Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, Об одной норме и связанных с ней приложениях, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:31:49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ НОРМЕ И СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Б. С. Кашин, В. Н. Темляков

1. Введение. Пусть μ – нормированная мера Лебега на единичной окружности. Для функции $f \in L^1(d\mu)$ с рядом Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(f, x),$$

$$\delta_0 = \int_0^{2\pi} f d\mu, \quad \delta_k = \sum_{2^{k-1} \leq |n| < 2^k} \widehat{f}(n) e^{i(n, x)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

рассмотрим величину

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\omega) \delta_k(f, x) \right\|_{L^\infty(d\mu)} d\omega, \quad (1)$$

где $\{r_k(\omega)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера. Пространством квазинепрерывных функций (*quasi-continuous* – отсюда обозначение $\|\cdot\|_{QC}$) назовем замыкание множества тригонометрических полиномов по норме (1).

Пространства квазинепрерывных функций вводятся и в многомерном случае. Это может быть сделано несколькими способами. Ниже рассмотрим один из вариантов: замыкание множества тригонометрических полиномов d переменных ($d = 2, 3, \dots$) по норме

$$\|f\|_{QC} \equiv \|\|f(\cdot, x^1)\|_{QC}\|_{\infty}, \quad (2)$$

где по определению для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ полагаем $x^1 = (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$. Иными словами, в (2) берется QC-норма по переменной x_1 и sup-норма по остальным переменным.

В работе установлены неравенства для действительных тригонометрических полиномов в нормах (1), (2). Отметим, что наш интерес к рассмотрению этих норм связан, прежде всего, с возможными их приложениями к исследованию аппроксимационных свойств классов функций многих переменных (см., в частности, п. 3 ниже). Помимо изучения норм (1), (2), в этой работе (см. п. 4) проведено сравнение нормы $\|t\|_{\infty}$ и дискретной нормы

$$\|t\|_{\infty, \Omega} \equiv \max_{x \in \Omega} |t(x)| \quad (3)$$

($\Omega \subset \mathbb{T}^d$ – конечное множество точек) на подпространствах $T(Q_k)$ тригонометрических полиномов со спектром в ступенчатых гиперболических крестах:

$$Q_k \equiv \bigcup_{\|s\|_1 \leq k} \rho(s),$$

$$\rho(s) \equiv \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_j-1}] \leq |n_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d\}.$$

2. Неравенства.

ТЕОРЕМА 1. Для любой $f \in L^1(d\mu)$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{QC} \geq \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_{2s}(f, x)\|_{L^1(d\mu)}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что при доказательстве теоремы 1 можно ограничиться случаем, когда f – тригонометрический полином (мы считаем, что (4) заведомо имеет место, если $\|f\|_{QC} = \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 и результата П. Г. Григорьева [1] вытекает, что

$$\sup_{t \in T(2^k)} \frac{\|t\|_{QC}}{\|t\|_{\infty}} \geq c\sqrt{k}.$$

С другой стороны, из результатов о лакунарных рядах несложно вывести, что

$$\sup_{t \in T(2^k)} \frac{\|t\|_{\infty}}{\|t\|_{QC}} \geq c_1\sqrt{k};$$

здесь $T(m)$ – пространство действительных тригонометрических полиномов степени $\leq m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В двумерном случае справедливо неравенство (см. [2])

$$\left\| \sum_{s \in Y_k^2} \delta_s(f) \right\|_{\infty} \geq c \sum_{s \in Y_k^2} \|\delta_s(f)\|_1, \quad (5)$$

где по определению для четных k

$$Y_k^d = \{s = (2k_1, \dots, 2k_d), k_1 + k_2 + \dots + k_d = k/2\}, \quad d = 1, 2, \dots,$$

$$\delta_s(f) = \sum_{n \in \rho(s)} \hat{f}(n) e^{i(n, x)}.$$

В работе [1] (см. также замечание 2 выше) построен пример, показывающий, что аналог неравенства (5) в одномерном случае не имеет места. Вопрос о справедливости соответствующих аналогов оценки (5) для $d \geq 3$ остается открытым (см. обсуждение этого вопроса в [3]). Мы приведем для d -мерного случая неравенство, похожее на (5), но с нормой $\|\cdot\|_{QC}$ вместо $\|\cdot\|_{\infty}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для четного k задан полином d переменных ($d = 2, 3, \dots$) вида

$$f = \sum_{s_1 \in Z_k} \sum_{\|s^1\|_1 = k - s_1} \delta_s(f), \quad s^1 = (s_2, \dots, s_d), \quad Z_k = \{2l\}_{l=0}^{k/2}$$

обладающий свойством: для некоторого $G \subset Z_k$

- 1) $\|\delta_s(f)\|_4 \leq 1$, если $s_1 \in G$;
- 2) справедлива оценка

$$\sum_{s_1 \in G} \sum_{\|s^1\|_1 = k - s_1} \|\delta_s(f)\|_2^2 \geq bk^{d-1},$$

где $b > 0$ – абсолютная постоянная.

Тогда

$$\|f\|_{QC} \geq ck^{d/2}, \quad c = c(b) > 0.$$

Следующий результат показывает, что и в одномерном случае при дополнительных ограничениях на полином f его равномерная норма допускает оценку снизу, аналогичную (4).

ТЕОРЕМА 3. Для любого полинома вида

$$f = \sum_{k=l+1}^{2l} p_k(x) \cos 4^k x,$$

где $p_k \in T(2^l)$, $k = l+1, \dots, 2l$, справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \geq c \sum_{k=l+1}^{2l} \|p_k\|_1, \quad c > 0.$$

3. Оценки энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову. Ниже сохраняются обозначения и определения, использованные в нашей совместной работе [4] при изучении аппроксимационных характеристик классов функций d переменных.

ТЕОРЕМА 4. При $r > \max(1/q, 1/2)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(H_q^r, \text{QC}) &\asymp m^{-r} (\log m)^{r(d-1)+d/2}, \\ \varepsilon_m(W_q^r, \text{QC}) &\asymp m^{-r} (\log m)^{r(d-1)+1/2}, \end{aligned} \quad 1 < q \leq \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. При $r > 1/2$ и $2 \leq q \leq \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_m(H_q^r, \text{QC}) &\asymp m^{-r} (\log m)^{r(d-1)+d/2}, \\ d_m(W_q^r, \text{QC}) &\asymp m^{-r} (\log m)^{r(d-1)+1/2}. \end{aligned}$$

Неравенство (5) применялось в [2] для получения оценок снизу энтропийных чисел функциональных классов. С помощью теоремы 2 аналогичные рассуждения позволяют установить оценки снизу в теореме 4. Оценки снизу в теореме 5 вытекают из теоремы 4 и известных неравенств, связывающих энтропийные числа ε_m и поперечники по Колмогорову d_m (см., например, [5]). Оценки сверху в теоремах 4, 5 могут быть установлены аналогично соответствующим оценкам сверху в метрике L^∞ из [6].

Теорема 3 позволяет получить правильный порядок энтропийных чисел и поперечников по Колмогорову классов LG^r функций одной переменной с гладкостью логарифмического типа. Определим классы LG^r , $r > 0$, условием на двоичные блоки ряда Фурье входящих в него функций:

$$LG^r = \{f \in L^\infty : \|\delta_s(f)\|_\infty \leq (1+s)^{-r}, s = 0, 1, \dots\}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $r > 1$. Справедливы соотношения ($m \rightarrow \infty$)

$$\varepsilon_m(LG^r, L^p) \asymp d_m(LG^r, L^p) \asymp \begin{cases} (\log m)^{-r+1} & \text{при } p = \infty, \\ (\log m)^{-r+1/2} & \text{при } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

В частности, теорема 6 показывает, что порядок $\varepsilon_m(\cdot, L^p)$ и $d_m(\cdot, L^p)$ меняется скачкообразно при переходе от $p < \infty$ к $p = \infty$. Подобное явление в двумерном случае имеет место для классов H_∞^r (см. [2], [3]).

4. Дискретная L^∞ -норма для полиномов d переменных из $T(Q_k)$. Хорошо известно, что для пространства $T(\Pi)$ тригонометрических полиномов d переменных со спектром в параллелепипеде Π найдется конечное множество Ω с числом элементов $|\Omega|$ по порядку равным размерности $T(\Pi)$, для которого имеет место эквивалентность

$$\|t\|_{\infty, \Omega} \asymp \|t\|_\infty, \quad t \in T(\Pi)$$

(см. также (3)).

Сформулированная ниже теорема 7 показывает, что совершенно иначе обстоит дело для пространств $T(Q_k)$: эквивалентность норм $\|t\|_{\infty, \Omega}$ и $\|t\|_\infty$ для полиномов из $T(Q_k)$ может иметь место, только если число точек в Ω значительно превосходит размерность $\dim T(Q_k) \asymp 2^k k^{d-1}$: $|\Omega| \geq 2^{(1+\gamma)k}$, $\gamma > 0$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть множество $\Omega \subset \mathbb{T}^d$ обладает свойством: для любого полинома $t \in T(Q_k)$

$$\|t\|_\infty \leq bk^\alpha \|t\|_{\infty, \Omega}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$|\Omega| \geq c_1 |Q_k| \exp(ck^{1-2\alpha}), \quad c = c(b) > 0, \quad c_1 = c_1(b) > 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев П. Г. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 6. С. 935–938.
2. Temlyakov V. N. // J. Complexity. 1995. V. 11. P. 293–307.
3. Temlyakov V. N. // East J. Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 253–262.
4. Кашин Б. С., Темляков В. Н. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 5. С. 57–86.
5. Lorentz G. G. // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. V. 72. P. 903–937.
6. Белинский Э. С. // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: ЯГУ, 1990. С. 22–37.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
 Университет Южной Каролины
E-mail: kashin@mi.ras.ru, temlyak@math.sc.edu

Поступило
 22.06.98