Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Худалов, В гильбертовом пространстве регулярность конуса равносильна самосопряженности, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 616–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:06:23

УДК 517.982

В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ РЕГУЛЯРНОСТЬ КОНУСА РАВНОСИЛЬНА САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

В. Т. Худалов

Доказана теорема о том, что в гильбертовом пространстве регулярность конуса равносильна самосопряженности. С ее помощью даны новые доказательства некоторых результатов.

Библиография: 8 названий.

Целью п. 1 является доказательство следующего факта: в гильбертовом пространстве регулярность конуса равносильна самосопряженности (теорема 1). Ранее самосопряженность регулярного конуса была установлена лишь для некоторых частных случаев: самосопряженность естественного решеточного конуса в гильбертовом пространстве очевидна, самосопряженность “круглого” конуса показана в известной статье М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [1], доказательство самосопряженности естественного положительного конуса алгебры фон Неймана можно найти, например, в [2, предложение 2.5.28]. В настоящей работе для произвольного конуса в гильбертовом пространстве полностью решается вопрос об эквивалентности понятий регулярности и самосопряженности.

В п. 2 даны некоторые приложения полученного результата. Приведено новое доказательство ранее установленной автором теоремы о метрической характеристике положительной и отрицательной частей элемента в произвольном регулярно упорядоченном гильбертовом пространстве. С помощью описания сопряженного к конусу $K(a, \alpha)$, где $\|a\| = 1$, $\alpha \in (0, 1)$, и теоремы 1 удастся получить ответ на вопрос: при каких $\alpha \in (0, 1)$ конус $K(a, \alpha)$ является регулярным – и, тем самым, дать новое доказательство результата автора из [3].

1. Приведем необходимые определения и факты. Всюду далее H – произвольное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непустое подмножество $H_+ \subset H$ называется *конусом*, если

- 1) $x, y \in H_+ \implies \lambda x + \mu y \in H_+ \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$;
- 2) $x, -x \in H_+ \implies x = 0$.

С помощью конуса H_+ введем в H отношение порядка, полагая $x \geq y$ (или $y \leq x$), если $x - y \in H_+$. При этом неравенство $x \geq 0$ равносильно включению $x \in H_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конус H_+ называется *регулярным* [3], если выполнены следующие условия:

- 1) $\forall x, y \in H \quad \pm x \leq y \implies \|x\| \leq \|y\|$;
- 2) $\forall x \in H \quad \exists y \in H_+ : \pm x \leq y, \|x\| = \|y\|$.

Для любого $x \in H$ существует единственный элемент $y \in H_+$ такой, что $\pm x \leq y$ и $\|x\| = \|y\|$. Действительно, если $x = 0$, то очевидно $y = 0$; если $x \neq 0$, то найдутся $y_1, y_2 \in H_+$ такие, что $y_1 \geq \pm x, y_2 \geq \pm x$ и $\|y_1\| = \|y_2\| = \|x\|$. Имеем $(y_1 + y_2)/2 \geq \pm x$, откуда $\|y_1 + y_2\| \geq 2\|x\|$, значит

$$2\|x\| \leq \|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| = 2\|x\|,$$

т.е. $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$, что влечет $(y_1, y_2) = \|y_1\| \cdot \|y_2\|$. Последнее равенство имеет место, только если $y_1 = \lambda y_2$, где $\lambda > 0$. Поскольку $\|y_1\| = \|y_2\|$, то $\lambda = 1$, т.е. $y_1 = y_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть H_+ – регулярный конус в H . Для любого $x \in H$ обозначим через $|x|$ и будем называть *метрическим модулем* тот единственный элемент $y \in H_+$, который существует в силу условия 2) определения 2. Определим также $x_+ = (|x| + x)/2$ и $x_- = (|x| - x)/2$ и будем называть их *метрической положительной* и *метрической отрицательной частями элемента x* . Для любого $x \in H$ выполнено

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_-, \quad \|x\| = \||x|\|. \quad (1)$$

Заметим, что равенства (1) справедливы для модуля, положительной и отрицательной частей элемента в произвольной банаховой решетке, чем и объясняется выбор терминов.

Пусть H – гильбертово пространство с конусом H_+ , H^* – сопряженное пространство. Через H_+^* обозначим множество

$$H_+^* = \{z \in H^* : (z, x) \geq 0 \quad \forall x \in H_+\}.$$

Если $H_+ = H_+^*$ при естественном отождествлении H и H^* , то конус H_+ называется *самосопряженным*. Ясно, что всякий самосопряженный конус является замкнутым.

Если H_+ – замкнутый конус в H , то, поскольку H_+ – замкнутое выпуклое множество, для любого $x \in H$ определена *проекция Px* [4] элемента x на конус H_+ , т.е. единственный элемент $Px \in H_+$ такой, что

$$d(x, H_+) = \inf\{\|a - x\| : a \in H_+\} = \|Px - x\|.$$

Пусть $a \in H$, $\|a\| = 1$ и $\alpha \in (0, 1)$. Конус $K(a, \alpha)$ определим следующим образом:

$$K(a, \alpha) = \{x \in H : (a, x) \geq \alpha\|x\|\}.$$

Тогда $K(a, \alpha)$ – замкнутый телесный оштукатуриваемый [5], [6] конус в H .

Нам потребуются также следующий результат Ж.-Ж. Моро [7].

ТЕОРЕМА (об ортогональной декомпозиции). Пусть H – гильбертово пространство, H_+ – замкнутый конус в H и $K_+ = -H_+^*$ – его поляр, т.е.

$$K_+ = \{x \in H : (x, y) \leq 0 \quad \forall y \in H_+\}.$$

Тогда для элемента $x \in H$ следующие утверждения равносильны:

- I) $x = y + z$, $y \in H_+$, $z \in K_+$, $(y, z) = 0$;
- II) элементы y и z – проекции x на H_+ и K_+ соответственно.

Докажем сначала лемму.

ЛЕММА. Пусть H_+ – регулярный конус в H и H_1 – конус в H , также являющийся регулярным. Предположим, что $H_+ \subset H_1$. Тогда $H_+ = H_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in H_1$. Так как H_+ регулярен, то существует $y \in H_+$ такой, что $y \pm x \in H_+$ и $\|y\| = \|x\|$. Докажем, что $x \in H_+$. Имеем $0 \leq 2x \leq x + y$ (неравенства следует понимать в смысле конуса H_1). Тогда

$$2\|x\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = 2\|x\|,$$

т.е. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, откуда следует, что $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\|$, что влечет $x = \lambda y$, где $\lambda > 0$, т.е. $x \in H_+$ и $H_+ = H_1$.

Приступим к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного конуса H_+ в гильбертовом пространстве H следующие утверждения эквивалентны:

- 1) H_+ – регулярный конус;
- 2) H_+ – самосопряженный конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть H_+ – регулярный конус. Тогда H_+^* – также регулярный конус [8]. Покажем, что $H_+ \subset H_+^*$ (при этом мы отождествляем H и H^*). Действительно, пусть $x \in H_+$, $\|x\| = 1$ и $x \notin H_+^*$. Тогда найдется $y \in H_+$ такой, что $\|y\| = 1$ и $(x, y) < 0$. Очевидно, x и y линейно независимы; в противном случае $y = \lambda x$ и $\lambda < 0$, так как $(x, y) = \lambda$, т.е. $y \in -H_+$, что невозможно. Пусть $(x, y) = a < 0$. Рассмотрим $F_+ = \text{lin}\{x, y\} \cap H_+$ – конус в подпространстве $\text{lin}\{x, y\}$, удовлетворяющий условию 1) определения 2. Ясно, что

$$F_+ \supset \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Возьмем элемент $x + \lambda y$ такой, что $(x + \lambda y, x) = 0$. Это возможно, так как $(x + \lambda y, x) = 1 + \lambda a$; пусть $\lambda = -1/a > 0$. Положим $z = (x + \lambda y)/\|x + \lambda y\|$, $z \in F_+$, $\|z\| = 1$. Рассмотрим конус F_1 в $X = \text{lin}\{x, y\}$:

$$F_1 = \{\alpha x + \beta z : \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Конус F_1 является регулярным, так как $(x, z) = 0$, и упорядоченное гильбертово пространство (X, F_1) изометрично и порядково изоморфно пространству $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+^2)$, где $\mathbb{R}_+^2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \geq 0\}$, при изоморфизме

$$\varphi: (X, F_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+^2), \quad \varphi(\alpha x + \beta z) = (\alpha, \beta).$$

С другой стороны, ясно, что $F_1 \subset F_+$, однако включение является строгим. Действительно, покажем, что элемент $x/2 + \lambda y$ принадлежит F_+ , но не принадлежит F_1 . В самом деле, если

$$\frac{x}{2} + \lambda y = \alpha x + \beta z = \alpha x + \frac{\beta x}{\|x + \lambda y\|} + \frac{\beta \lambda y}{\|x + \lambda y\|},$$

то получаем, что

$$\frac{1}{2} = \alpha + \frac{\beta}{\|x + \lambda y\|}, \quad \frac{\beta \lambda}{\|x + \lambda y\|} = \lambda,$$

откуда

$$\frac{\beta}{\|x + \lambda y\|} = 1, \quad \frac{1}{2} = \alpha + 1,$$

что невозможно, так как $\alpha \geq 0$. В таком случае, конус F_+ не может удовлетворять условию 1) определения 2. Действительно, если предположить противное, то F_+ является регулярным конусом, строго содержащим другой регулярный конус F_1 , что невозможно согласно лемме.

Получили противоречие, значит $H_+ \subset H_+^*$. В таком случае, поскольку конусы H_+ и H_+^* регулярные, снова в силу леммы получаем, что $H_+ = H_+^*$.

2) $\implies$ 1). Пусть конус H_+ самосопряжен. По теореме об ортогональной декомпозиции имеем: если x_+ и z – проекции элемента $x \in H$ на H_+ и $-H_+$ соответственно, то $x = x_+ - x_-$, где $x_- = -z \in H_+$ и $(x_+, x_-) = 0$. Тогда $\|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$, т.е. для конуса H_+ выполнено условие 2) определения 2. Поскольку конус H_+ самосопряжен, то условие 1) также выполнено [8]. Приведем прямое доказательство. Пусть $\pm x \leq y$. Тогда $x = (u - v)/2$, $y = (u + v)/2$, где $u, v \in H_+$. Поскольку $x = (u - v)/2$, то $\|x_-\| \leq \|v\|/2$, $\|x_+\| \leq \|u\|/2$, так как

$$\begin{aligned} \|x_-\| &= \|x_+ - x\| = \inf\{\|a - x\| : a \in H_+\} \leq \left\| \frac{u}{2} - \left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2} \right) \right\|, \\ \|x_+\| &= \|-x_-\| = \inf\{\|b - x\| : b \in -H_+\} \leq \left\| -\frac{v}{2} - \left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2} \right) \right\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|x\| = \sqrt{\|x_+\|^2 + \|x_-\|^2} \leq \sqrt{\left(\frac{u+v}{2} \right)^2} = \|y\|,$$

так как $(u, v) \geq 0$, поскольку конус H_+ самосопряжен. Следовательно, H_+ – регулярный конус. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякий регулярный конус в гильбертовом пространстве является замкнутым.*

2. С помощью доказанной теоремы и теоремы Моро можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть H_+ – регулярный конус в H . Тогда для любого $x \in H$ проекция элемента x на конус H_+ совпадает с метрической положительной частью элемента и расстояние от x до H_+ равно норме метрической отрицательной части элемента, т.е. $Px = x_+$, $d(x, H_+) = \|x_-\|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если H_+ – регулярный конус, то в силу теоремы 1 имеем $K_+ = -H_+^* = -H_+$. Поскольку для любого $x \in H$ имеем $x = x_+ + (-x_-)$, где $x_+ \in H_+$, $-x_- \in -H_+$ и $(x_+, x_-) = 0$, то согласно теореме Моро получаем, что x_+ является проекцией элемента x на конус H_+ . Тогда $d(x, H_+) = \|x_+ - x\| = \|x_-\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 была ранее доказана автором другим способом без использования теоремы Моро и теоремы 1.

Применим теорему 1 к исследованию конуса $K(a, \alpha)$, где $\|a\| = 1$, $\alpha \in (0, 1)$. Докажем предварительно следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Если $\dim H \geq 2$, то $K^*(a, \alpha) = K(a, \sqrt{1 - \alpha^2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$K^*(a, \alpha) \subset K(a, \sqrt{1 - \alpha^2}). \quad (2)$$

Доказательство проведем от противного. Пусть существует $y \in K^*(a, \alpha)$ такой, что $\|y\| = 1$ и $y \notin K(a, \sqrt{1 - \alpha^2})$. Имеем $(y, x) \geq 0$ для любого $x \in K(a, \alpha)$, в частности, $(y, a) \geq 0$. Значит, $0 \leq (y, a) < \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Предположим сначала, что $\alpha \geq \sqrt{1 - \alpha^2}$. Положим $x = \lambda a + \mu y$ и выберем $\lambda > 0$, $\mu > 0$ так, чтобы $\|x\| = 1$ и $(a, x) = \alpha$. Имеет место система

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu(a, y) = 1, \quad \lambda + \mu(a, y) = \alpha.$$

Обозначим $(a, y) = c$. Тогда $\lambda = \alpha - c\mu$, $0 \leq c < \sqrt{1 - \alpha^2} \leq \alpha$. Из первого уравнения системы получаем

$$\mu = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{\alpha\sqrt{1 - c^2} - c\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - c^2}},$$

при этом $\lambda > 0$, так как

$$\alpha\sqrt{1 - c^2} - c\sqrt{1 - \alpha^2} > 0 \iff \alpha \geq c.$$

Рассмотрим вектор $z = 2\alpha a - x$. Тогда $z \in K(a, \alpha)$, так как $(z, a) = 2\alpha - (a, x) = \alpha$. Покажем, что $(z, y) < 0$, а это ведет к противоречию. Действительно,

$$(z, y) = 2\alpha c - (x, y) = 2\alpha c - \lambda c - \mu = \frac{\alpha c\sqrt{1 - c^2} - \sqrt{1 - \alpha^2} + c^2\sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Покажем, что числитель дроби меньше 0. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha c\sqrt{1 - c^2} - \sqrt{1 - \alpha^2} + c^2\sqrt{1 - \alpha^2} < 0 &\iff \alpha c < \sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt{1 - c^2} \\ &\iff \alpha^2 c^2 < 1 - c^2 - \alpha^2(1 - c^2) \iff \alpha^2 < 1 - c^2 \iff c < \sqrt{1 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно, следовательно, $(z, y) < 0$ и включение (2) доказано в случае $\alpha \geq \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Предположим теперь, что $\alpha < \sqrt{1 - \alpha^2}$. Положим $\alpha_1 = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Тогда $\sqrt{1 - \alpha_1^2} = \alpha$ и $\alpha_1 > \sqrt{1 - \alpha_1^2}$. По доказанному ранее $K^*(a, \alpha_1) \subset K(a, \sqrt{1 - \alpha_1^2})$, т.е.

$$K^*(a, \sqrt{1 - \alpha^2}) \subset K(a, \alpha),$$

или, переходя к сопряженным конусам, получаем включение (2) для любого $\alpha \in (0, 1)$.

Докажем обратное включение, т.е. для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$K(a, \sqrt{1 - \alpha^2}) \subset K^*(a, \alpha). \quad (3)$$

Пусть $x \in K(a, \sqrt{1 - \alpha^2})$, $\|x\| = 1$ и $x \notin K^*(a, \alpha)$. Тогда найдется $y \in K(a, \alpha)$, $\|y\| = 1$, такой, что $(x, y) < 0$. Положим $(x, y) = -c$, где $0 < c < 1$. Пусть $e = (cx + y)/\|cx + y\|$. Тогда $\|e\| = 1$ и $(x, e) = 0$, т.е. $x \perp e$. Имеем $a = \lambda x + \mu e + h$, где $h \perp x$, $h \perp e$. По теореме Пифагора $\lambda^2 + \mu^2 = 1 - \|h\|^2$. Кроме того,

$$(a, x) = \lambda \geq \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (a, e) = \mu = \frac{c(a, x) + (a, y)}{\|cx + y\|} = \frac{c(a, x) + (a, y)}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Получаем, что

$$1 - \|h\|^2 = \lambda^2 + \mu^2 = \lambda^2 + \frac{c^2 \lambda^2 + (a, y)^2 + 2c\lambda(a, y)}{1 - c^2},$$

или

$$1 - c^2 - \|h\|^2(1 - c^2) = \lambda^2 + (a, y)^2 + 2c\lambda(a, y) \geq 1 - \alpha^2 + \alpha^2 + 2c\sqrt{1 - \alpha^2}\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$-c^2 - \|h\|^2(1 - c^2) \geq 2c\sqrt{1 - \alpha^2}\alpha,$$

противоречие.

Следовательно, выполнено включение (3). Теорема доказана.

Следствием теорем 1 и 3 является

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\dim H > 1$. Для любого $a \in H$, $\|a\| = 1$, конус $K(a, \alpha)$ регулярен в H тогда и только тогда, когда $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме 1 $K(a, \alpha)$ регулярен тогда и только тогда, когда он самосопряжен. В силу теоремы 3 $K^*(a, \alpha) = K(a, \alpha)$, если только $K(a, \sqrt{1 - \alpha^2}) = K(a, \alpha)$, откуда следует, что $\alpha = \sqrt{1 - \alpha^2}$, т.е. $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [3] теорема 4 была доказана другим способом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантами конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. Т. 3. № 1. С. 3–95.
- [2] Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
- [3] Худалов В. Т. Регулярные конусы в гильбертовом пространстве // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 1. С. 193–196.
- [4] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.
- [5] Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977.
- [6] Вулих Б. З. Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах. Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1978.
- [7] Moreau J.-J. Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1962. V. 225. P. 238–240.
- [8] Wittstock G. Ordered normed tensor products // Lecture Notes in Phys. 1974. V. 29. P. 67–84.

Северо-Осетинский государственный университет, г. Владикавказ

Поступило

17.03.97

Исправленный вариант

02.09.97