Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, Комплексный росток Маслова и асимптотическая формула для канонического распределения Гиббса, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 622–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:31:45

УДК 517.98

КОМПЛЕКСНЫЙ РОСТОК МАСЛОВА И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА

О. Ю. Шведов

Рассматривается каноническое распределение Гиббса для системы N классических частиц при следующих условиях: внешний потенциал порядка 1, потенциал парного взаимодействия порядка $1/N$, потенциал тройного взаимодействия порядка $1/N^2$ и т.д. При $N \rightarrow \infty$ строится асимптотика для статистической суммы и свободной энергии. Приводится асимптотическая формула, близкая по норме L^1 при $N \rightarrow \infty$ к нормированному каноническому распределению. Доказывается, что свойство хаоса выполнено для частичных распределений и не выполнено для N -частичной функции плотности.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В равновесной статистической механике для системы N классических частиц рассматривается каноническое распределение Гиббса [1]

$$\rho_N = \frac{1}{Z_N} \exp\left(-\frac{H_N}{\theta}\right), \quad (1)$$

зависящее от координат частиц $q_1, \dots, q_N$ и импульсов $p_1, \dots, p_N$. В формуле (1) H_N – функция Гамильтона системы N частиц в d -мерном пространстве, $\theta > 0$ – температура, Z_N – нормировочный множитель (статистическая сумма), определяемый из соотношения

$$\int \rho_N d^N p d^N q = 1.$$

В этой работе строится при $N \rightarrow \infty$ асимптотическая формула, аппроксимирующая распределение (1) по норме L^1 , в случае, если функция $H_N(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$ зависит от N следующим образом:

$$\begin{aligned} H_N(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + g_1 U_1(q_i) \right) + \frac{g_2}{N} \sum_{i_1, i_2=1}^N U_2(q_{i_1}, q_{i_2}) + \dots \\ & + \frac{g_p}{N^{p-1}} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^N U_p(q_{i_1}, \dots, q_{i_p}), \end{aligned} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Королевского общества Великобритании.

где $g_1, \dots, g_p \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $U_1, \dots, U_p$ — гладкие вещественные функции. Функция Гамильтона (2) отвечает следующей физической задаче. Имеется система N частиц массы m , находящихся во внешнем поле порядка $O(1)$; потенциал парного взаимодействия имеет порядок $O(1/N)$, потенциал тройного взаимодействия имеет порядок $O(1/N^2)$, и т.д.

В работе доказывается, что асимптотическая формула для распределения (1) представляется в виде

$$\rho_N^{\text{as}}(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) = c_N (2\pi m \theta)^{-Nd/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m\theta}\right) (\Phi_N(q_1, \dots, q_N))^2, \quad (3)$$

где

$$\Phi_N(q_1, \dots, q_N) = \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{1}{(2N)^l l!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{2l} \geq 1 \\ i_1 \neq \dots \neq i_{2l}}} M(q_{i_1}, q_{i_2}) \cdots M(q_{i_{2l-1}}, q_{i_{2l}}) \prod_{j \neq i_1, \dots, i_{2l}} \varphi(q_j),$$

c_N определяется из условия нормировки

$$\int \rho_N^{\text{as}} d^N p d^N q = 1,$$

функции M и φ вводятся ниже.

Отметим, что асимптотики типа (3) часто возникают при применении [2] теории комплексного ростка Маслова [3] к задачам неравновесной статистической механики.

Асимптотическая формула (3) позволяет исследовать проблему хаоса в равновесной статистической механике. Говорят [4], что для k -частичного распределения

$$\rho_N^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) = \int dp_{k+1} dq_{k+1} \cdots dp_N dq_N \rho_N(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) \quad (4)$$

выполнено свойство хаоса, если при $N \rightarrow \infty$ это распределение аппроксимируется произведением одночастичных.

В соответствии с результатами работы [2] при $k = \text{const}$, $N \rightarrow \infty$ k -частичное распределение (4), отвечающее плотности (3), удовлетворяет свойству хаоса:

$$\rho_N^{(k)}(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) \rightarrow (2\pi m \theta)^{-kd/2} \exp\left(-\frac{p_1^2 + \cdots + p_k^2}{2m\theta}\right) \varphi^2(q_1) \cdots \varphi^2(q_k). \quad (5)$$

Формула (5) позволяет вычислять пределы при $N \rightarrow \infty$ средних значений величин типа полной энергии, внутренней энергии, плотности числа частиц, которые выражаются через k -частичное распределение при конечном k . Из формулы (3) вытекает также, что при $k = N$ свойство хаоса не выполняется [2].

В работе [5] доказано, что решение задачи Коши для нестационарного уравнения Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H_N}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H_N}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\right) \rho_N(t, p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) = 0,$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию (3), сохраняет вид (3) с точностью $O(N^{-1/2})$ и в остальные моменты времени $t = O(1)$; что распределение (3) совпадает с точностью $O(N^{-1/2})$ с одним из точных решений (1) уравнения Лиувилля; что формула (3) аппроксимирует решение задачи Коши для уравнения Лиувилля и в том случае, если $t \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

2. Формулировка теоремы. Обозначим через T одномерный тор (окружность). отождествим точки этого тора с элементами фактормножества $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которые являются классами эквивалентности $[x] = \{x + nL \mid n \in \mathbb{Z}\}$, где L – вещественное число. Положим $\mathcal{M} = T^d = T \times \cdots \times T$. Пусть $U_l, l = 1, \dots, p$, – симметричные гладкие вещественные функции, $U_l: \mathcal{M}^l = \mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим функционал F , ставящий в соответствие гладкой функции $n: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\int_{\mathcal{M}} n(x) dx = 1, \quad (6)$$

число

$$F[n(\cdot)] = E[n(\cdot)] + \theta \int dx n(x) \ln n(x), \quad (7)$$

где

$$E[n(\cdot)] = g_1 \int U_1(y) n(y) dy + \cdots + g_p \int U_p(y_1, \dots, y_p) n(y_1) \cdots n(y_p) dy_1 \cdots dy_p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $y_i \in \mathcal{M}$ означает, что частицы находятся в кубическом ящике с длиной ребра L , причем наложены граничные условия периодичности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функционал E имеет физический смысл внутренней энергии, а F – свободной энергии [1].

ЛЕММА 1. *Существует не зависящая от N положительная константа C_1 такая, что при $|g_1/\theta| < C_1, \dots, |g_p/\theta| < C_1$ функционал (1) имеет единственный локальный условный экстремум n_0 на поверхности (6).*

Идея доказательства этой леммы заимствована из работы [6]; доказательство приводится в п. 3.

Положим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{n_0(x)}, \\ V_s(x_1, \dots, x_s) &= \frac{1}{s! \theta} \int dy_1 \cdots dy_s (\delta(x_1 - y_1) - n_0(y_1)) \cdots (\delta(x_s - y_s) - n_0(y_s)) \\ &\quad \times \frac{\delta^s E}{\delta n(y_1) \cdots \delta n(y_s)} [n_0(\cdot)], \quad s = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как функционал E – полином степени p , при $s > p$ $\delta^s E = 0$, значит, и $V_s = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функции V_s симметричны по $x_1, \dots, x_s$ и удовлетворяют свойству

$$\int dx_1 n_0(x_1) V_s(x_1, \dots, x_s) = 0. \quad (9)$$

Пусть A – интегральный оператор с ядром,

$$A(x, y) = \varphi(x) V_2(x, y) \varphi(y), \quad (10)$$

а $M(x, y)$ – ядро оператора $M = -A(1 + A)^{-1}$ (1 – единичный оператор).

Положим

$$f_0 = -\frac{\theta d}{2} \ln(2\pi m \theta), \quad Z_{\text{exp}} = \exp\left(-\frac{N(F[n_0(\cdot)] + f_0)}{\theta}\right).$$

ТЕОРЕМА 1. Существует положительная константа $C_2 \leq C_1$, не зависящая от N , такая, что при $|g_1/\theta| < C_2, \dots, |g_p/\theta| < C_2$ справедливы

1) соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z_N}{Z_{\exp}} = (\det(1 + 2A))^{-1/2}; \quad (11)$$

2) асимптотическая формула

$$\int dp_1 \cdots dp_N dq_1 \cdots dq_N \left| \frac{1}{Z_{\exp}} \exp\left(-\frac{H_N}{\theta}\right) - \rho_N^{\text{as}} \right| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty;$$

здесь ρ_N^{as} имеет вид (3), а $c_N = (\det(1 + A))^{-1/2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Детерминанты $\det(1 + A)$ и $\det(1 + 2A)$ могут быть определены как

$$\det(1 + \lambda A) = \exp\left(\int_0^\lambda d\alpha \operatorname{Tr}(A(1 + \alpha A)^{-1})\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Величина (11) выражается через детерминант второй вариации свободной энергии

$$\det(1 + 2A) = \frac{1}{\theta} \det(\sqrt{n_0} \delta^2 F \sqrt{n_0}),$$

где $\sqrt{n_0} \delta^2 F \sqrt{n_0}$ – оператор с ядром вида

$$\sqrt{n_0(x)} \frac{\delta^2 F}{\delta n(x) \delta n(y)} \sqrt{n_0(y)}.$$

Асимптотическая формула (3) аппроксимирует каноническое распределение с точностью $O(N^{-1/2})$. Приведем вид асимптотики, аппроксимирующей распределение Гиббса с точностью $O(N^{-m/2})$, где m – любое натуральное число.

Пусть $\varphi \in L^2(\mathcal{M})$, $\|\varphi\| = 1$. Обозначим через $\mathcal{F}_\varphi^k$ пространство симметричных функций $f_k(x_1, \dots, x_k)$ из $L^2(\mathcal{M}^k)$, удовлетворяющих условию

$$\int dx_1 \varphi(x_1) f_k(x_1, \dots, x_k) = 0,$$

через $\mathcal{F}$ пространство Фока [7] – прямую сумму $\bigoplus_{k=1}^\infty \mathcal{F}_\varphi^k$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{k=0}^\infty \int dx_1 \cdots dx_k f_k(x_1, \dots, x_k) g_k(x_1, \dots, x_k),$$

где f_k, g_k – k -е компоненты f, g .

Рассмотрим оператор $K_{\varphi, N}: \mathcal{F} \rightarrow L^2(\mathcal{M}^N)$,

$$(K_{\varphi, N} f)(x_1, \dots, x_N) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\sqrt{p! N^p}} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq N \\ i_1 \neq \dots \neq i_p}} f_p(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \prod_{i \neq i_1, \dots, i_p} \varphi(x_i),$$

являющийся частным случаем [8] канонического оператора Маслова для лагранжевого многообразия с комплексным ростком [3].

Определим операторнозначные обобщенные функции [7] $a_\varphi^\pm(\xi): \mathcal{F}_\varphi \rightarrow \mathcal{F}_\varphi$ из соотношений

$$\left(\int d\xi a_\varphi^-(\xi) \lambda(\xi) f \right)_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sqrt{k} \int f_k(\xi, x_1, \dots, x_{k-1}) \lambda_\varphi(\xi) d\xi,$$

$$\left(\int d\xi a_\varphi^+(\xi) \lambda(\xi) f \right)_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j=1}^k f_{k-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) \lambda_\varphi(x_j),$$

где

$$\lambda_\varphi(x) = \lambda(x) - \varphi(x) \int dy \lambda(y) \varphi(y).$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \int d\xi a_\varphi^+(\xi) a_\varphi^-(\xi), \\ \hat{\kappa}(y) &= \frac{1}{N^{1/2}} \varphi(y) (a_\varphi^+(y) + a_\varphi^-(y)) + \frac{1}{N} a_\varphi^+(y) a_\varphi^-(y) - \frac{1}{N^{3/2}} \hat{v} \varphi(y) a_\varphi^-(y), \\ B &= \frac{N}{2} \left(\int dy_1 dy_2 \hat{\kappa}(y_1) \hat{\kappa}(y_2) V_2(y_1, y_2) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \int dy_1 \dots dy_p \hat{\kappa}(y_1) \dots \hat{\kappa}(y_p) V_p(y_1, \dots, y_p) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Оператор B в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ является полиномом по $1/N^{1/2}$:

$$B = B_0 + \frac{1}{N^{1/2}} B_1 + \dots + \frac{1}{N^{3p/2-1}} B_{3p-2}.$$

Введем векторы $f_\alpha^s \in \mathcal{F}_\varphi$, $s = 0, 1, \dots$, $\alpha \in [0, 1]$, следующим образом. Пусть f_α^0 – решение уравнения

$$\frac{df_\alpha^0}{d\alpha} = -B_0 f_\alpha^0,$$

совпадающее при $\alpha = 0$ с вакуумным вектором пространства Фока $f_0^0 = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}_\varphi$. Вектор f_α^0 может быть представлен в виде

$$f_\alpha^0 = c_\alpha \exp \left(\frac{1}{2} \int dx dy a_\varphi^+(x) M_\alpha(x, y) a_\varphi^+(y) \right) f_0^0, \quad (13)$$

где $c_\alpha = (\det(1 + \alpha A))^{-1/2}$, M_α – ядро оператора $-\alpha A(1 + \alpha A)^{-1}$. Пусть f_α^s , $s = 1, 2, \dots$, – решение задачи Коши

$$\frac{df_\alpha^s}{d\alpha} = -B_0 f_\alpha^s - \sum_{\substack{i \geq 1 \\ s-i \geq 0}} B_i f_\alpha^{s-i}, \quad f_\alpha^0 = 0. \quad (14)$$

Положим

$$\begin{aligned} \rho_N^{(m)}(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) &= (2\pi m\theta)^{-Nd/2} \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m\theta} \right) \\ &\times \left(K_{\varphi, N} \left(f_1^0 + \frac{1}{N^{1/2}} f_1^1 + \dots + \frac{1}{N^{(m-1)/2}} f_1^{m-1} \right) (q_1, \dots, q_N) \right)^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. При $|g_1/\theta| < C_2, \dots, |g_p/\theta| < C_2$ справедливо соотношение

$$\int dp_1 \cdots dp_N dq_1 \cdots dq_N \left| \frac{1}{Z_{\exp}} \exp\left(-\frac{H_N}{\theta}\right) - \rho_N^{(m)} \right| = O(N^{-m/2}). \quad (15)$$

Решение системы рекуррентных соотношений (14) строится ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $m = 1$ $\rho_N^{(1)} = \rho_N^{\text{as}}$. Таким образом, утверждение 2) теоремы 1 является следствием теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1) теоремы 1 следует из утверждения 2). Действительно, согласно [5], [8]

$$\|K_{\varphi, N} f_1^0\|_{L^2(\mathcal{M}^N)}^2 \rightarrow \|f_1^0\|^2, \quad N \rightarrow \infty.$$

Эта величина в соответствии с [7] равна $(\det(1 - M^2))^{-1/4}$. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int dp_1 dq_1 \cdots dp_N dq_N \rho_N^{\text{as}}(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) = (\det(1 + 2A))^{-1/2}.$$

3. Существование и единственность экстремума свободной энергии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Приравнивание к 0 вариации δF при условии (6) дает уравнение

$$g_1 U_1(x) + 2g_2 \int U_2(x, y_1) n_0(y_1) dy_1 + \cdots + pg_p \int U_p(x, y_1, \dots, y_{p-1}) n_0(y_1) \cdots n_0(y_{p-1}) + \theta \ln n_0(x) = \lambda, \quad (16)$$

где $\lambda = \text{const}$. Докажем, что уравнение (16) имеет единственное решение при условии (6). Подстановкой

$$n_0(x) = \frac{e^{-W(x)/\theta}}{\int dx e^{-W(x)/\theta}}$$

уравнение (16) приводится к виду

$$W = F[W], \quad (17)$$

где отображение F :

$$F[W](x) = \sum_{l=1}^p pg_p \int U_p(x, y_1, \dots, y_{p-1}) \exp\left(-\frac{W(y_1) + \cdots + W(y_{p-1})}{\theta}\right) \times dy_1 \cdots dy_{p-1} / \int \exp\left(-\frac{W(y_1) + \cdots + W(y_{p-1})}{\theta}\right) dy_1 \cdots dy_{p-1}.$$

Докажем, что отображение F является сжимающим по норме $\sup_x |W(x)|$. Положим

$$w(y) = W(y) + \theta \ln \int dy e^{-W(y)/\theta}.$$

Так как для положительных функций φ_1, φ_2 справедливо свойство

$$\min \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \leq \frac{\int dy \varphi_1(y)}{\int dy \varphi_2(y)} \leq \max \frac{\varphi_1}{\varphi_2},$$

имеет место

$$\left| \theta \ln \frac{\int dy e^{-W_1(y)/\theta}}{\int dy e^{-W_2(y)/\theta}} \right| \leq \|W_1 - W_2\|.$$

Отсюда вытекает, что $\|w_1 - w_2\| \leq 2\|W_1 - W_2\|$.

В силу соотношения $|e^a - e^b| \leq (e^a + e^b)|a - b|$ имеем

$$\begin{aligned} |F[W_1](x) - F[W_2](x)| &\leq \sum_{l=1}^p l g_l \int dy_1 \cdots dy_{l-1} U_l(x, y_1, \dots, y_{l-1}) \\ &\quad \times \left| \exp\left(-\frac{w_1(y_1) + \cdots + w_1(y_l)}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{w_2(y_1) + \cdots + w_2(y_l)}{\theta}\right) \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^p \max U_l 2l(l-1)g_l \frac{\max |w_1 - w_2|}{\theta} \leq \sum_{l=1}^p \frac{4l(l-1)g_l}{\theta} \max U_p \|W_1 - W_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, при малых $g_1/\theta, \dots, g_p/\theta$ отображение F является сжимающим, а значит, существует единственное решение уравнения (17) в соответствии с принципом сжимающих отображений (см., например, [9]).

4. Тождественное преобразование канонического распределения. Представим каноническое распределение через одночастичную плотность n_0 и функции V_s (8). Рассмотрим преобразование S_l , отображающее совокупность функций $(u_0, \dots, u_p)$, $u_k: \mathcal{M}^k \rightarrow \mathbb{R}$, в совокупность функций $(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_p)$ вида

$$\begin{aligned} \tilde{u}_p &= u_p, \quad \dots, \quad \tilde{u}_{l+1} = u_{l+1}, \\ \tilde{u}_l(y_1, \dots, y_l) &= \sum_{s=0}^l (-1)^s \int d\xi_1 \cdots d\xi_s n_0(\xi_1) \cdots n_0(\xi_s) \\ &\quad \times \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq N} u_l(\xi_1, \dots, \xi_s, y_1, \dots, y_{i_1-1}, y_{i_1+1}, \dots, y_{i_s-1}, y_{i_s+1}, \dots, y_l), \\ \tilde{u}_{l-s}(y_1, \dots, y_{l-s}) &= u_{l-s}(y_1, \dots, y_{l-s}) - (-1)^s \frac{l!}{s!(l-s)!} \int d\xi_1 \cdots d\xi_s n_0(\xi_1) \cdots n_0(\xi_s) \\ &\quad \times u_l(\xi_1, \dots, \xi_s, y_1, \dots, y_{l-s}), \quad s \leq l. \end{aligned}$$

Непосредственно из приведенных формул вытекают следующие свойства преобразования S_l .

ЛЕММА 2. *Выполнены соотношения:*

$$\begin{aligned} \int dy_1 n_0(y_1) \tilde{u}_l(y_1, \dots, y_l) &= 0, \\ \sum_{k=0}^p \int dx_1 \cdots dx_k n(x_1) \cdots n(x_k) (u_k(x_1, \dots, x_k) - \tilde{u}_k(x_1, \dots, x_k)) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_{\mathcal{M}} n(x) dx = 1,$$

$$\sum_{k=0}^p N^{1-k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N u_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \sum_{k=0}^p N^{1-k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N \tilde{u}_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \quad (19)$$

Отметим, что соотношение (19) является непосредственным следствием (18), если положить

$$n(x) = \frac{1}{N} (\delta(x - x_1) + \dots + \delta(x - x_N)).$$

Рассмотрим композицию преобразований S_l ,

$$S = S_2 \dots S_p: \left(0, \frac{g_1 U_1}{\theta}, \dots, \frac{g_p U_p}{\theta}\right) \mapsto (V_0, \dots, V_p).$$

Докажем, что $V_2, \dots, V_p$ имеют вид (8). В силу (18)

$$\frac{1}{\theta} E[n(\cdot)] = \sum_{l=0}^p \int V_l(x_1, \dots, x_l) n(x_1) \dots n(x_l) dx_1 \dots dx_l. \quad (20)$$

Приравнявая s -ю вариацию левой и правой части формулы (20) при условии (6) и пользуясь свойством (9), получаем формулу (8).

ЛЕММА 3. *Выполнено соотношение $V_1(x) = -\ln n_0(x) + A$, где $A = \text{const}$.*

Доказательство заключается в подстановке

$$n(x) = n_0(x) + \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x)$$

в формулу (20) и приравнивании к 0 слагаемых линейных по $\alpha(x)$.

ЛЕММА 4. *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} e^{-H_N/\theta} &= (2\pi m\theta)^{-Nd/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m\theta}\right) C_N n_0(q_1) \dots n_0(q_N) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2} V_2(q_{i_1}, q_{i_2}) - \dots - \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i_1, \dots, i_p} V_p(q_{i_1}, \dots, q_{i_p})\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где $C_N = Z_{\text{exp}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 вытекает формула (21) при $C_N = e^{-N(V_0+A)-Nf_0/\theta}$. Для проверки соотношения $C_N = Z_{\text{exp}}$ достаточно установить, что

$$V_0 + A = \frac{1}{\theta} F[n_0(\cdot)]. \quad (22)$$

Подставляя в формулу (20) $n = n_0$ и пользуясь свойством (9) и леммой 3, получаем, что

$$\frac{1}{\theta} E[n_0(\cdot)] = V_0 + A - \int dx n_0(x) \ln n_0(x),$$

а это в силу (7) равносильно формуле (22). Лемма 4 доказана.

5. Построение формального асимптотического ряда. Для доказательства асимптотической формулы (15) удобно ввести понятие полуплотности [2]. Определим полуплотность $\varphi_N(q_1, \dots, q_N)$ из соотношения

$$\frac{1}{Z_{\text{exp}}} e^{-H_N/\theta} = (2\pi m\theta)^{-Nd/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m\theta}\right) (\varphi_N(q_1, \dots, q_N))^2.$$

ЛЕММА 5. Для того чтобы выполнялась формула (15), необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \varphi_N - K_{\varphi, N} \left(f_0 + \frac{1}{N^{1/2}} f_1 + \cdots + \frac{1}{N^{(m-1)/2}} f_{m-1} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{M}_N)} = O(N^{m/2}). \quad (23)$$

Доказательство этой леммы приведено в [2].

Построим формальный асимптотический ряд для полуплотности. Оценка невязки приводится в следующем пункте.

Согласно лемме 4 функция φ_N имеет вид

$$\varphi_N(q_1, \dots, q_N) = \varphi(q_1) \cdots \varphi(q_N) \exp(-R(q_1, \dots, q_N)),$$

где

$$R = \frac{1}{2N} \sum_{i_1, i_2} V_2(q_{i_1}, q_{i_2}) + \cdots + \frac{1}{2N^{p-1}} \sum_{i_1, \dots, i_p} V_p(q_{i_1}, \dots, q_{i_p}).$$

Положим

$$\varphi_N^\alpha(q_1, \dots, q_N) = \exp(-\alpha R(q_1, \dots, q_N)) \varphi(q_1) \cdots \varphi(q_N), \quad (24)$$

где $\alpha \in [0, 1]$. Функция (24) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi_N^\alpha = -R \varphi_N^\alpha \quad (25)$$

и начальному условию $\varphi_N^0 = K_{\varphi, N} \Phi_0$, где $\Phi_0 = (1, 0, 0, \dots)$ – вакуумный вектор пространства Фока.

Приближенное решение уравнения (25) строится по методу работы [8]. Из результатов [8] вытекает лемма.

ЛЕММА 6. Выполнено соотношение $RK_{\varphi, N} = K_{\varphi, N}B$, где B имеет вид (12).

Асимптотическое решение уравнения (25) с точностью $O(N^{-m/2})$ имеет вид

$$\varphi_N^\alpha = K_{\varphi, N} \left(f_\alpha^0 + \frac{1}{N^{1/2}} f_\alpha^1 + \cdots + \frac{1}{N^{(m-1)/2}} f_\alpha^m \right),$$

где

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + B \right) \left(f_\alpha^0 + \cdots + \frac{1}{N^{(m-1)/2}} f_\alpha^m \right) = O(N^{-m/2}), \quad (26)$$

$f_i^0 = 0$ при $i > 0$; $f_0^0 = \Phi_0$.

Соотношение (26) равносильно соотношениям (13), (14). Отметим, что выражение (13) имеет смысл, если [7]

$$\|\alpha A(1 + \alpha A)^{-1}\| < 1, \quad \alpha \in [0, 1].$$

При достаточно малых $g_1/\theta, \dots, g_p/\theta$ данное соотношение выполнено. Установим важное для дальнейшего свойство функции $M_\alpha(x, y)$.

ЛЕММА 7. При достаточно малых $g_1/\theta, \dots, g_p/\theta$ выполнено соотношение

$$\sup \frac{|M_\alpha(x, y)|}{\varphi(x)\varphi(y)} < \frac{1}{8}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (10) для оператора A следует, что ядро оператора

$$M_\alpha = -\alpha A + \alpha^2 A^2 - \alpha^3 A^3 + \dots$$

удовлетворяет свойству

$$\sup \frac{|M_\alpha(x, y)|}{\varphi(x)\varphi(y)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n (\max |V_2|)^n = \frac{\alpha \max |V_2|}{1 - \alpha \max |V_2|}.$$

При достаточно малых $g_1/\theta, \dots, g_p/\theta$ $\max V_2 \leq 1/9$, отсюда получаем утверждение леммы.

Построим решение задачи Коши (14). Для краткости введем обозначение

$$\frac{1}{2} a^+ M_\alpha a^+ \equiv \frac{1}{2} \int a_\varphi(x) M_\alpha(x, y) a_\varphi^+(y) dx dy.$$

Уравнение (14) на f_α^s приводится к виду

$$\frac{\partial f_\alpha^s}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} (a^+ + a^-) A (a^+ + a^-) f_\alpha^s + g_\alpha^s, \quad (27)$$

где $g_\alpha^s \in \mathcal{F}_\varphi$ и полином Q_α^s по операторам a_φ^+ таковы, что

$$g_\alpha^s = Q_\alpha^s(a^+) e^{(a^+ M_\alpha a^+)/2} \Phi_0, \\ Q_\alpha^s(a^+) = \sum_l \int Q_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l) a_\varphi^+(y_1) \dots a_\varphi^+(y_l) dy_1 \dots dy_l.$$

Решение уравнения (27) имеет вид

$$f_\alpha^s = (\det(1 + \alpha A))^{-1/2} \mathcal{P}_\alpha^s(a^+) e^{(a^+ M_\alpha a^+)/2} \Phi_0,$$

где $\mathcal{P}_\alpha^s$ – полином по a_φ^+ . Коэффициентные функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l)}{\partial \alpha} = R_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l) - \sum_{i=1}^l \int L(y_i, z_i) \mathcal{P}_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_l). \quad (28)$$

Здесь

$$R_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l) = Q_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l) - \frac{(l+1)(l+2)}{2} \int A(\xi_1, \xi_2) \mathcal{P}_{\alpha,l+2}^s(\xi_1, \xi_2, y_1, \dots, y_l),$$

а L – ядро оператора $L = (1 + \alpha A)^{-1} A$. Если $Q_{\alpha,l}^s$ – полином степени l_0 , то положим $\mathcal{P}_{\alpha,l}^s = 0$ при $l > l_0$. Построим решение системы (28). Пусть $\Lambda(\xi, \eta)$ – ядро оператора $\Lambda_\alpha = 1 + \alpha A$. Тогда функции $\mathcal{P}_{\alpha,l}^s$ имеют вид

$$\mathcal{P}_{\alpha,l}^s(y_1, \dots, y_l) = \int dz_1 \dots dz_l \Lambda_\alpha^{-1}(y_1, z_1) \dots \Lambda_\alpha^{-1}(y_l, z_l) \\ \times \int_0^\alpha d\beta \Lambda_\beta(z_1, \zeta_1) \dots \Lambda_\beta(z_l, \zeta_l) R_{\beta,l}^s(\zeta_1, \dots, \zeta_l). \quad (29)$$

Из формулы (29) следует, что коэффициентные функции $\mathcal{P}_{\alpha,l}^s$ ограничены, если ограничены функции $Q_{\alpha,l}^s$. Ограниченность функций $Q_{\alpha,l}^s$ следует, в свою очередь, из ограниченности функций $\mathcal{P}_{\alpha,l}^{s-1}$ и определения (12) оператора B . Таким образом, по индукции доказана лемма.

ЛЕММА 8. *Величина*

$$\zeta_{\alpha,m}^N = N^{m/2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + B \right) \left(f_{\alpha}^0 + \dots + \frac{1}{N^{(m-1)/2}} f_{\alpha}^{m-1} \right)$$

имеет вид

$$\sum_{k=0}^{k_0} N^{-k/2} T_{\alpha}^k(a^+) e^{(a^+ M_{\alpha} a^+)/2} \Phi_0,$$

причем коэффициентные функции полиномов T_{α}^k от операторов a_{φ}^+ являются ограниченными.

6. Оценка невязки. Используя леммы 7 и 8, оценим невязку

$$\delta_{N,m}^{\alpha} = \varphi_N^{\alpha} - K_{\varphi,N} \sum_{s=0}^{m-1} f_{\alpha}^s N^{-s/2},$$

удовлетворяющую соотношению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + R \right) \delta_{N,m}^{\alpha} = -N^{-m/2} K_{\varphi,N} \zeta_{\alpha,N}^m$$

и начальному условию $\delta_{N,m}^0 = 0$. Имеем

$$\delta_{N,m}^{\alpha} = - \int_0^1 d\alpha e^{-(1-\alpha)R} K_{\varphi,N} \zeta_{\alpha,N}^m N^{-m/2}.$$

Норма невязки не превосходит

$$\delta_{N,m}^{\alpha} \leq \sup_{\alpha} \| e^{-(1-\alpha)R} K_{\varphi,N} \zeta_{\alpha,N}^m \|_{L^2(\mathcal{M}_N)} N^{-m/2}.$$

Таким образом, для проверки формулы (23), а значит, для доказательства теорем 1 и 2, достаточно доказать лемму.

ЛЕММА 9. *Интеграл*

$$I_{\alpha,N}^m = \int dx_1 \dots dx_N e^{-2(1-\alpha)R(x_1, \dots, x_N)} (K_{\varphi,N} \zeta_{\alpha,N}^m)^2(x_1, \dots, x_N)$$

ограничен равномерно по α и N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши–Буняковского $I_{\alpha,N}^m \leq \sqrt{A_{\alpha,N}^m B_{\alpha,N}^m}$, где

$$A_{\alpha,N}^m = \int dx_1 \dots dx_N e^{-4(1-\alpha)R(x_1, \dots, x_N)} \varphi^2(x_1) \dots \varphi^2(x_N), \quad (30)$$

$$B_{\alpha,N}^m = \int \frac{dx_1 \dots dx_N}{\varphi^2(x_1) \dots \varphi^2(x_N)} (K_{\varphi,N} \zeta_{\alpha,N}^m)^4(x_1, \dots, x_N). \quad (31)$$

Проверим ограниченность интегралов (30) и (31).

Для оценки интеграла (30) сведем задачу к случаю $L = 1$, $\varphi = 1$. Для этого рассмотрим отображение $T^d \rightarrow T^d$. Положим

$$n_s(\xi^s, \dots, \xi^d) = \int d\eta^1 \dots d\eta^{s-1} \rho(\eta^1, \dots, \eta^{s-1}, \xi^s, \dots, \xi^d), \quad s = 1, \dots, d.$$

Введем замену

$$y_s(\xi^s, \dots, \xi^d) = \frac{1}{n_{s+1}(\xi^{s+1}, \dots, \xi^d)} \int_0^{\xi^s} d\eta^s n_s(\eta^s, \xi^{s+1}, \dots, \xi^d). \quad (32)$$

ЛЕММА 10. 1) *Отображение (32) действует из T^d в T^d .*

2) *Якобиан замены (32) равен $Dy/D\xi = \varphi^2$.*

Обозначим через W_l функцию вида $W_l(y_1(\xi_1), \dots, y_l(\xi_l)) = V_l(\xi_1, \dots, \xi_l)$. Интеграл (30) принимает вид

$$\int dy_1 \cdots dy_N \exp \left(-\frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2} W_2(y_{i_1}, y_{i_2}) - \cdots - \frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i_1, \dots, i_p} W_p(y_{i_1}, \dots, y_{i_p}) \right). \quad (33)$$

Рассмотрим ортонормированный базис в пространстве $L^2(T^d)$

$$f_{(n_1 \dots n_d)}(\xi^1, \dots, \xi^d) = g_{n_1}(\xi^1) \cdots g_{n_d}(\xi^d), \quad (34)$$

где $g_0(\xi) = 1$, $g_{2n-1}(\xi) = \sqrt{2} \sin(2\pi n\xi)$, $g_{2n}(\xi) = \sqrt{2} \cos(2\pi n\xi)$. Пронумеруем элементы базиса (34): $f_0, f_1, \dots$, причем $f_0 = 1$. Разложим функции $W_2, \dots, W_p$ по этому базису:

$$W_l(y_1, \dots, y_l) = \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^{\infty} W_{l, j_1 \dots j_l} f_{j_1}(y_1) \cdots f_{j_l}(y_l).$$

В силу условия (9) коэффициенты вида $W_{l, 0j_2 \dots j_l}$ обращаются в 0. Оценим сверху показатель экспоненты в формуле (33). Положим

$$\alpha_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f_n(y_i).$$

В силу выбора базиса $|\alpha| < 2^{d/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N^l} \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^N W_l(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) \right| &= \left| \sum_{j_1, \dots, j_l} W_{l, j_1 \dots j_l} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_l} \right| \\ &\leq \sum_{j_1, \dots, j_l} |W_{l, j_1 \dots j_l}| \cdot |\alpha_{j_1}| \cdots |\alpha_{j_l}| 2^{d(l/2-1)} \leq \sum_{j_1, \dots, j_l} |W_{l, j_1 \dots j_l}| (\alpha_{j_1}^2 + \alpha_{j_2}^2) 2^{d(l/2-1)} \\ &\leq \sum_n \sum_{j_2, \dots, j_l=1}^{\infty} 2^{ld/2} |W_{l, nj_2 \dots j_l}| \alpha_n^2. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл (33) не превосходит

$$\int dy_1 \cdots dy_N \exp \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i, j=1}^N c_n f_n(y_i) f_n(y_j) \right), \quad (35)$$

где

$$c_n = \sum_{l=2}^p \sum_{j_1, \dots, j_{l-1}=1}^{\infty} 2^{ld/2} |W_{l, nj_1 \dots j_{l-1}}|.$$

Интеграл (35) может быть представлен в виде

$$\int \prod_{n=1}^{\infty} \left(d\beta_n \sqrt{\frac{N}{4\pi}} e^{-N\beta_n^2/4} \right) \left(\int \left(\exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n(y) \sqrt{c_n} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sqrt{c_n} f_n(y) \right) dy \right)^N. \quad (36)$$

Так как функция $(\ln(e^u - u))/u^2$ ограничена, для некоторого μ справедлива оценка $e^u - u \leq e^{\mu u^2}$. Отсюда вытекает, что интеграл (36) не превосходит величины

$$J = \int \prod_{n=1}^{\infty} \left(d\beta_n \sqrt{\frac{N}{4\pi}} e^{-N\beta_n^2/4} \right) \exp \left(2^d N \mu \left(\sum_n c_n \beta_n \right)^2 \right).$$

Рассмотрим замену переменной

$$\gamma_k = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n O_{nk},$$

где O – ортогональная матрица, первый столбец которой пропорционален $\sqrt{c_n}$: $O_{n1} = \lambda \sqrt{c_n}$. После этой замены имеем

$$J = \int d\gamma_1 \sqrt{\frac{N}{4\pi}} e^{-N\gamma_1^2/4} \exp \left(2^d N \mu \gamma_1^2 \left(\sum c_n \right)^2 \right) = \left(1 - 2^{d+2} \mu \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \right)^2 \right)^{-1/2}.$$

Таким образом, при

$$\sum_{l=2}^p \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^{\infty} 2^{ld/2} |W_{l,j_1 \dots j_l}| < \frac{1}{2^{d/2+1} \sqrt{\mu}} \quad (37)$$

интеграл (30) ограничен равномерно по N .

Оценим сумму в левой части формулы (37):

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, \dots, j_l} |W_{l,j_1 \dots j_l}| &= \sum_{n_1, \dots, n_{ld}} 2^{ld} \left(1 + 4\pi^2 \sum_{k=1}^{2d} n_k^2 \right)^{-ld} \int dy_1 \dots dy_l \\ &\quad \times g_{n_1}(y_1^1) \dots g_{n_d}(y_1^d) \dots g_{n_{ld-d+1}}(y_l^1) \dots g_{n_{ld}}(y_l^d) \\ &\quad \times \left(1 - \sum \frac{\partial^2}{\partial y_i^a \partial y_i^a} \right)^{ld} W_l(y_1, \dots, y_l) \\ &\leq 4^{ld} \sum_{n_1, \dots, n_{ld}} \left(1 + 4\pi^2 \sum_{k=1}^{2d} n_k^2 \right)^{-ld} \sup((1 - \Delta)W_l). \end{aligned} \quad (38)$$

При достаточно малых $g_1/\theta, \dots, g_l/\theta$ величина (38) не превосходит $1/(2^{d(l+1)/2+1} \sqrt{\mu})$, значит ограниченность интеграла (30) доказана.

Докажем равномерную ограниченность интеграла (31). Заменой (32) общий случай сводится к случаю $\varphi = 1$. Оценим интеграл

$$\int dx_1 \dots dx_N (K_{1,N} f)^4(x_1, \dots, x_N) = \|K_{1,N} f\|_{L^4}^4. \quad (39)$$

Рассмотрим сначала случай, когда элемент f пространства $\mathcal{F}_1$ имеет только n -ю компоненту, отличную от 0:

$$f = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \dots dx_n f_n(x_1, \dots, x_n) a_{\varphi}^+(x_1) \dots a_{\varphi}^+(x_n) \Phi_0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|K_{1,N}f\|_{L^4}^4 = & \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_n} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n} \sum_{k_1 \neq \dots \neq k_n} \sum_{l_1 \neq \dots \neq l_n} \int dx_1 \dots dx_{2N} \frac{1}{N^{2n}(n!)^2} \\ & \times f_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) f_n(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) f_n(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) f_n(x_{l_1}, \dots, x_{l_n}). \end{aligned} \quad (40)$$

Заметим, что если хотя бы одно из чисел $1, \dots, N$ встречается среди индексов

$$i_1, \dots, i_n, \quad j_1, \dots, j_n, \quad k_1, \dots, k_n, \quad l_1, \dots, l_n \quad (41)$$

только один раз, то в силу соотношения

$$\int dx_1 f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

соответствующее слагаемое в сумме (40) обращается в 0. Оценим сверху количество ненулевых слагаемых в формуле (40). Индексы (41) могут пробегать $2n, 2n-1, \dots, n+1$ или n значений. Пусть они пробегают k значений, $n \leq k \leq 2n$. Оценим число таких слагаемых: k чисел из набора $1, \dots, N$ можно выбрать $N!/((N-k)!k!)$ способами, индексы $i_1, \dots, i_n - k!/n!$ способами, столькими же способами можно выбрать индексы $j_1, \dots, j_n; k_1, \dots, k_n; l_1, \dots, l_n$. Таким образом, число ненулевых слагаемых в сумме (40) не превосходит

$$\Omega \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{k!}{n!}\right)^4 \leq (n+1) \frac{N^{2n}}{(n!)^4} ((2n)!)^3.$$

Поэтому

$$\|K_{1,N}f\|_{L^4}^4 \leq \frac{(\sup |f_n|)^4}{N^{2n}(n!)^2} \Omega \leq (\sup |f_n|)^4 \frac{((2n)!)^3}{(n!)^6} (n+1).$$

Пользуясь формулой Стирлинга $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$, получаем, что, начиная с некоторого n ,

$$\|K_{1,N}f\|_{L^4} \leq \sup |f_n| 8^{n/2}.$$

При произвольном f таком, что $\sup |f_k| < \infty$, справедлива оценка

$$\|K_{1,N}f\|_{L^4} \leq c + \sum_{n=0}^{\infty} \sup |f_n| 8^{n/2}, \quad c = \text{const}.$$

Таким образом, интеграл (39) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup |f_n| 8^{n/2}. \quad (42)$$

Проверим сходимость ряда (42) для вектора $f \in \mathcal{F}_1$ вида

$$f = \int dx_1 \dots dx_k A(x_1, \dots, x_k) a^+(x_1) \dots a^+(x_k) e^{(a^+ M a^+)/2} \Phi_0.$$

Отсюда следует равномерная ограниченность интеграла (31). Имеем

$$f_{k+2j}(x_1, \dots, x_{2j+k}) = \frac{\sqrt{(2j+k)!}}{2^j j!} A(x_{2j+1}, \dots, x_{2j+k}) M(x_1, x_2) \cdots M(x_{2j-1}, x_{2j}).$$

Сумма (42) в данном случае не превосходит

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sup |A| (\sup |M|)^j \frac{\sqrt{(2j+k)!}}{2^j j!} 8^{k/2+j}.$$

При условиях $\sup |M| < 1/8$, $\sup |A| < \infty$, проверенных ранее, ряд (42) сходится. Лемма 9, значит, и теоремы 1 и 2 доказаны.

Автор благодарит академика РАН В. П. Маслова за постановку задачи, постоянное внимание к работе, полезное обсуждение ряда вопросов и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.
- [2] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. An asymptotic formula for the N -particle density function as $N \rightarrow \infty$ and violation of the chaos hypothesis // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 217–234.
- [3] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [4] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Наука, 1965.
- [5] Маслов В. П., Шведов О. Ю. Стационарные асимптотические решения задачи многих тел и вывод интегральных уравнений с прыгающей нелинейностью // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 312–326.
- [6] Маслов В. П. Об интегральном уравнении $u(x) = F(x) + \int G(x, \xi) u_+^{k/2}(\xi) d\xi / \int u_+^{k/2}(\xi) d\xi$ // Функцион. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 1. С. 41–50.
- [7] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [8] Maslov V. P., Shvedov O. Yu. The chaos conservation problem in quantum physics // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 173–216.
- [9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Университет Бристоля (Великобритания)

Поступило
09.07.97