Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Костин, Обобщение теоремы Л.А. Балашова о под-
рядах ряда Фурье–Хаара, *Матем. заметки*, 2004, том 76,
выпуск 5, 740–747

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:21:32

УДК 517.518.3

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Л. А. БАЛАШОВА О ПОДРЯДАХ РЯДА ФУРЬЕ–ХААРА

В. В. Костин

Основным результатом статьи является теорема, утверждающая, что для ряда по обобщенной системе Хаара с ограниченной последовательностью образующих все его подряды (и даже некоторый более широкий класс рядов) являются рядами Фурье в смысле A -интеграла своей суммы (хотя могут и не быть обычными рядами Фурье).

Библиография: 8 названий.

В [1] Л. А. Балашовым анонсирован следующий результат: если есть ряд Фурье по системе Хаара, то любой его подряд сходится почти всюду и является рядом Фурье в смысле A -интеграла своей суммы (но может не быть обычным рядом Фурье). Этот результат был развит Г. Г. Геворкяном и перенесен им на некоторые другие системы функций (см. [2], [3] и др.). Наряду с рядами по классической системе Хаара часто изучаются ряды по обобщенным системам Хаара, которые обладают сходными с первыми свойствами. В данной статье доказываются подобные результатам Геворкяна обобщения теоремы Балашова для ограниченных обобщенных систем Хаара.

Предварительно напомним некоторые определения.

A -интегралом комплекснозначной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, называется предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_0^1 f(x) dx,$$

если он существует и если выполнено

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \mu \{x : |f(x)| > \lambda\} = 0$$

(саму $f(x)$ в этом случае называют A -интегрируемой). Здесь через $[f(x)]_\lambda$ обозначена среза функции $f(x)$, определяемая так:

$$[f(x)]_\lambda := \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda, \\ 0, & |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Ряд же называется *рядом Фурье в смысле A -интеграла* (или *рядом Фурье (A)*), если его коэффициенты восстанавливаются по формулам Фурье, где интеграл Лебега заменен на A -интеграл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00428.

Пусть дана $\mathbf{P} = \{p_i\}_1^\infty$ – последовательность натуральных чисел, отличных от 1. Положим $m_0 := 1$, $m_j := \prod_{s=1}^j p_s$ при $j \in \mathbb{N}$. Введем систему обобщенных функций Хаара $\{\chi_k(x)\}_0^\infty$: $\chi_0(x) \equiv 1$, а при $k \geq 1$

$$\chi_k(x) := \chi_{r,s}^n(x) = \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp\left(\frac{2\pi i x_{n+1}}{p_{n+1}} s\right), & x \in \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right), \\ 0, & x \in [0, 1) \setminus \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right), \end{cases}$$

где $k = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s - 1$, $0 \leq r \leq m_n - 1$, $1 \leq s \leq p_{n+1} - 1$, а x_{n+1} – коэффициент $\mathbf{P}$ -ичного разложения точки $x \in [0, 1)$

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \leq x_j \leq p_j - 1, \quad x_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

причем для точек, где возможно неоднозначное представление ($\mathbf{P}$ -ично-рациональных), выбираются суммы, состоящие из конечного числа слагаемых.

Если все p_j равны 2, то получаем обычную систему Хаара. Интервалы вида $[i/m_n, (i+1)/m_n)$, $i = 0, \dots, m_n - 1$, назовем $\mathbf{P}$ -ичными интервалами ранга n . При $m_n \leq k < m_{n+1}$ функции $\chi_k(x)$ непрерывны справа, отличны от нуля лишь на одном $\mathbf{P}$ -ичном интервале ранга n и постоянны на интервалах ранга $n+1$. Обобщенные системы Хаара $\{\chi_n\}$, порожденные ограниченной последовательностью $\mathbf{P}$, т.е. такой, что

$$\sup_n p_n < \infty, \quad (1)$$

называются *ограниченными*.

Для дальнейшего изложения удобно ввести еще несколько понятий.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество сублинейных операторов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \chi_k(x) \mapsto \sup_n \varphi \left(\sum_{k=0}^{m_n-1} \varphi_k(b_k, \chi_k(x)) \right) \quad (2)$$

(здесь $\varphi(x)$, $\varphi_k(x, y)$ – измеримые функции, свои для каждого $M \in \mathcal{M}$), действующих из линейного пространства рядов по обобщенной системе Хаара в множество измеримых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем упорядоченную пару операторов M_1, M_2 из $\mathcal{M}$ *парой Фурье типа* (p, p) , если для любого ряда σ , являющегося рядом Фурье некоторой функции из $L_p[0, 1]$, $M_1(\sigma)$ и $M_2(\sigma)$ принадлежат $L_p[0, 1]$ и выполнено соотношение

$$\|M_1(\sigma, x)\|_p \leq C \|M_2(\sigma, x)\|_p, \quad (3)$$

где C – константа, общая для всех таких рядов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $M \in \mathcal{M}$ назовем *порождающим ряды Фурье*, если из ограниченности почти всюду некоторой константой величины $M(\sigma)$ следует, что ряд σ является рядом Фурье.

Отметим установленный Власовой [4] факт: ряд Фурье функции $f(x) \in L[0, 1]$ по ограниченной обобщенной системе Хаара сходится почти всюду к $f(x)$.

ЛЕММА 1. Пусть M_1, M_2 из $\mathcal{M}$ – пара Фурье типа $(2, 2)$, причем оператор M_2 порождает ряды Фурье. Тогда если для ряда по ограниченной обобщенной системе Хаара σ (не обязательно ряда Фурье) оператор M_2 обладает свойством

$$\lambda \mu \{x : M_2(\sigma, x) > \lambda\} = \overline{o}(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

то таким же свойством обладает и оператор M_1 , т.е.

$$\lambda \mu \{x : M_1(\sigma, x) > \lambda\} = \overline{o}(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести по методу Геворкяна из [5].

Пусть дан ряд

$$\sigma = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \chi_n(x). \quad (6)$$

Поскольку верно (1), существует $L \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n < L$. Фиксируем некоторое $\lambda > 0$. Пусть $E_\lambda := \{x : M_2(\sigma, x) > \lambda\}$. Построим теперь множество B_λ , содержащее E_λ , в виде не более чем счетного объединения $\mathbf{P}$ -ичных интервалов. Пусть есть произвольное $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и множества $B_\lambda^q = \bigcup_i I_i^{\lambda, q}$ при $q < r$ уже построены ($B_\lambda^{-1} := \emptyset$). Разобьем $[0, 1]$ на m_r $\mathbf{P}$ -ичных интервалов ранга r . Из них выберем те интервалы I , которые не лежат в $\bigcup_{q < r} B_\lambda^q$ и для которых выполняется неравенство

$$\mu(E_\lambda \cap I) \geq \frac{1}{L} |I|. \quad (7)$$

Обозначим их $I_i^{\lambda, r}$, а их объединение $B_\lambda^r = \bigcup_i I_i^{\lambda, r}$. Продолжая аналогичный процесс по индукции, в итоге определяем

$$B_\lambda = \bigcup_{q \geq 0} \bigcup_i I_i^{\lambda, q}.$$

Из построения следует, что (все включения будем понимать с точностью до множеств меры нуль)

$$E_\lambda \subset B_\lambda \quad \text{и} \quad \mu B_\lambda \leq L \mu E_\lambda. \quad (8)$$

Пусть $\mathcal{N}$ – подмножество из $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Введем обозначение

$$\sigma_{\mathcal{N}} := \sum_{n \in \mathcal{N}} b_n \chi_n(x). \quad (9)$$

Через $\{n\}$ обозначим носитель n -й обобщенной функции Хаара $\chi_n(x)$. Обозначим $N := \{n : \{n\} \not\subset B_\lambda\}$. Рассмотрим ряд σ_N , т.е.

$$\sum_{\{n\} \not\subset B_\lambda} b_n \chi_n(x). \quad (10)$$

Заметим, что на множестве $[0, 1] \setminus B_\lambda$ значения результатов действия операторов на ряды σ и σ_N совпадают:

$$M_2(\sigma, x) = M_2(\sigma_N, x), \quad M_1(\sigma, x) = M_1(\sigma_N, x) \quad \forall x \in [0, 1] \setminus B_\lambda. \quad (11)$$

Аналогично доказательству теоремы 1 из [6] покажем, что

$$M_2(\sigma_N, x) \leq 3\lambda \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (12)$$

Обозначим $J_n := \{0, 1, \dots, m_n - 1\}$. Зафиксируем некоторое $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим действие оператора M_2 на ряд $\sigma_{N \cap J_n}$. Возможны следующие случаи.

а) $x \notin B_\lambda$. Тогда если функция $\chi_k(x)$ такова, что ее носитель $\{k\} \subset B_\lambda$, то выполнено $\chi_k(x) = 0$; поэтому с учетом (8) и определения E_λ

$$M_2(\sigma_{N \cap J_n}, x) = M_2(\sigma_{J_n}, x) \leq \lambda. \quad (13)$$

б) $x \in B_\lambda$. Рассмотрим функции $\chi_k(x)$ ранга n (т.е. $m_{n-1} \leq k < m_n$, $m_{-1} := 0$), носители которых содержат точку x , но не полностью лежат в B_λ (как всегда во включениях, множества меры нуль пренебрегаем), и соответствующую часть ряда σ_N . В этом случае на каждом из $\mathbf{P}$ -ичных интервалов ранга n , которые мы обозначим Δ_i , $i = 1, \dots, p_n$, составляющих $\{k\}$, есть точки из дополнения к E_λ , которые мы обозначим через t_i , $i = 1, \dots, p_n$ (в противном случае мы весь $\{k\}$ либо даже еще больший $\mathbf{P}$ -ичный интервал в силу (7) взяли бы в качестве одного из составляющих B_λ , но $\{k\}$ у нас полностью в B_λ не лежит). В этих точках t_i в силу сублинейности оператора M_2 выполняется

$$M_2(\sigma_{N \cap (J_n \setminus J_{n-1})}, t_i) = M_2(\sigma_{J_n \setminus J_{n-1}}, t_i) \leq M_2(\sigma_{J_n}, t_i) + M_2(\sigma_{J_{n-1}}, t_i) \leq 2\lambda,$$

а поскольку (в силу кусочного постоянства функций обобщенной системы Хаара) результат действия M_2 на полином по обобщенной системе Хаара степени младше m_n на каждом из Δ_i постоянен (и совпадает там со значением в t_i), для любого y из $\{k\}$ (в том числе и для x)

$$M_2(\sigma_{J_n \setminus J_{n-1}}, y) \leq 2\lambda. \quad (14)$$

Далее, при $k < m_{n-1}$ на $\{k\}$ есть точка t , не лежащая в B_λ , и для $M_2(\sigma_{N \cap J_{n-1}}, t)$ выполнен пункт а), а раз эта функция постоянна на всем $\{k\}$, то

$$M_2(\sigma_{N \cap J_{n-1}}, x) = M_2(\sigma_{N \cap J_{n-1}}, t) \leq \lambda. \quad (15)$$

Из (13)–(15) в силу сублинейности оператора M_2 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in [0, 1]$

$$M_2(\sigma_{N \cap J_n}, x) \leq 3\lambda, \quad (16)$$

откуда вытекает (12).

Поскольку M_2 порождает ряды Фурье, ряд (10) сходится почти всюду к некоторой функции $g(x)$ и является ее рядом Фурье. Аналогично (12) можно показать, что для любого n m_n -е частные суммы ряда (10) ограничены величиной 3λ , а поэтому $g(x)$ ограниченная и принадлежит $L_2[0, 1]$.

Из (11) вытекает включение

$$\{x : M_1(\sigma, x) > \lambda\} = B_\lambda \cup \{x \notin B_\lambda : M_1(\sigma, x) > \lambda\} \subset B_\lambda \cup \{x : M_1(\sigma_N, x) > \lambda\},$$

а поскольку M_1, M_2 – пара Фурье типа $(2, 2)$, используя неравенство Чебышева и (12), получаем оценку

$$\begin{aligned}
 \lambda \mu \{x : M_1(\sigma, x) > \lambda\} &\leq \lambda \mu B_\lambda + \lambda \mu \{x : (M_1(\sigma_N, x))^2 > \lambda^2\} \\
 &\leq \lambda \mu B_\lambda + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (M_1(\sigma_N, x))^2 dx \\
 &\leq \lambda \mu B_\lambda + \frac{C}{\lambda} \int_0^1 (M_2(\sigma_N, x))^2 dx \\
 &\leq \lambda \mu B_\lambda + \frac{C}{\lambda} \mu B_\lambda (3\lambda)^2 + \frac{C}{\lambda} \int_{[0,1] \setminus B_\lambda} (M_2(\sigma_N, x))^2 dx \\
 &= (1 + 9C) L \lambda \mu E_\lambda + \frac{C}{\lambda} \int_{[0,1] \setminus B_\lambda} (M_2(\sigma, x))^2 dx. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$G_{\lambda,k} := \left\{ x : \frac{\lambda}{2^k} < M_2(\sigma, x) \leq \frac{\lambda}{2^{k-1}} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия (4) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2^k} \mu G_{\lambda,k} = 0,$$

а также, что существует $R \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\frac{\lambda}{2^k} \mu G_{\lambda,k} < R \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0.$$

Далее, верно

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{\lambda} \int_{[0,1] \setminus B_\lambda} (M_2(\sigma, x))^2 dx &= \frac{C}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_{\lambda,k}} (M_2(\sigma, x))^2 dx \\
 &\leq 4C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\lambda}{2^k} \mu G_{\lambda,k} \right) = \bar{o}(1) \quad (18)
 \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$, поскольку для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $K \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $\lambda > 0$

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\lambda}{2^k} \mu G_{\lambda,k} \right) < R \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

а далее такое $\lambda_\varepsilon > 0$, что для всех $\lambda > \lambda_\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\lambda}{2^k} \mu G_{\lambda,k} \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из соотношений (17), (4) и (18) вытекает формула (5).

Для произвольного ряда по обобщенной системе Хаара $\sum a_n \chi_n(x)$ определим широко используемые операторы: функцию Пэли

$$P(x) := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|^2 \right)^{1/2}$$

и мажоранту частных сумм

$$S^*(x) := \sup_n |S_{m_n}(x)|.$$

ЛЕММА 2. Для ряда по ограниченной обобщенной системе Хаара

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \quad (19)$$

эквивалентны условия на функцию Пэли

$$\lambda \mu \{x : P(x) > \lambda\} = \overline{o}(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

и на мажоранту частных сумм

$$\lambda \mu \{x : S^*(x) > \lambda\} = \overline{o}(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Операторы S^* и P являются сублинейными операторами из $\mathcal{M}$, где S^* получается при $\varphi(x) = |x|$, $\varphi_k(x, y) = xy$, а P задается функциями $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $\varphi_k(x, y) = |xy|^2$. Эти операторы порождают ряды Фурье, а пары $\{P, S^*\}$ и $\{S^*, P\}$ являются парами Фурье типа $(2, 2)$. В самом деле, если $S^*(\sigma, x)$ или $P(\sigma, x)$ ограничены почти всюду константой, то ряд σ является рядом Фурье некоторой функции из $L_2[0, 1]$ (такое заключение верно для произвольной ортонормированной системы функций и легко может быть выведено, если в соответствующем неравенстве $M(\sigma, x) < C$ убрать $\sup$ в определении M из (2), перейдя к неравенству с суммой до произвольной верхней границы, возвести его в квадрат и проинтегрировать по отрезку $[0, 1]$). Затем, если дана произвольная $g(x) \in L_2[0, 1]$, то, поскольку L_2 -нормы функций $g(x)$ и $P_g(x)$ (функции Пэли ее ряда Фурье σ_g) совпадают (опять же сразу следует из ортонормированности рассматриваемых систем) и σ_g сходится к $g(x)$ почти всюду, выполняется

$$\|P_g(x)\|_2^2 = \|g(x)\|_2^2 \leq \|S_g^*(x)\|_2^2.$$

Неравенство типа (3) в другую сторону получается из того, что S^* является оператором сильного типа $(2, 2)$. Действительно, в силу мартингальности m_n -й подпоследовательности частных сумм (через Δ^n здесь обозначены **R**-ичные интервалы ранга n)

$$\begin{aligned} \|S_g^*(x)\|_2 &= \left\| \sup_{\Delta^n \ni x, n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}(\Delta^n)| \right\|_2 = \left\| \sup_{\Delta^n \ni x, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\Delta^n|} \left| \int_{\Delta^n} S_{m_n}(t) dt \right| \right\|_2 \\ &= \left\| \sup_{\Delta^n \ni x, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|\Delta^n|} \left| \int_{\Delta^n} g(t) dt \right| \right\|_2 \leq \left\| \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |g(t)| dt \right\|_2 \\ &= \|M(g, x)\|_2 \leq C_M \|g(x)\|_2 = C_M \|P_g(x)\|_2, \end{aligned} \quad (22)$$

ведь максимальная функция $M(f, x)$ имеет сильный тип $(2, 2)$ с константой C_M (см. [7, с. 487]). Таким образом, к парам $\{P, S^*\}$ и $\{S^*, P\}$ применима лемма 1.

Заметим, что S^* можно рассматривать как частный случай оператора S_δ^* , заданного последовательностью знаков $\{\delta_k\}_0^\infty$, $\delta_k = \pm 1$,

$$S_\delta^*(x) := \sup_n \left| \sum_{k=0}^{m_n-1} \delta_k a_k \chi_k(x) \right|,$$

когда все δ_k равны 1. Можно установить, что для произвольной последовательности знаков $\{\delta_k\}_0^\infty$, $\delta_k = \pm 1$, пары $\{P, S_\delta^*\}$ и $\{S_\delta^*, P\}$ также удовлетворяют условиям леммы 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\chi_n(x)\}_1^\infty$ – ограниченная обобщенная система Хаара,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (23)$$

– ряд Фурье по этой системе. Тогда для любой ограниченной последовательности чисел $\{\varepsilon_n\}_0^\infty$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x) \quad (24)$$

сходится почти всюду и является рядом Фурье в смысле A -интеграла своей суммы. В частности, таковым является любой подряд ряда (23).

Заметим, что если все $p_n = 2$ и рассматриваются только подряды ряда Фурье, то получается теорема Л. А. Балашова.

Перед доказательством теоремы 1 покажем, что для любой ограниченной обобщенной системы Хаара существует ряд Фурье по этой системе такой, что не каждый его подряд является рядом Фурье. Пусть это не так. То есть для произвольного ряда Фурье каждый его подряд сам ряд Фурье. Поскольку ряды Фурье по рассматриваемым системам сходятся к порождающим их функциям в L_1 [3], а сходимость всех подрядов ряда в метрическом пространстве эквивалентна его безусловной сходимости (т.е. сходимости при любых перестановках слагаемых, см. теорему 1.1 книги [7]), получается, что для каждой функции $f \in L_1$ ее ряд Фурье сходится к f безусловно, а тогда рассматриваемая ограниченная обобщенная система Хаара образует безусловный базис в L_1 . Однако безусловных базисов в L_1 не существует (см. теорему 2.13 из [7]). Причем в силу рассматриваемой теоремы подряды ряда Фурье, не являющиеся рядами Фурье, будут сходиться к не интегрируемой по Лебегу функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем следовать схеме, использованной Геворкяном в [2] для доказательства аналогичного теореме 1 утверждения для системы Франклина. Поскольку рассматривается ряд Фурье функции $f(x)$ по ограниченной обобщенной системе Хаара, он сходится почти всюду [4]. Тогда определена функция Пэли $P_f(x)$ для ряда (23), ведь из [8] известно, что ряды по ограниченной обобщенной системе Хаара сходятся почти всюду тогда и только тогда, когда почти всюду конечна функция Пэли. Значит, для любого ряда вида (24) функция Пэли (обозначим ее $P_\varepsilon(x)$) тоже почти всюду конечна, откуда следует, что сам ряд (24) сходится почти всюду к некоторой функции $f_\varepsilon(x)$ (опять же см. [8]). Пусть

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varepsilon_n| \leq C.$$

По лемме 1 из [6] выполняется

$$\mu\{x : S_f^*(x) > \lambda\} = \overline{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

что по лемме 2 влечет выполнение

$$\mu\{x : P_f(x) > \lambda\} = \overline{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Но тогда верна оценка

$$\begin{aligned}\mu\{x : P_\varepsilon(x) > \lambda\} &= \mu\left\{x : \sum |\varepsilon_n a_n \chi_n(x)|^2 > \lambda^2\right\} \leq \mu\left\{x : C^2 \sum |a_n \chi_n(x)|^2 > \lambda^2\right\} \\ &= \mu\left\{x : \sum |a_n \chi_n(x)|^2 > \frac{\lambda^2}{C^2}\right\} = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$, и опять, применяя лемму 2, получаем

$$\mu\left\{x : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{m_k-1} \varepsilon_n a_n \chi_n(x) \right| > \lambda\right\} = \bar{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. После этого ясно, что для ряда (24) можно использовать теорему 1 из [6], утверждающую, что условия $\lambda \mu\{x : S^*(x) > \lambda\} = \bar{o}(1)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, достаточно для того, чтобы ряд был рядом Фурье в смысле A -интеграла предельной функции.

Из этого доказательства видно, что лемма 2 может быть дополнена следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть есть ряд по ограниченной обобщенной системе Хаара, для которого выполнено одно из утверждений (20) или (21). Тогда выполнено и другое утверждение, при этом ряд сходится почти всюду и является рядом Фурье (A) предельной функции. Кроме того, все эти факты выполняются для любого полученного из него ряда вида (24) (в том числе для любого подряда).

Теорема 2 обобщает пункт 3 теоремы 1 из [6]. Из теоремы 3 той же работы следует, что теорема 2 не переносится ни на какую неограниченную обобщенную систему Хаара.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Балашов Л. А. Обобщенное интегрирование рядов по системе Хаара // Всесоюзная школа по теории функций. Ереван, 1987. С. 3.
- [2] Геворкян Г. Г. Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 521–545.
- [3] Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. ж. 1968. Т. 9. № 2. С. 297–314.
- [4] Власова Е. А. Обобщенные системы Хаара. Дисс. . . . к. ф.-м. н. М., 1988.
- [5] Gevorgian G. G. On Uniqueness of Additive Functions of Dyadic Cubes and Series by Haar Systems // Изв. НАН Армении. Матем. 1995. Т. 30. № 5.
- [6] Костин В. В. К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 5. С. 704–723.
- [7] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
- [8] Vlasova E. A. Convergence of series with respect to generalized Haar systems // Anal. Math. 1987. V. 13. P. 339–360.

Институт проблем управления РАН, г. Москва
E-mail: valkostin@mail.ru, valkostin@newmail.ru

Поступило
18.09.2003
Исправленный вариант
05.05.2004