Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Аманжаев, О сложности приближенного табличного задания дискретных аналогов функций конечной гладкости в метрике L^p , *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 5, 643–647

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:07:35

УДК 517.5+519.7

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ТАБЛИЧНОГО ЗАДАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКЕ L^p

Г. Г. Аманжаев

Для дискретных аналогов классов функций конечной гладкости исследовалась величина $\log \text{App}_{\text{roх}}$, характеризующая минимально необходимую длину таблиц, позволяющих восстанавливать функции из этих классов с погрешностью не более 1 в метрике пространства L^p .

Библиография: 5 названий.

В работах [1]–[3] были определены различные классы функций, являющиеся дискретными аналогами классов функций конечной гладкости, и исследовалась величина $\log \text{App}_{\text{roх}}$, характеризующая минимально необходимую длину таблиц, позволяющих восстанавливать функции из этих классов с погрешностью не более 1. В настоящей работе аналогичные результаты (анонсированные в указанных работах) доказаны для случая приближений в других метриках, а именно, в метрике пространства функций вида $f: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f(i)|^p \right)^{1/p}$$

(нормирующий множитель $1/N$ выбран так, чтобы нормой константы была сама эта константа). Обозначая также равномерную норму

$$\|f\| = \max_x |f(x)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$$

через $\|f\|_\infty$, имеем для любой функции f и любых p, q , $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, соотношение

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty = \|f\|,$$

причем для $f = \text{const}$ все эти неравенства обращаются в равенства.

Будем говорить, что множество дискретных функций A вида $f: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ называется *1-приближающим* в метрике $\|\cdot\|_p$ для класса K таких

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01068.

функций, если для каждой функции $f \in K$ в A найдется такая функция g , для которой $\|f - g\|_p \leq 1$.

Обозначим минимальную мощность 1-приближающего в метрике $\|\cdot\|_p$ множества для класса K через $\text{Approx}_p K$.

Связь между такими нормами для разных p приводит при $1 \leq p \leq q \leq \infty$ к неравенству

$$\text{Approx}_1 K \leq \text{Approx}_p K \leq \text{Approx}_q K \leq \text{Approx}_\infty K. \quad (1)$$

Из этого неравенства видно, что верхняя оценка для $\text{Approx}_\infty K$ является верхней оценкой всех $\text{Approx}_p K$, а для получения нижней достаточно исследовать только случай метрики $\|\cdot\|_1$ (конечно, если эти нижняя и верхняя оценки окажутся одного порядка).

Наша задача – нахождение порядка роста (при $N \rightarrow \infty$) логарифма этих величин для дискретных аналогов классов функций конечной гладкости. Проведем соответствующий анализ на примере дискретных аналогов классов $H_{n,\omega}$ при $n \geq 1$, которые заданы следующим образом. Пусть $H_{n,\omega}$ — это множество функций вида $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, имеющих n производных, причем для n -й производной модуль непрерывности мажорируется функцией ω . Внешним дискретным аналогом класса $H_{n,\omega}$ при N уровнях квантования назовем класс дискретных функций

$$\begin{aligned} \hat{H}_{n,\omega}^N = \left\{ g: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\} \mid \right. \\ \left. \exists f \in H_{n,\omega} \quad \forall x \quad g(x) = \left\lfloor Nf\left(\frac{x}{N} + \frac{1}{2N}\right) \right\rfloor \right\}. \end{aligned}$$

Для функций из $\hat{H}_{n,\omega}^N$ имеет место оценка конечных разностей:

$$|\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})| < \frac{\omega((x_{n+1} - x_0)/N)}{(x_{n+1} - x_0)n! N^{n-1}} + \varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}), \quad (2)$$

где через $\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})$ обозначена разделенная конечная разность (см. [4]) $(n+1)$ -го порядка с узлами $x_0, \dots, x_{n+1}$ от функции g , а величина

$$\varphi_n(x_0, \dots, x_{n+1}) = \max_{|h| \leq 1/2} \Delta_{n+1}(h; x_0, \dots, x_{n+1}),$$

где максимум берется по всем функциям h , не превышающим $1/2$ по абсолютной величине.

Внутренним дискретным аналогом $H_{n,\omega}^N$ класса $H_{n,\omega}$ при N уровнях квантования назовем класс дискретных функций вида $g: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$, удовлетворяющих неравенству (2) при любом наборе различных $x_0, \dots, x_{n+1} \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Будем использовать знаки “ $\asymp$ ” и “ $\asymp$ ” для обозначения соответственно равенства и (нестрогого) неравенства по порядку.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА. Пусть ω — выпуклая вверх функция типа модуля непрерывности, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$\log \text{Approx}_p \hat{H}_{n,\omega}^N \asymp \log \text{Approx}_p H_{n,\omega}^N \asymp \frac{1}{W(1/N)},$$

где W – функция, обратная к $t^n \omega(t)$.

С учетом того, что в [1]–[3] эта оценка была доказана при $p = +\infty$, а также неравенств (1) и очевидного соотношения $\text{Approx}_p \hat{H}_{n,\omega}^N \leq \text{Approx}_p H_{n,\omega}^N$ для доказательства этой теоремы не хватает только соотношения

$$\log \text{Approx}_p \hat{H}_{n,\omega}^N \gtrsim \frac{1}{W(1/N)}.$$

Нам потребуется одно комбинаторное утверждение.

ЛЕММА. При $\alpha \in (0, 1/4)$, $n \rightarrow \infty$, $m \sim \alpha n$ множество двоичных наборов длины n содержит подмножество мощности не меньше

$$2^{n(1+2\alpha \log(2\alpha) + (1-2\alpha) \log(1-2\alpha) + o(1))}$$

(логарифм этой величины имеет порядок n), элементы которого попарно отличаются не менее чем в m разрядах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на множестве всех двоичных наборов длины n с метрикой Хемминга шар радиуса r с центром a , где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$. Пусть $V(r)$ – объем такого шара (число всех его точек). Тогда (см., например, [5, с. 312]) мощность рассматриваемого множества не меньше чем $x = 2^n / V(2m - 1)$. Оценим эту величину снизу, учитывая то, что $V(r) = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^r$.

Итак,

$$x = \frac{2^n}{C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{2m-1}}.$$

Среди этих $2m$ слагаемых при достаточно больших n наибольшим будет последнее. Поэтому $x \geq 2^n / (2m C_n^{2m})$, т.е. $\log x \geq n - \log(2m) - \log C_n^{2m}$. По формуле Стирлинга $k! \sim \sqrt{2\pi k} (k/e)^k$ имеем

$$\begin{aligned} \log C_n^{2m} &= \log \frac{n!}{(2m)!(n-2m)!} = \log \frac{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1+o(1))}{\sqrt{4\pi m} (2m/e)^{2m} \sqrt{2\pi(n-2m)} ((n-2m)/e)^{n-2m}} \\ &= \log \sqrt{\frac{n}{4\pi m(n-2m)}} + 2m \log \frac{n}{2m} + (n-2m) \log \frac{n}{n-2m} + o(1) \\ &= n \left(2\alpha \log \frac{1}{2\alpha} + (1-2\alpha) \log \frac{1}{1-2\alpha} + o(1) \right). \end{aligned}$$

Поэтому $\log x \geq n(1+2\alpha \log(2\alpha) + (1-2\alpha) \log(1-2\alpha) + o(1))$. Покажем, что последняя величина имеет порядок n , т.е. что

$$1 + 2\alpha \log 2\alpha + (1-2\alpha) \log(1-2\alpha) > 0. \quad (3)$$

Обозначим $\beta = 4\alpha - 1$ (при этом $-1 < \beta < 0$). Тогда неравенство (3) примет вид

$$1 + \frac{1+\beta}{2} \log \frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2} \log \frac{1-\beta}{2} > 0,$$

или после преобразований

$$(1+\beta) \ln(1+\beta) + (1-\beta) \ln(1-\beta) > 0.$$

Как легко проверить дифференцированием, левая часть этого неравенства минимальна при $\beta = 0$, а при $\beta \neq 0$ она положительна. Тем самым, лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим множество функций, имеющих вид

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor 1/(2^{n+1}\varepsilon) \rfloor - 1} a_l \delta_{n,\varepsilon}(x - 2^{n+1}l\varepsilon), \quad (4)$$

где $a_l \in \{0, 1\}$, а функции $\delta_{n,\varepsilon}$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{0,\varepsilon}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \omega(x)/2, & 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ \omega(2\varepsilon - x)/2, & \varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, \\ 0, & x \geq 2\varepsilon, \end{cases} \\ \delta_{1,\varepsilon}(x) &= \int_0^x (\delta_{0,\varepsilon}(t) - \delta_{0,\varepsilon}(t - 2\varepsilon)) dt, \\ \delta_{2,\varepsilon}(x) &= \int_0^x (\delta_{1,\varepsilon}(t) - \delta_{1,\varepsilon}(t - 4\varepsilon)) dt, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n,\varepsilon}(x) &= \int_0^x (\delta_{n-1,\varepsilon}(t) - \delta_{n-1,\varepsilon}(t - 2^n\varepsilon)) dt, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

т.е. $\delta_{n,\varepsilon}$ имеет вид неотрицательной “шапочки” с носителем $[0, 2^{n+1}\varepsilon]$, n раз дифференцируема, причем модуль непрерывности n -й производной мажорируется функцией $\omega/2$, а также при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношения

$$\max_x \delta_{n,\varepsilon}(x) \asymp \varepsilon^n \omega(\varepsilon), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\varepsilon}(x) dx \asymp \varepsilon^{n+1} \omega(\varepsilon).$$

Пусть f_1 и f_2 — две функции вида (4), заданные соответственно наборами коэффициентов $a' = (a'_0, a'_1, \dots)$ и $a'' = (a''_0, a''_1, \dots)$. Оценим снизу величину $\|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_1$ через $\sum_i |a'_i - a''_i|$, где $f: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ по определению есть $\lfloor Nf(x/N + 1/(2N)) \rfloor$. В силу того, что носители разных функций δ (при разных l) не имеют общих внутренних точек, имеем

$$\|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_1 = \sum_l |a'_l - a''_l| \cdot \|\widehat{\delta}_{n,\varepsilon}(\cdot - 2^{n+1}l\varepsilon)\|_1 \geq \min_t \|\widehat{\delta}_{n,\varepsilon}(\cdot - t)\|_1 \sum_l |a'_l - a''_l|.$$

Далее, $\widehat{\delta}_{n,\varepsilon}$ есть функция вида $\lfloor N\delta_{n,\varepsilon}(x/N + \text{const}) \rfloor$, т.е.

$$\min_t \|\widehat{\delta}_{n,\varepsilon}(\cdot - t)\|_1 = \min_u \|\lfloor N\delta_{n,\varepsilon}(\cdot/N - u) \rfloor\|_1 \geq \min_u \sum_{x \in \mathbb{Z}} \delta_{n,\varepsilon}\left(\frac{x}{N} - u\right) - 2^{n+1}N\varepsilon.$$

Функции δ неотрицательны и имеют один максимум; поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \delta_{n,\varepsilon}\left(\frac{x}{N} - u\right) &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\varepsilon}\left(\frac{x}{N} - u\right) dx - \max_t \delta_{n,\varepsilon}(t) \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\varepsilon}(t) dt - \max_t \delta_{n,\varepsilon}(t) \gtrsim \varepsilon^n \omega(\varepsilon) (c_1 N\varepsilon - c_2), \end{aligned}$$

где $c_1, c_2 > 0$. Поэтому при $\varepsilon \gg 1/N$ имеем

$$\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|_1 \gtrsim N\varepsilon^{n+1}\omega(\varepsilon) \sum_l |a'_l - a''_l| - 2^{n+1}N\varepsilon.$$

Если теперь

$$\sum_l |a'_l - a''_l| \geq c \sum_l 1 \sim \frac{c}{2^{n+1}\varepsilon},$$

где $c = \text{const} > 0$, то

$$\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|_1 \gtrsim N(cc_3\varepsilon^n\omega(\varepsilon) - \varepsilon c_4),$$

где $c_3, c_4 > 0$.

Выбирая ε вида $W(c_5/N)$, где $c_5 = \text{const}$, получаем

$$\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|_1 \gtrsim cc_3c_5 - c_4NW\left(\frac{c_5}{N}\right).$$

По построению $NW(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому выбором константы c_5 можно добиться того, что при достаточно больших N будет выполнено неравенство $\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|_1 \geq 3$.

Тем самым, для построения 3-различимого (в метрике $\|\cdot\|_1$) множества функций надо уметь подбирать соответствующие наборы коэффициентов $(a_0, a_1, \dots)$ длины $d = [1/(2^{n+1}\varepsilon)]$, различающиеся не менее чем в cd разрядах, для какой-то положительной константы c ; при этом число таких наборов будет равно мощности соответствующего 3-различимого множества. Это можно сделать по доказанной лемме: для любого достаточно малого c соответствующая мощность будет не меньше 2^{c_6d} , где $c_6 = c_6(c)$ – положительная константа.

Итак, построено 3-различимое (в метрике $\|\cdot\|_1$) множество мощности $2^{\text{const}/\varepsilon}$. Из выбора ε имеем

$$\log \text{Approx}_1 \hat{H}_{n,\omega}^N \gtrsim \frac{1}{\varepsilon} \asymp \frac{1}{W(1/N)}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю О.Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аманжаев Г. Г. О дискретных аналогах классов непрерывных функций различной гладкости // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 2. С. 54–58.
- [2] Аманжаев Г. Г. О дискретных аналогах классов функций, задаваемых модулем непрерывности n -й производной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 2. С. 3–8.
- [3] Аманжаев Г. Г. О дискретных аналогах функций дробной гладкости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 4. С. 3–7.
- [4] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
- [5] Яблонский С. В., Лупанов О. Б. (ред.) Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974.