset ((f(q) \supset f(t)) \supset f(t)) = 1. \end{aligned}$$

Покажем, что $\supset\neg$ -формула T опровержима на Φ . Построим оценку g переменных $\supset\neg$ -формулы T на Φ , полагая $g(q) = c$, $g(t) = e$ и $g(w) = d$. Тогда

$$\begin{aligned} g(T) &= (\neg\neg d \supset e) \supset (((\neg\neg d \supset (\neg\neg c \supset c)) \supset e) \supset e) \\ &= (d \supset e) \supset (((d \supset (1 \supset c)) \supset e) \supset e) = 1 \supset (((d \supset c) \supset e) \supset e) \\ &= ((d \supset c) \supset e) \supset e = (c \supset e) \supset e = 1 \supset e = e. \end{aligned}$$

Таким образом, исчисление $\mathfrak{T}$ является нормальным, $\supset$ -полным и $\supset V$ -полным и не является $\supset\neg$ -полным. Значит, в теореме 1 нельзя опустить условие $\supset\neg$ -полноты. Заметим, что нельзя опустить хотя бы одно из условий $\supset$ -полноты, или $\supset\neg$ -полноты, или $\supset V$ -полноты и, тем самым, нельзя усилить теорему 1.

В работе [17] в доказательстве теоремы 3 из [13] обнаружен пробел. С помощью теоремы 1 установим справедливость этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Любая нормализуемая табличная логика отделима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана табличная нормализуемая логика Ω . Тогда существует конечное множество формул $\mathfrak{X}$ такое, что исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ будет аксиоматизацией логики Ω и каждая формула $\mathfrak{X}$ является $\supset$ -формулой, или $\supset\neg$ -формулой, или $\supset V$ -формулой. Пусть ν – один из следующих наборов логических знаков: $\supset$, или $\supset V$, или $\supset\neg$. Легко видеть, что множество Ω_ν всех ν -формул табличной логики Ω будет табличной ν -логикой. Так же, как в теореме 3 из [13], с помощью результатов работы [25] построим аксиоматизацию табличной ν -логики Ω_ν . Согласно построению этой аксиоматизации множество всех ее аксиом $\mathfrak{X}^\nu$ конечно и содержит только ν -формулы. Положим $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}^\supset \cup \mathfrak{X}^\supset V \cup \mathfrak{X}^\supset\neg$. Нетрудно проверить, что исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ является нормальной аксиоматизацией логики Ω . В силу построения исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ оно будет $\supset$ -полным, $\supset V$ -полным и $\supset\neg$ -полным. Тогда по теореме 1 исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ отделимо. Следовательно, логика Ω отделима. Теорема 2 доказана.

Таким образом, теорема 3 из [13] оказывается верной и, значит, справедливы следствия 2.6, 3.7 и 4.13 из [20], полученные с помощью этой теоремы.

3. Используя идею доказательства теоремы 1, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ι – один из наборов логических знаков $\supset$ или $\supset\neg$, а μ и ν – наборы логических пропозициональных знаков такие, что $\iota \subseteq \nu \subseteq \mu \cup \{\supset\}$. Тогда если для любых конечных множеств ι -формул $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ и $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ являются ν -полными, то исчисление $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ будет μ -полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы наборы логических знаков ι , μ и ν , удовлетворяющие условию теоремы. Возьмем конечные множества ι -формул $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ такие, что исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ и $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ являются ν -полными. Если $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} = \emptyset$, то согласно отделимости $\mathbf{H}$ исчисление $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ будет μ -полным.

Пусть $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H} \neq \emptyset$. Если $\& \in \mu$, то в силу [17, следствие 1 и лемма 1] исчисление $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ будет μ -полным. Пусть $\& \notin \mu$. Докажем, что и в этом случае исчисление

$\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ будет μ -полным. Для простоты и удобства изложения набор логических знаков $\mu \cup \{\supset\}$ обозначим через τ . Пусть μ -формула Q выводима в $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$. Так как $\mu \subseteq \tau$, в силу [17, следствие 1 и лемма 1] μ -формула Q τ &-выводима в $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$. Используя непустоту $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}$, так же, как и в теореме 1 получаем, что $\vdash \&_{i=1}^n \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid S_1^i, \dots, S_{m_i}^i \mid P_i) \supset Q$, где $P_i \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}$ ($1 \leq i \leq n$), $q_1^i, \dots, q_{m_i}^i$ – различные пропозициональные переменные, а $S_1^i, \dots, S_{m_i}^i$ – τ &-формулы. Для каждой τ &-формулы S_j^i ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$) построим непустое конечное множество τ -формул $\mathfrak{X}_j^i$ такое, что $\vdash S_j^i \equiv \bar{\mathfrak{X}}_j^i$. Тогда $\vdash \&_{i=1}^n \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{X}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{X}}_{m_i}^i \mid P_i) \supset Q$.

Пусть $\mathfrak{Z}_1^1, \dots, \mathfrak{Z}_{m_1}^1, \dots, \mathfrak{Z}_1^n, \dots, \mathfrak{Z}_{m_n}^n$ – множества пропозициональных переменных такие, что все их переменные отличны друг от друга, число переменных множества $\mathfrak{Z}_j^i$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$) равно числу формул множества $\mathfrak{X}_j^i$ (т.е. $|\mathfrak{Z}_j^i| = |\mathfrak{X}_j^i|$), и все переменные из множеств $\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i$ ($1 \leq i \leq n$) не входят в формулу P_i . Так как P_i – ι -формула, то $\mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)$ является ι &-формулой. Для каждой такой ι &-формулы построим непустое конечное множество ι -формул $\mathfrak{U}_i$ такое, что $\vdash \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i) \equiv \mathfrak{U}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} & \vdash \mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)) \\ & \equiv \overline{\{\mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i\}}. \end{aligned}$$

Поскольку все переменные из множеств $\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i$ отличны друг от друга и не входят в формулу P_i , то

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)) \\ & = \mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{X}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{X}}_{m_i}^i \mid P_i). \end{aligned}$$

Следовательно, $\vdash \{\mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\} \supset Q$. Так как эта формула является τ -формулой, в силу отделимости $\mathbf{H}$ имеем $\vdash^\tau \{\mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\} \supset Q$.

Легко видеть, что формула $\mathbf{F}(q_1^i, \dots, q_{m_i}^i \mid \bar{\mathfrak{Z}}_1^i, \dots, \bar{\mathfrak{Z}}_{m_i}^i \mid P_i)$ выводима в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ или $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$. Тогда и формула $\mathfrak{U}_i$ выводима в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ или $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$. Поэтому все формулы множества $\mathfrak{U}_i$ выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ или все формулы множества $\mathfrak{U}_i$ выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$. Так как $\iota \subseteq \nu$, $\mathfrak{U}_i$ – множество ι -формул, а исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ и $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ ν -полные, то все ν -формулы множества $\mathfrak{U}_i$ ν -выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ или все ν -формулы множества $\mathfrak{U}_i$ ν -выводимы в $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$. Но $\nu \subseteq \tau$ и для любого j ($1 \leq j \leq m_i$) $\mathfrak{X}_j^i$ является множеством τ -формул. Тогда все формулы множества $\{\mathbf{F}(\mathfrak{Z}_1^i, \dots, \mathfrak{Z}_{m_i}^i \mid \mathfrak{X}_1^i, \dots, \mathfrak{X}_{m_i}^i \mid Y) : Y \in \mathfrak{U}_i, 1 \leq i \leq n\}$ будут τ -формулами, τ -выводимыми в $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$. Поэтому μ -формула Q τ -выводима в $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$. Следовательно, исчисление $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ является μ -полным. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 показывает, что μ -полнота рассматриваемых исчислений сохраняется с расширением μ . Кроме того, из нее вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для любых конечных множеств $\supset$ -формул $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ и $\mathbf{H} + \mathfrak{H}$ являются $\supset$ -полными, то исчисление $\mathbf{H} + (\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ отделимо.

Если исчисления $\mathbf{H} + \{P\}$ и $\mathbf{H} + \{Q\}$, где P и Q – $\supset$ -формулы, отделимы, то согласно следствию 1 исчисление $\mathbf{H} + \{P, Q\}$ также отделимо. Таким методом можно доказать отделимость многих исчислений.

4. В работе [21] рассматривался вопрос об отделимости суперинтуиционистских пропозициональных логик, множество $\supset \vee \&$ -формул которых совпадает с множеством $\supset \vee \&$ -формул интуиционистской пропозициональной логики.

ЛЕММА [21, лемма 5.2]. *Для каждой такой логики $\mathfrak{S}$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) *логика $\mathfrak{S}$ обладает свойством отделимости;*
- 2) *логика $\mathfrak{S}$ может быть аксиоматизирована путем добавления некоторых $\supset \neg$ -аксиом к интуиционистской системе;*
- 3) *логика $\mathfrak{S}$ может быть аксиоматизирована посредством $\supset$ -аксиом, $\supset \&$ -аксиом, $\supset \vee$ -аксиом и $\supset \neg$ -аксиом.*

Несколько расплывчатую формулировку этой леммы уточняет ее доказательство, основную часть которого составляет проверка истинности импликации $2) \implies 1)$, где по существу доказывается отделимость любого исчисления $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ – произвольное множество $\supset \neg$ -формул), имеющего то же самое множество выводимых $\supset \vee \&$ -формул, что и $\mathbf{H}$. Опровергнем это утверждение.

Рассмотрим логику $\mathfrak{L}(\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q))$, т.е. множество формул, выводимых в исчислении $\mathbf{H} + \{\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q)\}$. Так как имеет место выводимость $\neg q \vee \neg \neg q \models \neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q)$, в силу результатов работы [25] или [26] множество $\supset \vee \&$ -формул логики $\mathfrak{L}(\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q))$ совпадает с множеством $\supset \vee \&$ -формул интуиционистской пропозициональной логики. Поэтому логика $\mathfrak{L}(\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q))$ попадает в область действия леммы 5.2 из [21]. Легко видеть, что исчисление $\mathfrak{I}$ является аксиоматизацией логики $\mathfrak{L}(\neg \neg q \vee (\neg \neg q \supset q))$, удовлетворяющей условию 2). Согласно доказанному выше исчисление $\mathfrak{I}$ не является $\supset \neg$ -полным и, следовательно, не будет отделимым.

Покажем, что из теоремы 16 работы [18] легко следует лемма 5.2 из [21]. С этой целью напомним определение введенного в [17] свойства $\mathfrak{P}_\nu$ для суперинтуиционистских пропозициональных исчислений, где ν – набор логических пропозициональных знаков, не содержащий $\neg$. Будем говорить, что *исчисление $\mathbf{H} = \mathfrak{X}$ обладает свойством $\mathfrak{P}_\nu$* , если каждая выводимая в $\mathbf{H} + \mathfrak{X}$ ν -формула выводима и в исчислении $\mathbf{H} + \mathfrak{X}_{\supset \vee \&}$.

Нетрудно установить верность импликаций $1) \implies 3)$ и $3) \implies 2)$. Докажем импликацию $2) \implies 1)$. Пусть исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ – конечное множество $\supset \neg$ -формул, является аксиоматизацией логики $\mathfrak{S}$. Легко видеть, что оно обладает свойством $\mathfrak{P}_{\supset \vee}$. Тогда по теореме 16 из [18] для $\mathfrak{Z}$ существует конечное множество $\supset \neg$ -формул $\mathfrak{B}$ такое, что исчисление $\mathbf{H} + \mathfrak{B}$ отделимо и равнообъемно исчислению $\mathbf{H} + \mathfrak{Z}$.

В лемме 5.4 из [21] утверждается, что для отделимости произвольной суперинтуиционистской пропозициональной логики достаточно существования ее нормальной, $\supset$ -полной и $\supset \vee$ -полной аксиоматизации. По существу в ней доказывается отделимость любого нормального, $\supset$ -полного и $\supset \vee$ -полного суперинтуиционистского пропозиционального исчисления. Так как исчисление $\mathfrak{I}$ является нормальным, $\supset$ -полным и $\supset \vee$ -полным и не является $\supset \neg$ -полным, то лемма 5.4 из [21] неверна. Ее исправлением является теорема 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wajsberg M. Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting // Wiadom. Mat. 1938. V. 46. P. 45–101.
- [2] Черч А. Введение в математическую логику. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.

- [3] Kabziński J. K. The Wajsberg's results connected with separability of the intuitionistic propositional logic // Bull. Sect. Logic. Univ. Łódź. 1973. V. 2. № 2. P. 131–133.
- [4] Kabziński J. K., Porebska M. Proof of the separability of the intuitionistic propositional logic by the Wajsberg method // Rep. Math. Logic. 1975. V. 4. P. 31–38.
- [5] Циткин А. И. К вопросу об ошибке в известной работе М. Вайсберга // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 1979. С. 240–256.
- [6] Curry H. A note on the reduction of Gentzen's calculus LJ // Bull. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. № 4. P. 288–293.
- [7] Клини С. К. Введение в метаматерику. М.: ИЛ, 1957.
- [8] Horn A. The separation theorem of intuitionist propositional calculus // J. Symbolic Logic. 1962. V. 27. № 4. P. 391–399.
- [9] Hosoi T. On the separation theorem of intermediate propositional calculi // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1966. V. 42. № 6. P. 535–538.
- [10] Hosoi T. Algebraic proof of the separation theorem on Dummett's LC // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1966. V. 42. № 7. P. 693–695.
- [11] Hosoi T. The separable axiomatization of the intermediate propositional systems S_n of Gödel // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1966. V. 42. № 9. P. 1001–1006.
- [12] Hosoi T. A criterion for the separable axiomatization of Gödel's S_n // Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1967. V. 43. № 5. P. 365–368.
- [13] McKay C. G. The non-separability of a certain finite extension of Heyting's propositional logic // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. 1968. V. 71. № 3. P. 312–315.
- [14] Hosoi T. Non-separable intermediate propositional logics // J. Tsuda College. 1976. V. 8. P. 13–18.
- [15] Хомич В. И. Отделимость суперинтуиционистских пропозициональных логик // Исследования по теории алгорифмов и математической логике. М.: Наука, 1979. С. 98–115.
- [16] Хомич В. И. Теорема отделимости для суперинтуиционистских исчислений высказываний // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 6. С. 1327–1329.
- [17] Хомич В. И. О проблеме отделимости для суперинтуиционистских пропозициональных логик // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 4. С. 820–823.
- [18] Хомич В. И. Об отделимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислениях и о конъюнктивно неразложимых элементах в импликативных полуструктурах // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1986. V. 32. № 2. P. 149–180.
- [19] Хомич В. И. О свойствах суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 6. С. 158–175.
- [20] Hosoi T., Ono H. Axiomatization of models for intermediate logics constructed with Boolean models by piling up // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1972. V. 8. № 1. P. 1–11.
- [21] Hosoi T. On intermediate logics. III // J. Tsuda College. 1974. V. 6. P. 23–38.
- [22] Hosoi T. The separation theorem on the classical system // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. 1966. V. 12. № 2. P. 223–230.
- [23] Карри Х. Б. Основания математической логики. М.: Мир, 1969.
- [24] Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
- [25] McKay C. G. The decidability of certain intermediate propositional logics // J. Symbolic Logic. 1968. V. 33. № 2. P. 258–264.
- [26] Янков В. А. Об исчислении слабого закона исключенного третьего // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1044–1051.